Σύντομη επισκόπηση για τους μιγαδικούς αριθμούς

φανταστική μονάδα $j = \sqrt{-1}$ και $-j = -\sqrt{-1}$ άρα $j^2 = -1$ και $(-j)(-j) = j^2 = -1$

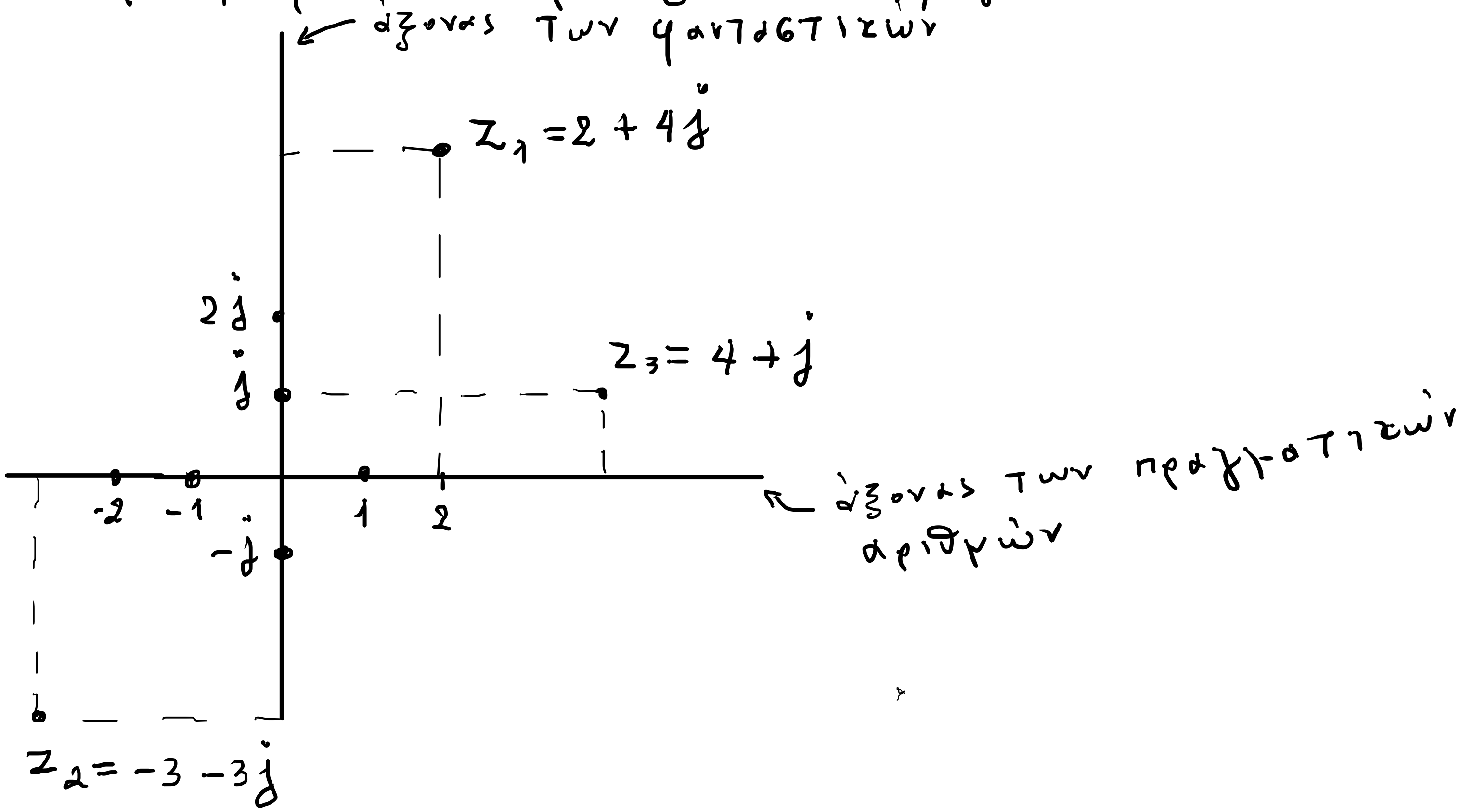
<u>φανταστικός αριθμός:</u> aj άρα $(aj)^2 = -a^2$ π.χ. $3j$ $(3j)^2 = -9$,

$-0.1j$, $(-0{,}1j)^2 = -0{,}01$

<u>Μιγαδικός αριθμος:</u> Ενα ζεύγος με πραγματικό και φανταστικό μέρος:

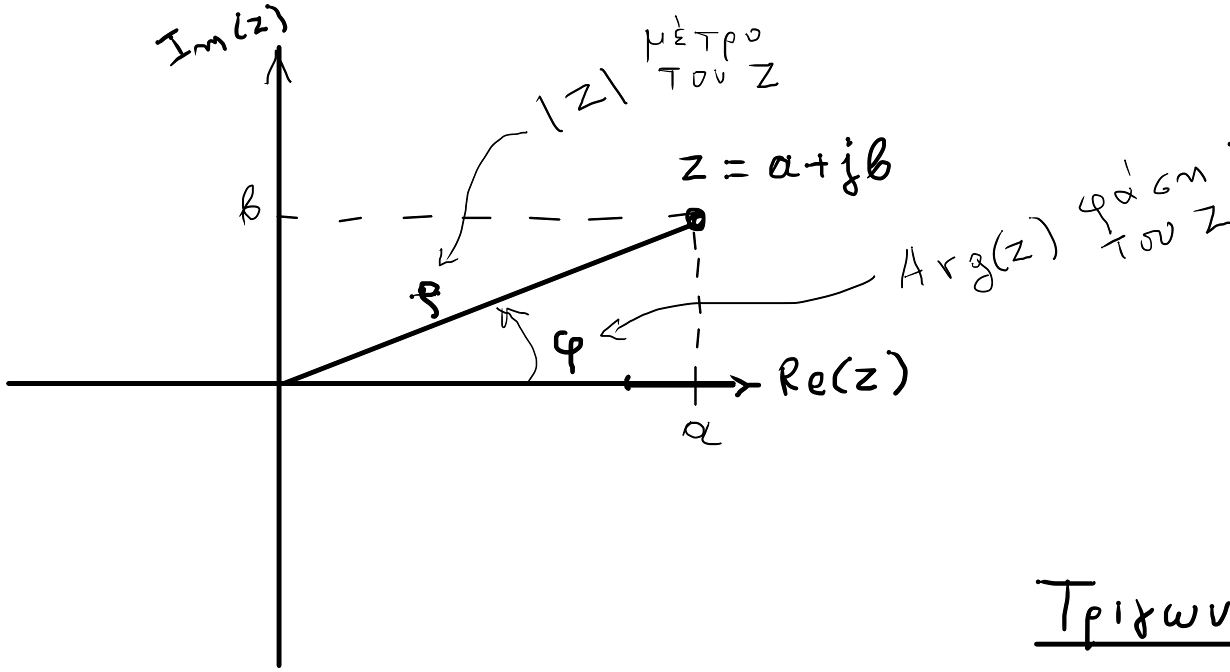
$(3,5)$: $3+5j$, $(0.1,-12)$: $0{,}1-12j$

Άρα μπορώ να φτιάξω το μιγαδικό επίπεδο



<u>Κανονική μορφή μιγαδικού αριθμού</u>

$z = a + jb$	$z = 8 - 9j$
πραγματικό μέρος: $Re(z) = a$	$Re(z) = 8$
φανταστικό μέρος $Im(z) = b$	$Im(z) = -9$



$$\rho = |z| = \sqrt{\alpha^2 + b^2}$$

$$\varphi = \text{τοξεφ}\left(\frac{b}{\alpha}\right)$$

$$\alpha = \rho\,\text{συν}\varphi\ ,\quad b = \rho\,\text{ημ}\varphi$$

<u>Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού</u>

$$\rho(\text{συν}\varphi + j\,\text{ημ}\varphi)$$

$$\boxed{\text{Τύπος του Euler: } e^{jx} = \text{συν}x + j\,\text{ημ}x}$$

Απόδειξη: Παίρνω το $e^{-jx}[\text{συν}x + j\,\text{ημ}x]$ και βρίσκω την παράγωγό του με τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης:

$$\left[e^{-jx}\cdot(\text{συν}x + j\,\text{ημ}x)\right]' = (e^{-jx})'(\text{συν}x + j\,\text{ημ}x) + e^{-jx}(\text{συν}x + j\,\text{ημ}x)' =$$

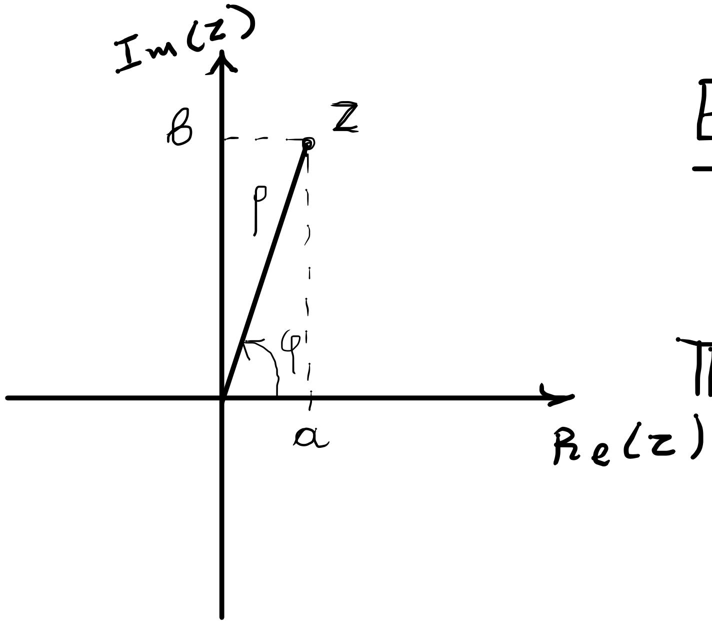
$$= -j e^{-jx}\,\text{συν}x + (-j)\cdot e^{-jx}\cdot j\,\text{ημ}x + e^{-jx}(-\text{ημ}x + j\,\text{συν}x) =$$

$$= \cancel{-j e^{-jx}\,\text{συν}x} + \cancel{e^{-jx}\,\text{ημ}x} - \cancel{e^{-jx}\,\text{ημ}x} + \cancel{j e^{-jx}\,\text{συν}x} = 0$$

Επομένως η έκφραση: $e^{-jx}\cdot(\text{συν}x + j\,\text{ημ}x)$ = σταθερά ανεξάρτητη από το x. Η τιμή της σταθεράς βρίσκεται αν $x = 0$ οπότε $e^{-j\cdot 0} = 1$, $\text{συν}0 = 1$ και $\text{ημ}0 = 0$

Άρα $e^{-j0}\cdot(\text{συν}0 + j\,\text{ημ}0) = 1$ τότε και $e^{-jx}(\text{συν}x + j\,\text{ημ}x) = 1$ άρα

$$\text{συν}x + j\,\text{ημ}x = e^{jx}$$



Εκθετική μορφή του μιγαδικού αριθμού: $\rho e^{j\phi}$

<u>Πρόσθεση</u> μιγαδικών: $(a+jb)+(x+j\psi)=(a+b)+j(x+\psi)$

<u>αφαίρεση</u>: $(a+jb)-(x+j\psi)=(a-x)+j(b-\psi)$

<u>πολλαπλασιασμός</u>:

$$Z=(a+jb)\cdot(x+j\psi)=(ax-b\psi)+j(bx+a\psi)$$

ή πιο εύκολα $a+jb=\rho_1 e^{j\phi_1}$ $\left(\rho_1=\sqrt{a^2+b^2},\ \varphi_1=\text{τοξεφ}\frac{b}{a}\right)$

$$x+j\psi=\rho_2 e^{j\phi_2}$$

$$Z=\rho_1\rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}$$

<u>Διαίρεση</u>: $Z=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{j(\phi_1-\phi_2)}$ ή $\frac{a+jb}{x+j\psi}=\frac{(a+jb)(x-j\psi)}{(x+j\psi)(x-j\psi)}=\frac{ax+b\psi}{x^2+\psi^2}+j\frac{bx-a\psi}{x^2+\psi^2}$

Συζυγής του $z=x+j\psi$ είναι ο $\bar{z}=x-j\psi$

$z=\rho e^{j\theta}$ είναι ο $\bar{z}=\rho e^{-j\theta}$

<u>ν-οστή ρίζα</u> $\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\text{συν}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+j\,\text{ημ}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$ με $k=0,1,2,\dots,n-1$

Τους μιγαδικούς αριθμούς τους χρησιμοποιούμε ως εξής:

Αν ένα σήμα τάσης έχει την μορφή $V = V_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$ γράφουμε ότι είναι το πραγματικό μέρος του $V_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ ή αλλοιώς:

$$V_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi) = Re\left[V_0 e^{j(\omega t+\varphi)}\right] = Re\left[V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right]$$

$$V_0 \eta\mu(\omega t+\varphi) = V_0 \sigma\upsilon\nu\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right) = Re\left[V_0 e^{j(\varphi-\frac{\pi}{2})} e^{j\omega t}\right]$$

Το ίδιο και για το ρεύμα.

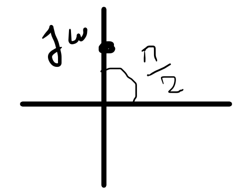
Η σχέση ρεύματος τάσης επάνω στον πυκνωτή C που είναι $i_c = C\dfrac{dV_c}{dt}$

αν $V = V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ δίνει $i_c = C\dfrac{d}{dt}\left[V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right] = C V_0 e^{j\varphi} j\omega\, e^{j\omega t}$

άρα $\dfrac{V}{i} = \dfrac{\cancel{V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}}}{C\,\cancel{V_0 e^{j\varphi}}\, j\omega \cdot \cancel{e^{j\omega t}}} = \dfrac{1}{j\omega C}$

Δηλ. ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σαν αντίσταση που όταν $\omega \to 0$ τείνει στο ∞ (ανοιχτοκύκλωμα) ενώ για $\omega \to \infty$, η τιμή της τείνει στο 0 (βραχυκύκλωμα), ενώ το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά $\frac{\pi}{2}$

$i_c = C V_0 e^{j\phi} j\omega e^{j\omega t}$ το $j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$



άρα $i_c = \omega C V_0 e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$

δηλ. το ρεύμα στον πυκνωτή είναι $\omega C V_0 \,\text{συν}(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ αν η τάση είναι $V_0 \,\text{συν}(\omega t + \varphi)$

Η σχέση ρεύματος τάσης επάνω στο πηνίο είναι $V = L\frac{di}{dt}$. Αν

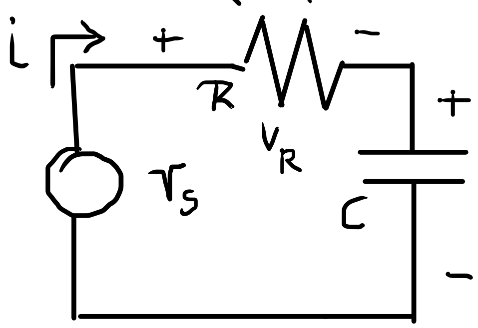
$i = I_0 \,\text{συν}(\omega t) = Re[I_0 e^{j\omega t}]$ τότε το $\frac{d}{dt}[I_0 e^{j\omega t}] = j\omega I_0 e^{j\omega t}$

Άρα $V = j\omega L I_0 e^{j\omega t}$ και $\frac{V}{i} = \frac{j\omega L \cancel{I_0} \cancel{e^{j\omega t}}}{\cancel{I_0 e^{j\omega t}}} = j\omega L$ δηλαδή το πηνίο συμπεριφέρεται σαν αντίσταση πού έχει 0 τιμή (βραχυκύκλωμα) όταν $\omega = 0$ και τείνει στο ∞ (ανοικτοκύκλωμα), όταν $\omega \to \infty$

ενώ η τάση προηγείται του ρεύματος κατά $\frac{\pi}{2}$ $V = j\omega L I_0 e^{j\omega t}$, $j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$

άρα $V = \omega L I_0 e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$ δηλ. $V = \omega L I_0 \,\text{συν}(\omega t + \frac{\pi}{2})$ αν $i = I_0 \,\text{συν}(\omega t)$

Αν πάρουμε το κύκλωμα:



Το $i = C\dfrac{dV_{out}}{dt}$

Το $i\cdot R = V_R = V_s - V_{out}$

επομένως:

$$C\frac{dV_{out}}{dt}\cdot R = V_s - V_{out}$$

δηλ. $CR\dfrac{dV_{out}}{dt} + V_{out} = V_s$

ή $\dfrac{dV_{out}}{dt} + \dfrac{1}{CR}V_{out} = \dfrac{V_s}{CR}$

αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση με άγνωστο το V_{out} για δοσμένο V_s

Την λύνουμε ως εξής: πολ/ζουμε και τα δύο μέλη με $e^{t/CR}$:

$$e^{\frac{t}{CR}}\frac{dV_{out}}{dt} + \underbrace{\frac{1}{CR}e^{\frac{t}{CR}}}_{\frac{d}{dt}(e^{t/CR})}V_{out} = e^{\frac{t}{CR}}\frac{1}{CR}V_s$$

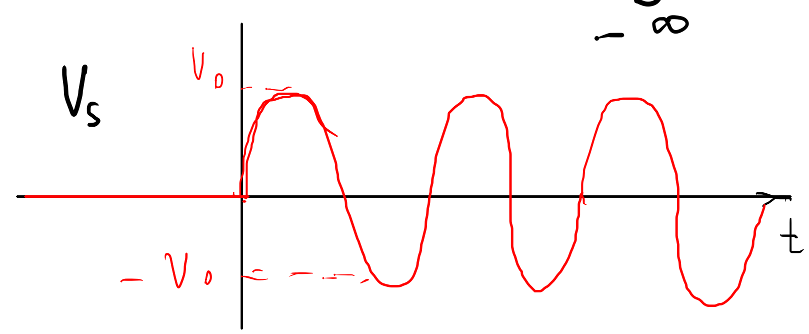
άρα $\dfrac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{CR}}V_{out}\right) = e^{\frac{t}{CR}}\dfrac{1}{CR}V_s \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{t}\frac{d}{d\tau}\left(e^{\frac{\tau}{CR}}V_{out}\right)d\tau = \int_{-\infty}^{t}e^{\frac{\tau}{CR}}\frac{1}{CR}V_s(\tau)d\tau \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{t}{CR}}V_{out} - \underbrace{\cancel{\lim_{t\to-\infty}e^{\frac{t}{CR}}V_{out}}}_{0} = \frac{1}{CR}\int_{-\infty}^{t}e^{\frac{\tau}{CR}}V_s\,d\tau$$

και $V_{out}(t) = \dfrac{1}{CR}e^{-t/CR}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}e^{\frac{\tau}{CR}}V_s(\tau)d\tau$

Αν V_s



δηλ. $V_s(t) = u(t)\cdot V_0\,\eta\mu(\omega t)$

Τότε $V_{out}(t) = \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{\tau}{CR}} u(\tau) V_0\, \eta\mu(\omega\tau)\, d\tau = \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}} \int_{0}^{t} e^{\frac{\tau}{CR}} V_0\, \eta\mu(\omega\tau)\, d\tau$

Το $\int_0^t e^{\frac{\tau}{CR}} \eta\mu(\omega\tau)\, d\tau$ το βρίσκουμε κάνοντας δύο φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες ($\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx \ldots$) και δίνεται

από τον τύπο:

$$\left.\frac{\frac{1}{CR} e^{\frac{\tau}{CR}} \eta\mu(\omega\tau)}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2}\right|_0^t - \left.\frac{\omega e^{\frac{\tau}{CR}} \sigma\upsilon\nu(\omega\tau)}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2}\right|_0^t = \frac{\frac{1}{CR} e^{\frac{t}{CR}} \eta\mu(\omega t)}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2} - \frac{\omega e^{t/CR} \sigma\upsilon\nu(\omega t)}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2}$$

Έτσι το

$$V_{out}(t) = \frac{V_0}{CR} \underbrace{\left[\frac{\frac{1}{CR}\, \eta\mu(\omega t)}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2} - \frac{\omega\, \sigma\upsilon\nu(\omega t)}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2} \right]}_{\text{αυτό το κομμάτι δεν μηδενίζεται}} + \boxed{\frac{V_0}{CR} \frac{\omega e^{-\frac{t}{CR}}}{\left(\frac{1}{CR}\right)^2 + \omega^2}}$$

μόνιμη απόκριση

αυτό το τμήμα του V_{out} μηδενίζεται μετά από λίγο (για $t \gg CR$)

μεταβατική απόκριση

Έχουμε την έκφραση

$$\frac{\alpha\, \eta\mu(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\omega\, \sigma\upsilon\nu(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \cdot \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \eta\mu(\omega t) - \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \sigma\upsilon\nu(\omega t) \right] \quad (1)$$

Θέτω $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} = \sigma\upsilon\nu\theta$

$\frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} = \eta\mu\theta$

αυτά μπορώ να τα κάνω γιατί τα $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} < 1$, $\frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} < 1$ και $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\right)^2 = 1$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\left[\text{ημ}(\omega t)\,\text{συν}\theta - \text{συν}(\omega t)\,\text{ημ}\theta\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\,\text{ημ}(\omega t-\theta)$$

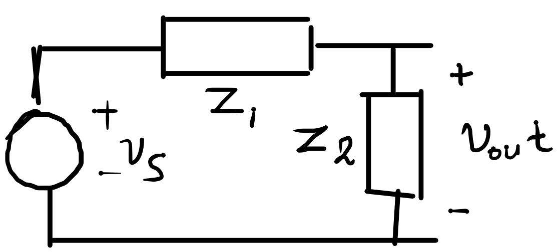
$\left\{ \text{ημ}(\alpha-\beta) = \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta \right\}$

Δηλαδή η μόνιμη απόκριση γράφεται: $\frac{V_0}{CR}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{CR}\right)^2+\omega^2}}\cdot\text{ημ}(\omega t-\theta) =$

$$\frac{V_0}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}\,\text{ημ}(\omega t-\theta)$$

Το θ έχει $\text{εφ}\theta = \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{\frac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{1/CR} = \omega CR$, $\quad a = \frac{1}{CR}$

Χρησιμοποιώντας τους μιγαδικούς αριθμούς μπορούμε να βρούμε την μόνιμη απόκριση πολύ πιο εύκολα:



$v_{out} = v_{in}\cdot\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$ (διαιρέτης τάσης) $\quad Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$

$v_{out} = v_{in}\cdot\frac{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)j\omega C}{\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)j\omega C} = v_{in}\frac{1}{1+j\omega CR}$ $\qquad v_{in} = V_0\, e^{j(\omega t-\frac{\pi}{2})}$

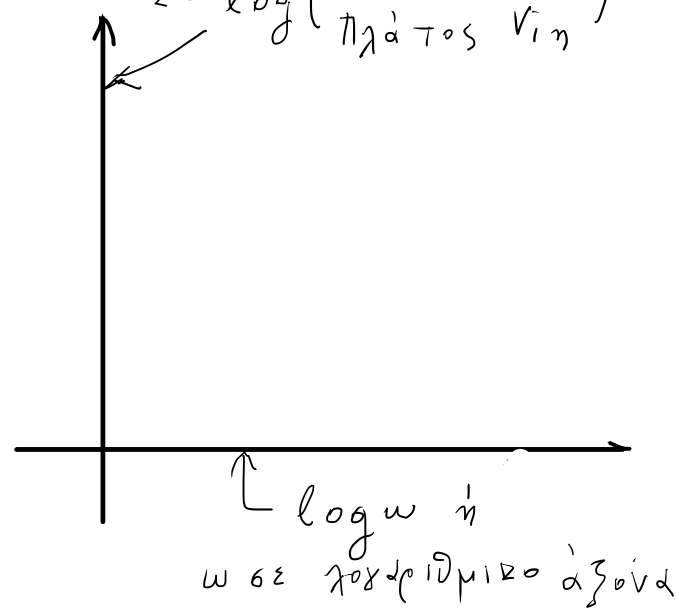
Το $1+j\omega CR = \rho e^{j\phi}$ με $\rho = \sqrt{1+\omega^2C^2R^2}$ και $\phi = \text{τοξεφ}(\omega CR)$

άρα $v_{out} = \frac{V_0\, e^{j(\omega t-\pi/2)}}{\rho e^{j\phi}} = \frac{V_0}{\rho}e^{j(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi)}$ δηλ. $v_{out} = \frac{V_0}{\rho}\,\text{συν}\left(\omega t-\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \Rightarrow$

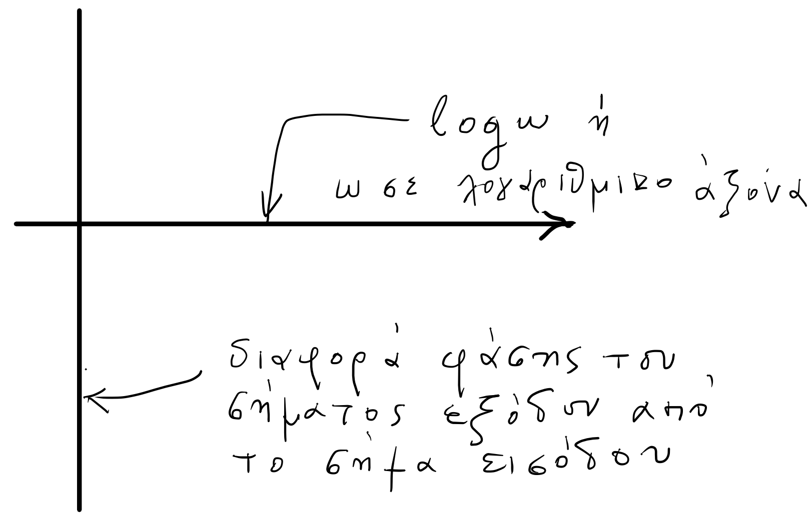
$$v_{out} = \frac{V_0}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}\,\text{ημ}(\omega t-\varphi)$$

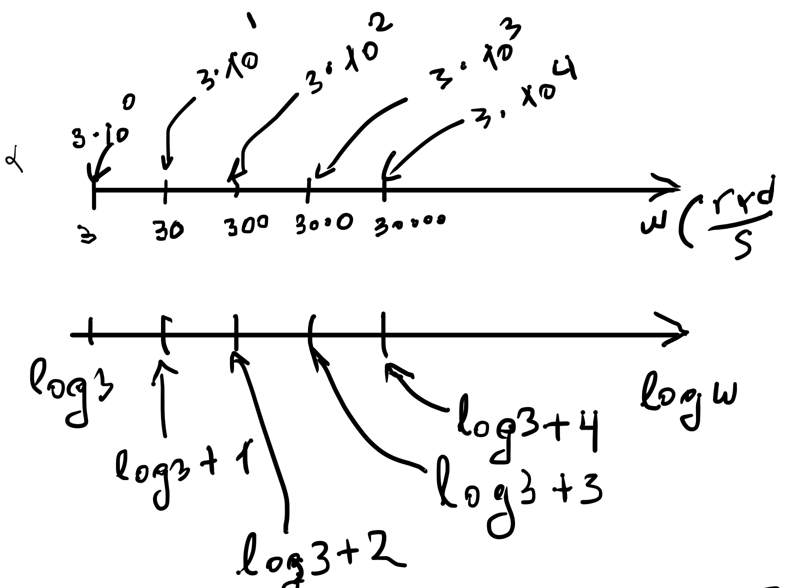
Φτιάχνουμε τα διαγράμματα Bode που δείχνουν:

Διάγραμμα Bode πλάτους

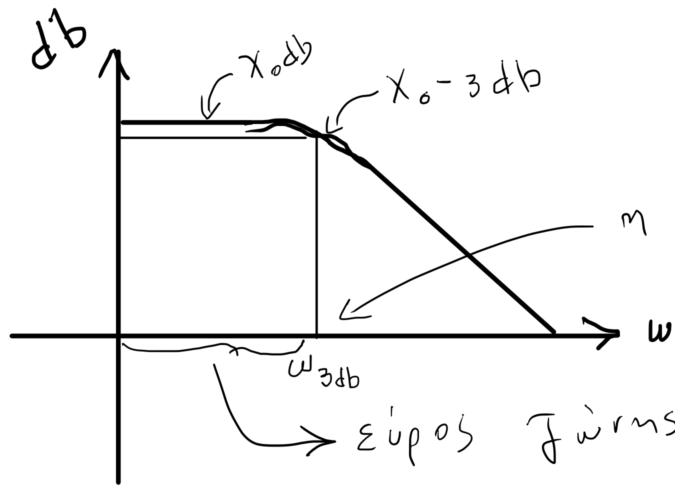


Διάγραμμα Bode Φάσης





$$X_{db(decibel)} = 20\log\left(\frac{\text{Πλάτος } V_{out}}{\text{Πλάτος } V_{in}}\right) = 10\log\left(\frac{\text{Πλάτος}^2\ V_{out}}{\text{Πλάτος}^2\ V_{in}}\right) = 10\log\left(\frac{\text{Ισχύς σήματος εξόδου}}{\text{Ισχύς σήματος εισόδου}}\right)$$



εύρος ζώνης (Bandwidth)

η συχνότητα για την οποία η ισχύς του σήματος εξόδου είναι το $\frac{1}{2}$ της ισχύος του σήματος εισόδου!

$$-3 = 10\log X \Rightarrow -\frac{3}{10} = \log X \Leftrightarrow 10^{-0.3} = X \Leftrightarrow$$
$$X \simeq 0.5$$