ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΩΝ
ΤΕΙ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
Δρ. Β. Σγαρδώνη

Αλγεβρα BOOLE και Λογικές Πύλες

Α. ΑΛΓΕΒΡΑ Boole

Η Άλγεβρα Boole (Boolean algebra) πήρε το όνομά της από τον G. Boole (1815-1864), ο οποίος ανέπτυξε ένα αλγεβρικό σύστημα (1854) για τη συστηματική αντιμετώπιση της λογικής. Τα αξιώματα της Άλγεβρας Boole διατυπώθηκαν από τον E. V. Huntington (1904).

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα Boole ονομάζονται **λογικές μεταβλητές** γιατί μπορούν να πάρουν δύο (2) μόνο τιμές: **0 και 1**. Αυτός είναι ο λόγος που η Άλγεβρα Boole αποτελεί τη βάση για τα ψηφιακά ηλεκτρονικά κυκλώματα.

Στην Άλγεβρα Boole ορίζονται τρεις βασικές πράξεις:

- η πράξη NOT (ΟΧΙ) με σύμβολο $\bar{\ }$
- η πράξη AND (ΚΑΙ) με σύμβολο $\cdot$
- η πράξη OR (ή) με σύμβολο $+$

1. ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Η πράξη NOT

Στην πράξη NOT συμμετέχει μία μόνο λογική μεταβλητή και το αποτέλεσμα της πράξης είναι το συμπλήρωμα (αντίστροφο) της μεταβλητής αυτής, δηλαδή αν η μεταβλητή έχει την τιμή “0”, τότε το αποτέλεσμα είναι “1” και αντίστροφα αν η μεταβλητή έχει την τιμή “1”, τότε το αποτέλεσμα είναι “0”.

Αν A είναι μία λογική μεταβλητή, τότε η πράξη NOT εκφράζεται με τη σχέση:

$$Y = \overline{A}$$

Ο πίνακας αληθείας της πράξης NOT παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1
Πίνακας Αληθείας της πράξης NOT

A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

Η πράξη AND

Στην πράξη AND συμμετέχουν δύο λογικές μεταβλητές και το αποτέλεσμα της πράξης είναι “1”, αν και οι δύο μεταβλητές είναι “1”.

Αν A και B είναι δύο λογικές μεταβλητές, τότε η πράξη AND εκφράζεται με τη σχέση:

$$Y=A\cdot B$$

Ο πίνακας αληθείας της πράξης AND παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2
Πίνακας Αληθείας της πράξης AND

A	B	$Y=A\cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Η πράξη OR

Στην πράξη OR συμμετέχουν δύο λογικές μεταβλητές και το αποτέλεσμα της πράξης είναι “1”, αν τουλάχιστον μία από τις δύο μεταβλητές είναι “1”.

Αν A και B είναι δύο λογικές μεταβλητές, τότε η πράξη OR εκφράζεται με τη σχέση:

$$Y=A+B$$

Ο πίνακας αληθείας της πράξης OR παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3
Πίνακας Αληθείας της πράξης OR

A	B	Y=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2. Αξιώματα Huntington

1. **Ουδέτερα στοιχεία των πράξεων AND και OR**
Το ουδέτερο στοιχείο της πράξης AND είναι το 1 και το ουδέτερο στοιχείο της πράξης OR είναι το 0.
α. $\mathbf{x\cdot 1=1\cdot x=x}$
β. $\mathbf{x+0=0+x=x}$

Το αξίωμα αυτό μπορεί να επαληθευτεί από τους πίνακες αληθείας των πράξεων AND και OR, από όπου φαίνεται ότι:
$0\cdot 1=1\cdot 0=0$ και $1\cdot 1=1$
και
$0+0=0$ και $1+0=0+1=1$

2. **Αντιμεταθετική ιδιότητα των πράξεων AND και OR**
Οι πράξεις AND και OR έχουν την αντιμεταθετική ιδιότητα.
α. $\mathbf{x\cdot y=y\cdot x}$
β. $\mathbf{x+y=y+x}$

3. **Επιμεριστική ιδιότητα των πράξεων AND και OR**
Η πράξη AND έχει την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πράξη OR και η πράξη OR έχει την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πράξη AND.
α. $\mathbf{x\cdot (y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)}$
β. $\mathbf{x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)}$

4. **Συμπλήρωμα (NOT)**
Κάθε λογική μεταβλητή x έχει ένα συμπλήρωμα $\overline{x}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
α. $\mathbf{x\cdot \overline{x}=0}$
β. $\mathbf{x+\overline{x}=1}$

Το αξίωμα αυτό μπορεί να επαληθευτεί από τους πίνακες αληθείας της πράξης NOT, από όπου φαίνεται ότι:

$0 \cdot \overline{0} = 0 \cdot 1 = 0$ και $1 \cdot \overline{1} = 1 \cdot 0 = 0$
και
$0 + \overline{0} = 0 + 1 = 1$ και $1 + \overline{1} = 1 + 0 = 1$

5. Αρχή Δυϊσμού

Η ισχύς των εκφράσεων της Άλγεβρας Boole εξακολουθεί να υφίσταται, αν γίνει αλλαγή των πράξεων AND και OR και των ουδέτερων στοιχείων μεταξύ τους ($\cdot \leftrightarrow +$ και $0 \leftrightarrow 1$).

Για παράδειγμα, αν ισχύει η έκφραση $x+1=1$, τότε ισχύει και η έκφραση $x \cdot 0=0$ και η μία έκφραση ονομάζεται δυικη της άλλης.

3. Θεωρήματα Άλγεβρας Boole

Θεώρημα 1.
α. $\mathbf{x \cdot x = x}$
β. $\mathbf{x + x = x}$

Θεώρημα 2.
α. $\mathbf{x \cdot 0 = 0}$
β. $\mathbf{x + 1 = 1}$

Θεώρημα 3.
$\mathbf{x = \overline{\overline{x}}}$

Θεώρημα 4. Προσεταιριστική ιδιότητα
α. $\mathbf{x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z}$
β. $\mathbf{x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z}$

Θεώρημα 5. Θεώρημα απορρόφησης
α. $\mathbf{x + x \cdot y = x}$ (πρωτεραιοτητα x•y)
β. $\mathbf{x \cdot (x + y) = x}$

Θεώρημα 6. Θεώρημα De Morgan
α. $\mathbf{\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}}$
β. $\mathbf{\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}}$

Παρατήρηση:
Το Θεώρημα De Morgan ισχύει και για περισσότερες από δύο μεταβλητές:

α. $\overline{x \cdot y \cdot z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$
β. $\overline{x + y + z} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$

4. Προτεραιότητα πράξεων

Για την εκτέλεση των πράξεων στις εκφράσεις της Άλγεβρας Boole είναι ανάγκη να καθορισθεί η προτεραιότητα της εκτέλεσής τους, όπως γίνεται στην γνωστή από τα μαθηματικά άλγεβρα.

Ο Πίνακας προτεραιότητας των πράξεων παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4
Προτεραιότητα πράξεων

Προτεραιότητα	Πράξη
1	( )
2	NOT
3	AND
4	OR

Από τον Πίνακα προτεραιότητας των πράξεων προκύπτει ότι σε μία έκφραση της Άλγεβρας Boole εκτελούνται πρώτα οι πράξεις μέσα σε παρενθέσεις, μετά υπολογίζονται τα συμπληρώματα, στην συνέχεια εκτελούνται οι πράξεις AND και τέλος εκτελούνται οι πράξεις OR.

Β. ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ

5. Λογικά διαγράμματα των λογικών πυλών

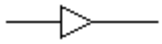
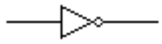
Οι λογικές πύλες είναι τα βασικά δομικά στοιχεία στα ψηφιακά κυκλώματα όπου χρησιμοποιούμε τις λογικές πύλες για να κατασκευάσουμε σύνθετα κυκλώματα.

Οι λογικές πύλες μίας και δύο εισόδων παρουσιάζονται στον Πίνακα 5 όπου η έξοδος εκφράζεται ως συνάρτηση των εισόδων.

Πίνακας 5
Λογικές Πύλες - Συναρτήσεις

Λογική Πύλη	Είσοδοι	Έξοδος	Συνάρτηση
(Απομονωτής) Buffer	A	Y	$Y=A$
Αντιστροφέας NOT	A	Y	$Y=\overline{A}$
AND	A,B	Y	$Y=A\cdot B$
OR	A,B	Y	$Y=A+B$
NAND	A,B	Y	$Y=\overline{A\cdot B}$
NOR	A,B	Y	$Y=\overline{A+B}$
XOR	A,B	Y	$Y=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B=A\oplus B$
XNOR	A,B	Y	$Y=A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A\oplus B}=A\odot B$

Πίνακας 6
Λογικές Πύλες – Λογικά Διαγράμματα

Λογική Πύλη	Λογικό Διάγραμμα
Απομονωτής Buffer	A  $Y=A$
Αντιστροφέας NOT	A  $Y=\overline{A}$
AND	A B  $Y=A\cdot B$
OR	A B  $Y=A+B$
NAND	A B  $Y=\overline{A\cdot B}$
NOR	A B  $Y=\overline{A+B}$
XOR	A B  $Y=A\oplus B$
XNOR	A B  $Y=A\odot B$

6. Πίνακες αληθείας των λογικών πυλών

O buffer

Ο απομονωτής (buffer) είναι μία πύλη με μία είσοδο και μία έξοδο που είναι ίση με την είσοδο. Η συνάρτηση του απομονωτή είναι:

$$Y=A$$

και ο πίνακας αληθείας του απομονωτή παρουσιάζεται στον Πίνακα 7.

Πίνακας 7
Πίνακας αληθείας του απομονωτή

A	Y=A
0	0
1	1

Η πύλη NOT

Η πύλη NOT έχει μία είσοδο και μία έξοδο που είναι ίση με το συμπλήρωμα της εισόδου. Η συνάρτηση της πύλης NOT είναι:

$$Y = \overline{A}$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης NOT παρουσιάζεται στον Πίνακα 8.

Πίνακας 8
Πίνακας αληθείας της πύλης NOT

A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

Η πύλη AND

Η πύλη AND έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι “1”, αν και οι δύο είσοδοι είναι “1”. Η συνάρτηση της πύλης AND είναι:

$$Y=A\cdot B$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης AND παρουσιάζεται στον Πίνακα 9.

Πίνακας 9
Πίνακας Αληθείας της πύλης AND

A	B	$Y=A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Η πύλη OR

Η πύλη OR έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι "1", αν τουλάχιστον μία από τις δύο εισόδους είναι "1".
Η συνάρτηση της πύλης OR είναι:

$$Y=A+B$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης OR παρουσιάζεται στον Πίνακα 10.

Πίνακας 10
Πίνακας Αληθείας της πύλης OR

A	B	$Y=A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Η πύλη NAND

Η πύλη NAND προκύπτει από μία πύλη AND ακολουθούμενη από μία πύλη NOT. Η πύλη NAND έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι "1", αν τουλάχιστον μία από τις δύο εισόδους είναι "0". Η συνάρτηση της πύλης NAND είναι:

$$Y = \overline{A \cdot B}$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης NAND παρουσιάζεται στον Πίνακα 11.

Πίνακας 11
Πίνακας Αληθείας της πύλης NAND

A	B	$Y = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Η πύλη NOR

Η πύλη NOR προκύπτει από μία πύλη OR ακολουθούμενη από μία πύλη NOT. Η πύλη NOR έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι “1”, αν και οι δύο είσοδοι είναι “0”. Η συνάρτηση της πύλης NOR είναι:

$$Y = \overline{A + B}$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης NOR παρουσιάζεται στον Πίνακα 12.

Πίνακας 12
Πίνακας Αληθείας της πύλης NOR

A	B	$Y = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Η πύλη XOR

Η πύλη XOR (exclusive OR) έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι “1”, αν οι δύο είσοδοι είναι διαφορετικές μεταξύ τους (για αυτό ονομάζεται και πύλη διαφωνίας ή σύγκρισης). Η συνάρτηση της πύλης XOR είναι:

$$Y = A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

και ο πίνακας αληθείας της πύλης XOR παρουσιάζεται στον Πίνακα 13.

Πίνακας 13
Πίνακας Αληθείας της πύλης XOR

A	B	$Y = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Η πύλη XNOR

Η πύλη XNOR (exclusive NOR) έχει δύο εισόδους και μία έξοδο που είναι “1”, αν οι δύο είσοδοι είναι ίσες. Η συνάρτηση της πύλης XNOR είναι:

$$Y = A \odot B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

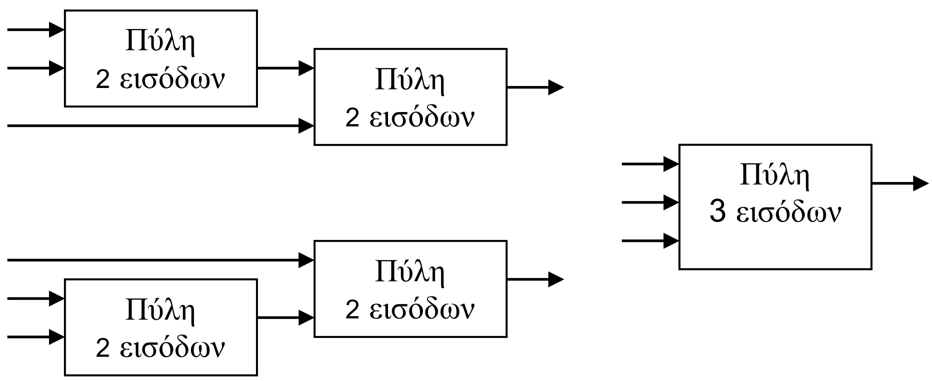
και ο πίνακας αληθείας της πύλης XNOR παρουσιάζεται στον Πίνακα 14.

Πίνακας 14
Πίνακας Αληθείας της πύλης XNOR

A	B	Y=A⊙B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

7. Λογικές πύλες πολλαπλών εισόδων

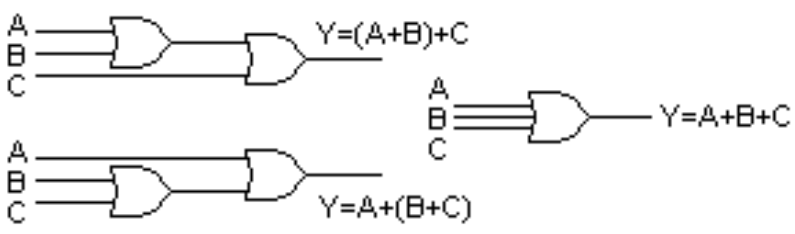
Οι πύλες δύο εισόδων μπορούν να επεκταθούν ώστε να έχουν περισσότερες από δύο εισόδους, εάν οι πράξεις τους έχουν την *αντιμεταθετική* και την *προσεταιριστική* ιδιότητα. Η υλοποίηση μίας τέτοιας πύλης τριών εισόδων με χρήση ομοίων πυλών δύο εισόδων παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1 Τεχνική επέκτασης εισόδων πυλών

Για παράδειγμα, μία πύλη AND τριών εισόδων μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας δύο πύλες AND δύο εισόδων όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, γιατί ισχύει:

- η αντιμεταθετική ιδιότητα
  Y=A·B=B·A
- η προσεταιριστική ιδιότητα
  Y=A·B·C=(A·B)·C=A·(B·C)



Σχήμα 2 Υλοποίηση πύλης AND τριών εισόδων