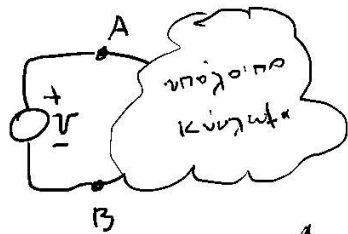


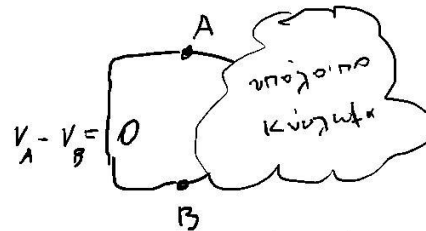
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Τι σημαίνει "μηδενίωση μια ανεξάρτητη πηγή τάσης συνδεδεμένη στους κόμβους Α και Β; Η τάση



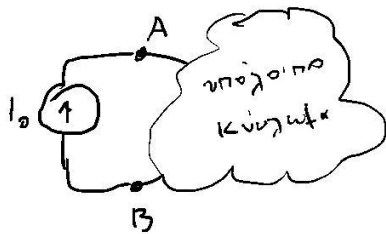
$$V_A - V_B \text{ από } V$$

γίνεται 0

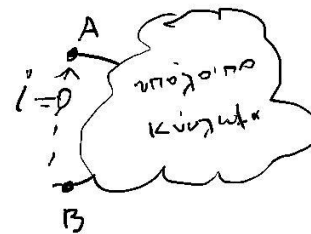


Δηλαδή αντικαθιστώ την ανεξάρτητη πηγή τάσης με βραχυκύκλωμα.

Τι σημαίνει "μηδενίωση μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος συνδεδεμένη στους κόμβους Α και Β



Το ρεύμα από I_0 γίνεται 0



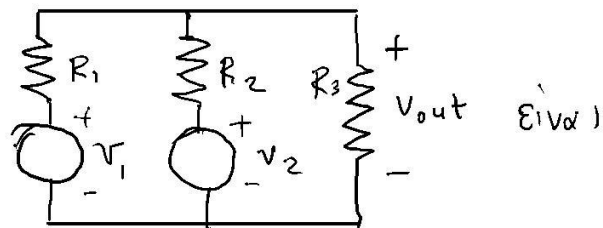
Δηλαδή βγάζω την πηγή ρεύματος και αφήνω ανοικτούς τους κόμβους.

Θεώρημα της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας

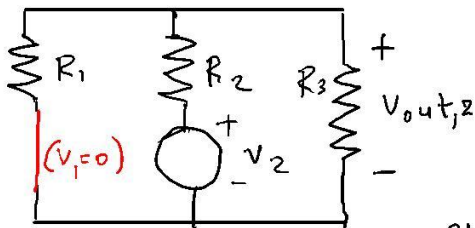
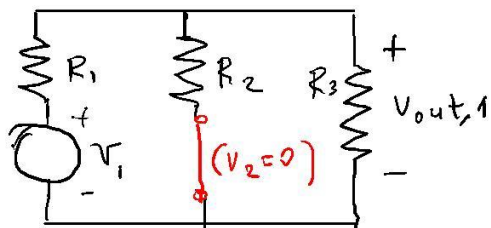
Η απόκριση ενός γραμμικού κυκλώματος σε ένα σύνολο από ανεξάρτητες πηγές (τάσης ή ρεύματος) ισούται με το άθροισμα των αποκρίσεων εξαιτίας κάθε μιας πηγής ξεχωριστά μηδενίζοντας τις υπόλοιπες.

Παράδειγμα

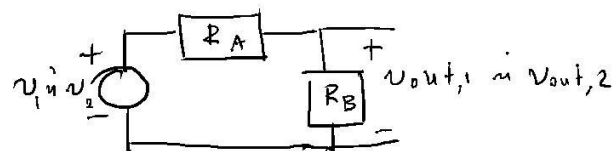
Η απόκριση V_{out} του κυκλώματος:



$$V_{out} = V_{out,1} + V_{out,2} \quad \text{όπου}$$



Παρατηρούμε ότι και τα δύο κυκλώματα έχουν την μορφή



Για το πρώτο $R_A = R_1$ και $R_B = R_2 || R_3$
(παράλληλη σύνδεση)

Για το δεύτερο $R_A = R_2$ και $R_B = R_1 || R_3$

Τα κυκλώματα είναι
"διαίρετες τάσης", οπότε:

$$V_{out,1} = V_1 \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B} = V_1 \cdot \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \quad R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{d.p.d.}$$

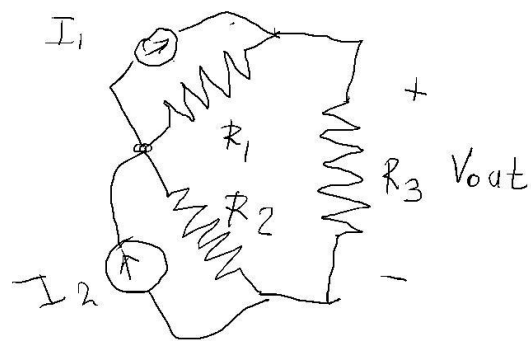
$$V_{out,1} = V_1 \cdot \frac{\left(\frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)} \right) \cdot (R_2 + R_3)}{\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)} \right) \cdot (R_2 + R_3)} = V_1 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$V_{out,2} = V_2 \cdot \frac{R_B}{R_A + R_B} = V_2 \cdot \frac{R_1 \parallel R_3}{R_2 + R_1 \parallel R_3} \quad R_1 \parallel R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad \text{d.p.d.}$$

$$V_{out,2} = V_2 \cdot \frac{\left(\frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)} \right) \cdot (R_1 + R_3)}{\left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{(R_1 + R_3)} \right) \cdot (R_1 + R_3)} = V_2 \cdot \frac{R_1 R_3}{R_2 R_1 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

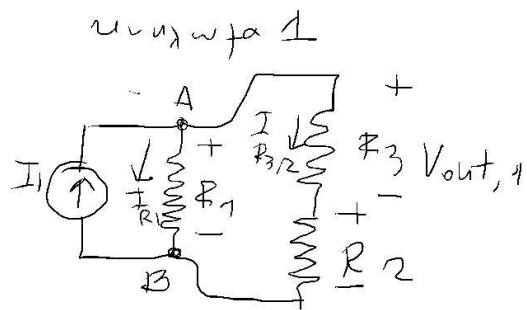
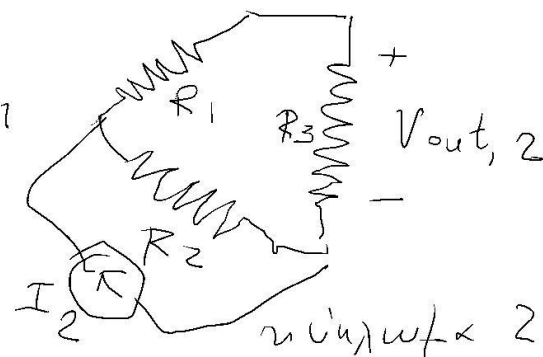
$$\text{Ergebnis } V_{out} = \frac{R_2 R_3 \cdot V_1 + R_1 R_3 \cdot V_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος επαλληλίας:
Έχω το κύκλωμα:



Σύμφωνα με το θεώρημα της επαλληλίας

$$V_{out} = V_{out,1} + V_{out,2} \quad \text{όπου:}$$



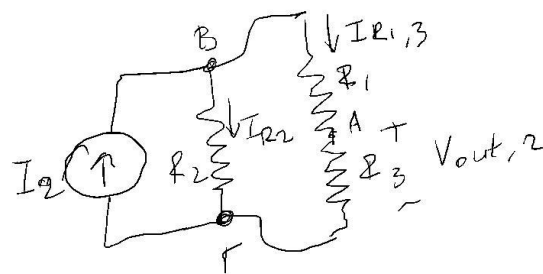
$$I_1 = I_{R1} + I_{R3,2}$$

$$I_{R3,2} = \frac{V_{AB}}{R_3 + R_2}$$

$$\frac{V_{AB}}{I_1} = R_1 \parallel (R_3 + R_2) \quad \text{αφ'α}$$

$$V_{AB} = I_1 \cdot (R_1 \parallel (R_3 + R_2)) \Rightarrow I_{R3,2} = \frac{I_1 \cdot (R_1 \parallel (R_3 + R_2))}{R_3 + R_2} \quad \text{και} \quad V_{out,1} = I_{R3,2} \cdot R_3 \quad \text{ή} \quad V_{out,1} = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2} \cdot (R_1 \parallel (R_3 + R_2))$$

Ομολα το κύκλωμα 2 είναι:



$$V_{BR} = I_2 \cdot (R_2 \parallel (R_1 + R_3))$$

$$I_{R1,3} = \frac{V_{BR}}{R_1 + R_3} \quad \text{ή} \quad I_{R1,3} = \frac{I_2 \cdot (R_2 \parallel (R_1 + R_3))}{R_1 + R_3}$$

$$V_{out,2} = I_{R1,3} \cdot R_3 = I_2 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot (R_2 \parallel (R_1 + R_3))$$

$$\text{Τελικά } V_{out} = I_1 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2} \cdot (R_1 \parallel (R_3 + R_2)) + I_2 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot (R_2 \parallel (R_1 + R_3))$$

$$(R_1 \parallel (R_3 + R_2)) = \frac{R_1(R_3 + R_2)}{R_1 + R_3 + R_2} \quad \text{και} \quad R_2 \parallel (R_1 + R_3) = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3}$$

Βυθίζω ότι όταν 2 αντίστασεις

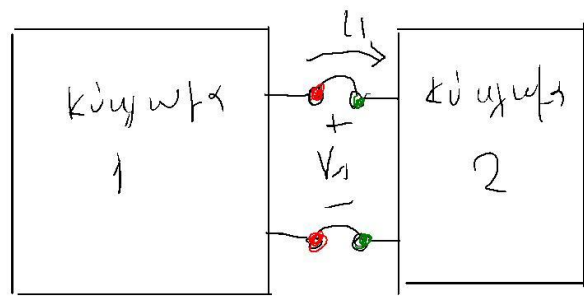
ενα συνιστάμενες παράλληλα

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \Leftrightarrow R_{eq} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b}$$

$$\text{Τελικά } V_{out} = I_1 \cdot \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + I_2 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

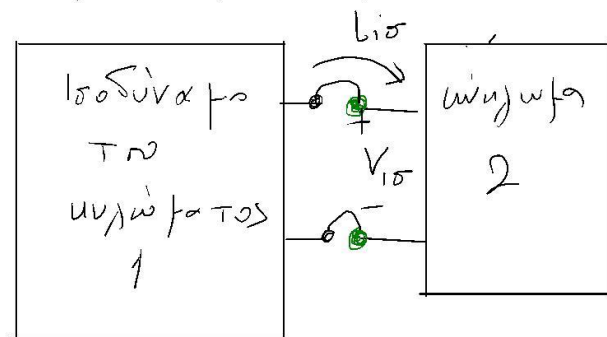
Η έννοια του ισοδύναμου κυκλώματος

Έχω το "κυκλώμα 1" και το "κυκλώμα 2". Τα συνδέουμε και στους δύο τους άκτους συνδέσεις (αυροδέιες εισόδου του 1• και



αυροδέιες εισόδου του 2•) δημιουργείται τάση V και στον "ακτίδα" "κυκλώμα 2" περνάει ένα ρεύμα I

Ισοδύναμο του κυκλώματος 1 ως προς την επίδρασή του στο κυκλώμα 2 είναι ένα άλλο κυκλώμα, το οποίο αν συνδεθεί στους άκτους εισόδου του κυκλώματος 2, θα δώσει ίδια τάση V και ίδιο ρεύμα I με αυτό που θα υπήρχε λόγω του κυκλώματος 1



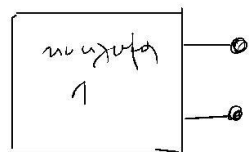
$$V_{10} = V_1$$

$$I_{10} = I_1$$

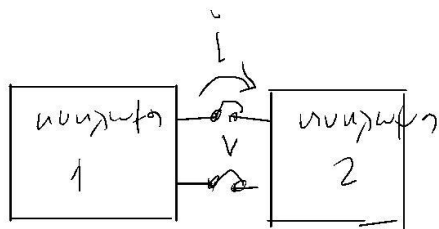
Απλ. το κυκλώμα 2 "δεν καταλαβαίνει" αν βγινει εισόδου του έχει το κυκλώμα ή το ισοδύναμό του.

Θεώρημα Thevenin

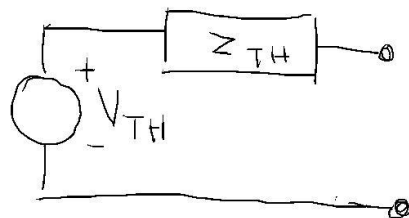
Έστω το κύκλωμα 1



του οποίου οι αμοδέντες εξόδου συνδέονται με τους αμοδέατες εισόδου του κυκλώματος 2:

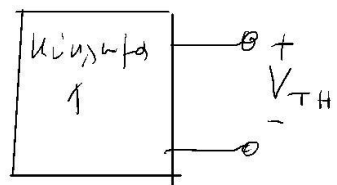


Το κύκλωμα 1 είναι ισοδύναμο ως προς την επίδρασή του στο κύκλωμα 2 με το παρακάτω κύκλωμα:



(Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin)

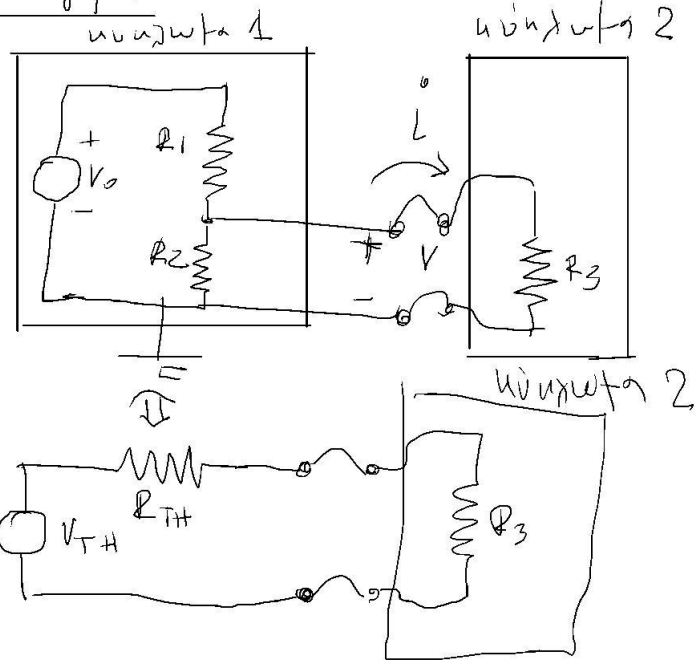
Την τιμή του V_{TH} την βρίσκω ως εξής: Αφαιρώ από την έξοδο του κυκλώματος 1 το κύκλωμα 2. Η τάση ανάμεσα στους αμοδέντες εξόδου του κυκλώματος 1 είναι η V_{TH} .



Την τιμή του Z_{TH} την βρίσκω ως εξής: Στο εσωτερικό του κυκλώματος 1, βραχυκυκλώνω (μηδενίζω) τις ανεξάρτητες πηγές τάσης και ανοικτοκυκλώνω (μηδενίζω) τις ανεξάρτητες πηγές ρεύματος.

Η εφ'όδου (αυτίσταση) που παρουσιάζει ανά-εξ-ε-τος δυο δέ-υ-τες εξ'ό-δου του κυκλώματος 1 είναι η Z_{TH} .

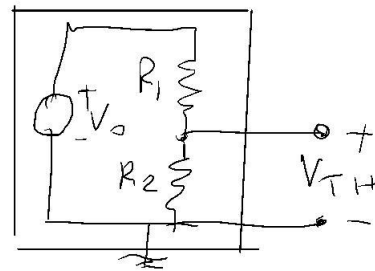
Παράδειγμα



$$V = V_0 \cdot \frac{(R_2 // R_3)}{R_1 + (R_2 // R_3)} = V_0 \cdot \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = V_0 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

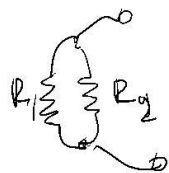
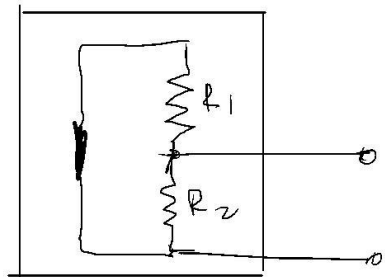
$$\tilde{I} = \frac{V}{R_3} = V_0 \cdot \frac{\frac{R_2}{R_2 + R_3}}{\frac{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_2 + R_3}}$$

Το V_{TH} το βρίσκω α-γ-ρ-ω-ν-τ-α-
το κύκλωμα 2 από την έξοδο του
κυκλώματος 1



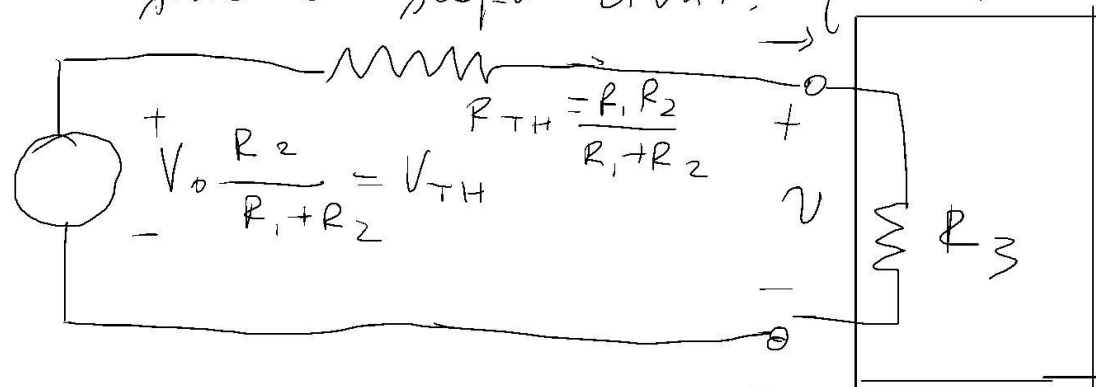
$$V_{TH} = V_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Το R_{TH} το βρίσκω βραχυκυκλώνοντας την ανεξάρτητη πηγή τάσης:



άρα $R_{TH} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ δηλ. το

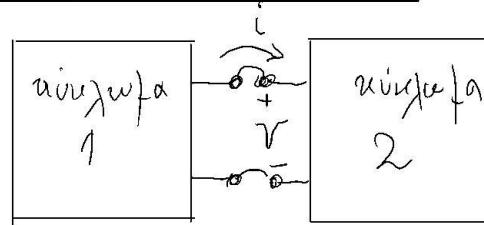
συνοπτικό κύκλωμα είναι: κύκλωμα 2



$$V = V_{TH} \cdot \frac{R_3}{R_{TH} + R_3}, \quad i = \frac{V}{R_3} \quad \text{δηλ.} \quad V = V_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_3}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} =$$

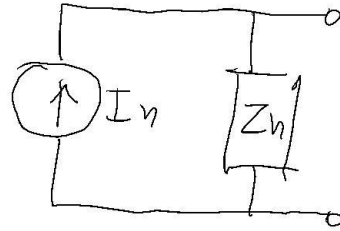
$$= V_0 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) \cdot R_3} = V_0 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \quad i = V_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Θεώρημα Norton



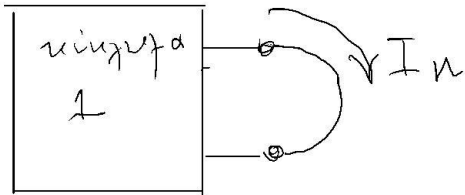
Το κυκλώμα 1 είναι ισοδύναμο ως προς την επίδρασή του στο κυκλώμα 2 με το:

Ισοδύναμο κυκλώμα Norton



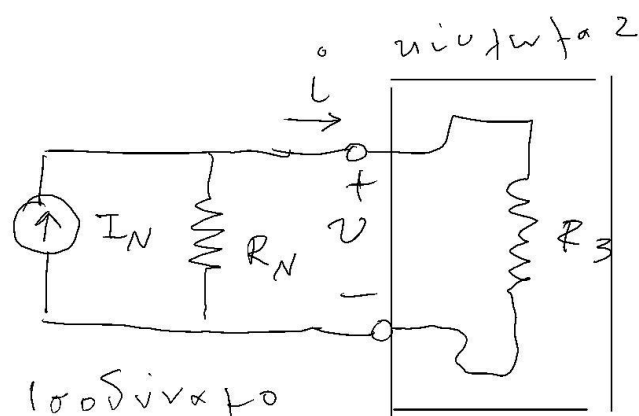
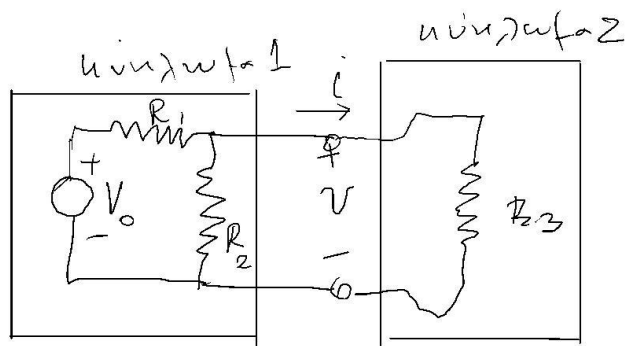
(Παχί ρεύματος παράλληλα τε επιμέτρηση)

Την τιμή του I_n την βρίσκουμε ως εξής: Αφαιρούμε από την έξοδο του κυκλώματος 1 το κυκλώμα 2 και βραχυκυκλώνουμε τους αμοιβαίους εξόδους του κυκλώματος 1. Το ρεύμα που τους διαρρέει είναι το I_n



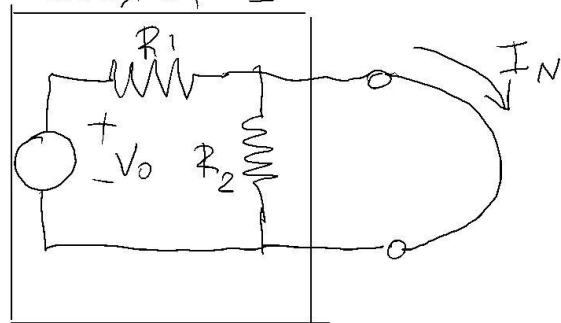
Το Z_n το βρίσκουμε όπως βρίσκουμε και το Z_{TH}
άρα $Z_n = Z_{TH}$.

Παράδειγμα:



Ισοδύναμο
κύκλωμα Norton
Του κυκλώματος 1

Εύρεση του I_N
κύκλωμα 1



Από την R_2 δεν περνάει ρεύμα γιατί οι
ακροδέκτες της είναι βραχυκυκλωμένοι, άρα
η διαφορά δυναμικού ανάμεσα τους είναι 0
και $i_{R2} = \frac{0}{R_2} = 0$

Άρα
$$I_N = \frac{V_0}{R_1}, \quad R_N = R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_N = \frac{V}{R_N} + \frac{V}{R_3} \Leftrightarrow I_N = V \left(\frac{R_N + R_3}{R_N R_3} \right) \Leftrightarrow V = I_N \cdot \frac{R_N R_3}{R_N + R_3}$$

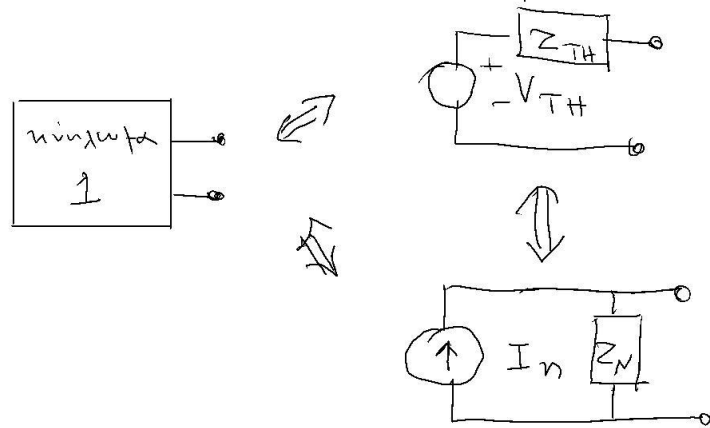
αντικαθιστώντας
το I_N έχω R_N

$$V = \frac{V_0}{R_1} \cdot \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \right) \cdot (R_1 + R_2)} \Rightarrow V = V_0 \cdot \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

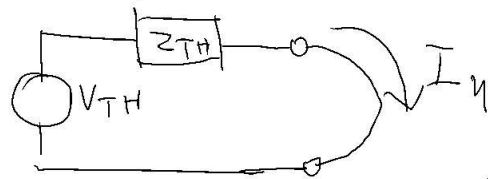
$$I = \frac{V}{R_3} = V_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Δείξατε ότι πράγματι αν βάλουμε το ισοδύναμο κύκλωμα Norton θα έχουμε στο κύκλωμα 2 την ίδια V και το ίδιο I που έχουμε όταν βάλουμε το κύκλωμα 1

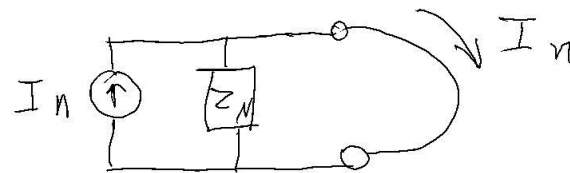
ΣΧΕΔΗ ΚΑΤΕΓΕΓΑ ΓΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ NORTON ΚΑΙ THEVENIN



Αντικαθιστ.

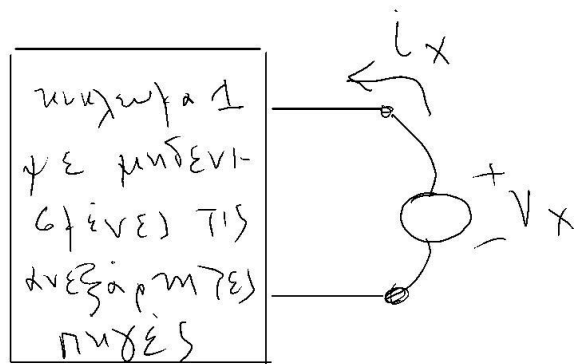


από



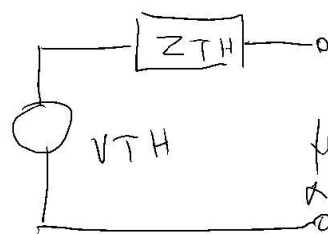
$$V_{TH} = \frac{I_{NORTON} \cdot Z_{TH}}{Z_N}$$

Ένας τρόπος να βρούμε το $Z_{TH} = Z_N$ είναι ο εξής: Στο κύκλωμα 1 βραχυκυκλώνουμε τις ανεξάρτητες πηγές τάσης και ανοικτοκυκλώνουμε τις ανεξάρτητες πηγές ρεύματος. Στους ακροδέκτες εξόδου του κυκλώματος 1 βάζουμε μία «δουλεμένη» πηγή τάσης V_X και μετράμε το ρεύμα I_X που αυτή δίνει στο κύκλωμα 1. $Z_N = Z_{TH} = \frac{V_X}{I_X}$

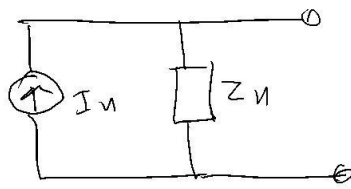
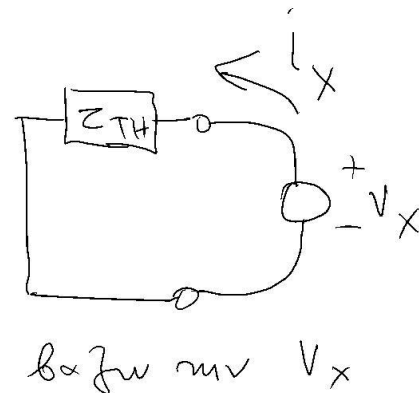


$$Z_{TH} = Z_N = \frac{V_X}{I_X}$$

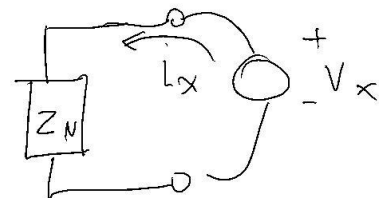
Ισοδύναμο του κυκλώματος 1



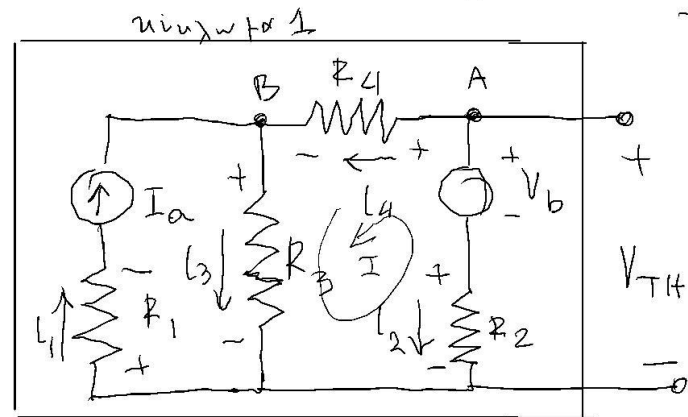
μηδενίζω την
ανεξάρτητη
πηγή τάσης



μηδενίζω
την ανεξάρτητη
πηγή ρεύματος



Παράδειγμα: Να υπολογισθούν τα V_{TH} , I_N , $R_{TH} = R_N$ για το παραπάνω κύκλωμα:



Το V_{TH} είναι η τάση άκρων στα άκρα του κυκλώματος εξόδου του κυκλώματος 1 αν δεν συνδεστούσε κάποιο άλλο κύκλωμα.

$$V_{TH} = V_b + V_{R2}$$

$$\text{KCL (A)} : i_2 + i_4 = 0 \text{ ή } i_4 = -i_2$$

$$\text{KCL (B)} : I_a + i_4 - i_3 = 0 \Leftrightarrow I_a + i_4 = i_3$$

$$\text{KVL (I)} : -V_{R2} - V_b + V_{R4} + V_{R3} = 0 \text{ δηλ.}$$

$$-i_2 R_2 - V_b + i_4 R_4 + i_3 R_3 = 0 \text{ ή}$$

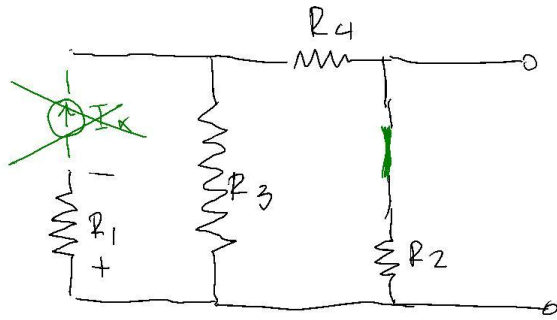
$$\underbrace{i_4}_{-i_2} R_2 - V_b + i_4 R_4 + (\underbrace{I_a + i_4}_{i_3}) R_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i_4 (R_2 + R_4 + R_3) - V_b + I_a R_3 = 0 \text{ ή } i_4 = \frac{V_b - I_a R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \text{ επομένως}$$

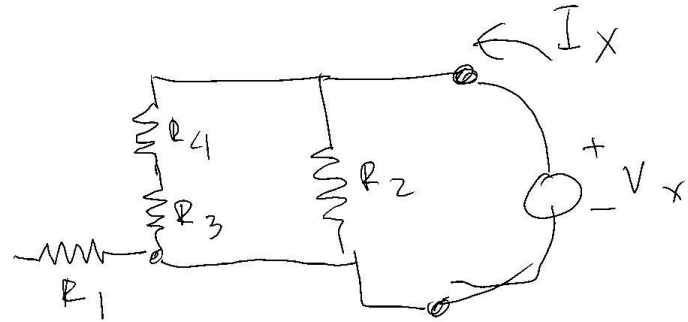
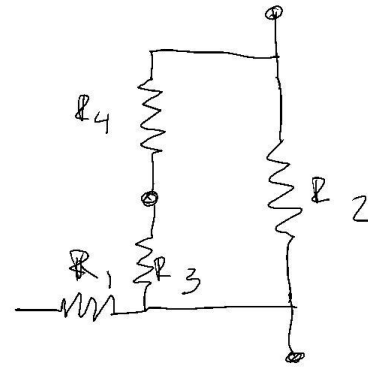
$$\text{και } i_2 = \frac{I_a R_3 - V_b}{R_2 + R_3 + R_4}, V_{R2} = i_2 R_2 = (I_a R_3 - V_b) \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}$$

$$\text{Τέλος } V_{TH} = V_b + (I_a R_3 - V_b) \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Για να βρω το R_{TH} μετέβινα τις πηγές:



Sup. To simplify
given:



$$-\frac{V_x}{I_x} = R_2 \parallel (R_4 + R_3)$$

$$= \frac{R_2 (R_4 + R_3)}{R_2 + R_4 + R_3} = R_{TH} = R_N$$

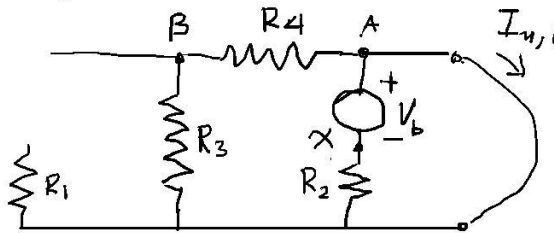
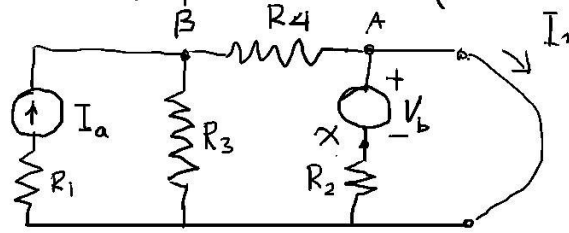
$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \left[V_b + (I_a R_3 - V_b) \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right] \cdot \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_2 R_4 + R_2 R_3}$$

Αν πάω τις ηρώσεις έχω:
$$I_{\eta} = \frac{V_b (R_2 + R_3 + R_4)}{R_2 (R_3 + R_4)} + I_a R_3 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_2 (R_3 + R_4)} -$$

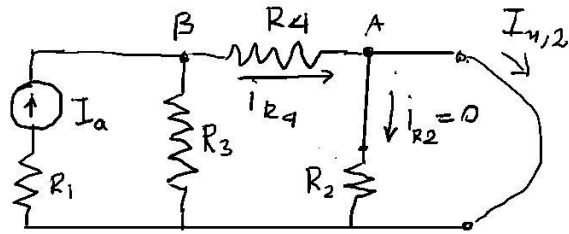
$$- V_b \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_2 (R_3 + R_4)} \Leftrightarrow$$

$$I_{\eta} = \frac{V_b (R_2 + R_3 + R_4) - V_b R_2}{R_2 (R_3 + R_4)} + I_a \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = \frac{V_b}{R_2} + I_a \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} \quad (1)$$

Αν πάω να βρω το I_{η} βραχυκυκλώνοντας τους κυρτούς εξόδους και εφαρμόζοντας το θεώρημα της υπέρθεσης θα έχω:



Ο ένας κυρτός της R_2 συνδέεται στον κόμβο X και ο άλλος κυρτός στον



Η R_2 έχει τάση 0 οπότε το $i_{R2} = 0$. Επομένως

$$I_{\eta,2} = I_{R4} \text{ Όμως}$$

$$I_{R4} = I_a \cdot \frac{R_3}{R_4 + R_3} \text{ (διαίρεσης ρεύματος)}$$

κόμβο A. Άρα

$$I_{\eta,1} = \frac{V_b}{R_2}$$

Άρα βρίσκουμε πάλι την σχέση (1)