

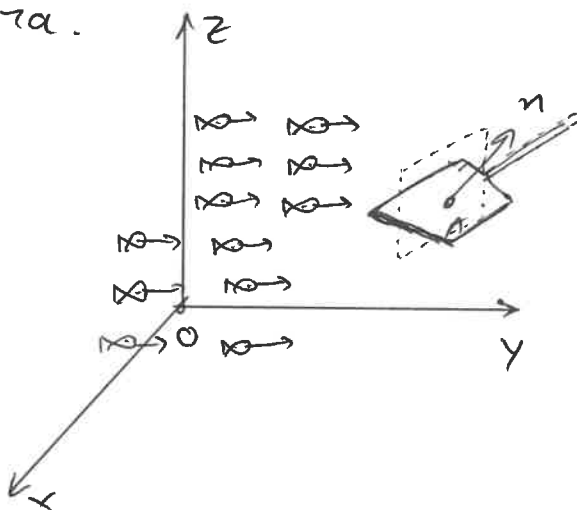
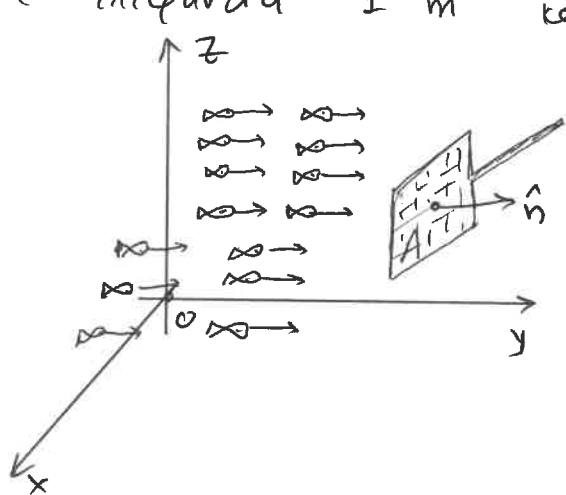
Ηλεκτρική Ροή

Για να κατανοήσουμε την έννοια της ροής ας φανταστούμε ότι μέσα σε δάλασσα υπάρχει μια πυκνότητα ψαριών  $\rho \left( \frac{\# \text{ψαριών}}{\text{m}^3} \right)$

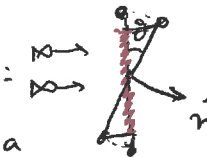
και ότι τα ψάρια αυτά κινούνται με ταχύτητα  $\vec{v} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$ . Τότε μπορούμε να ορίσουμε το διανυσματικό πεδίο  $\vec{F} = \rho \cdot \vec{v}$ ,

το οποίο έχει μονάδες  $|\vec{F}| = \left( \frac{\# \text{ψαρία}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = \left( \frac{\# \text{ψαρία}}{\text{m}^2 \text{s}} \right)$

Μου δείχνει δηλαδή πόσα ψάρια διαπερνούν κάθε second μια επιφάνεια  $1 \text{ m}^2$  κάθετα.



Αν βάλουμε μια ανοχτή εμβαδού  $A$  κάθετα σε ροή των ψαριών θα πιάσουμε ψάρια με ρυθμό:  $|\vec{F}| \cdot |\vec{A}| = \left( \frac{\# \text{ψαρία}}{\text{m}^2 \text{s}} \right) \cdot (\text{m}^2) = \left( \frac{\# \text{ψαρία}}{\text{s}} \right)$

Αν βάλουμε την ανοχτή υπό γωνία  $\theta$  : , τότε η επιφάνεια από την οποία περνούν κάθετα τα ψάρια θα έχει εμβαδό:  $A \cos \theta \Rightarrow$  θα πιάνουμε ψάρια με ρυθμό:

$$|\vec{F}| |\vec{A}| \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{A}$$

Επομένως εάν ορίσουμε την επιφάνεια της ανίχνυσης -2- ως ένα διανυσματικό πεδίο  $\vec{A} = |\vec{A}| \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια, τότε η ροή των φορτίων θα δίνεται από την σχέση:

$$\Phi = \vec{F} \cdot \vec{A}$$

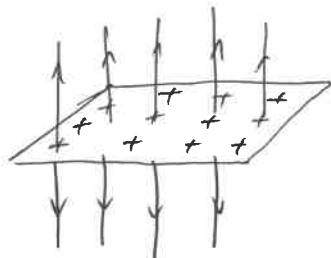
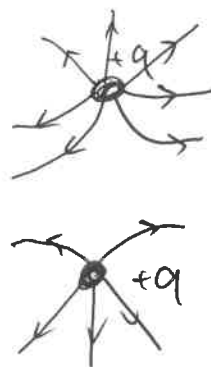
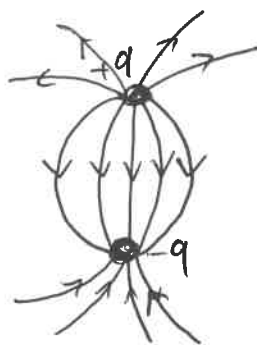
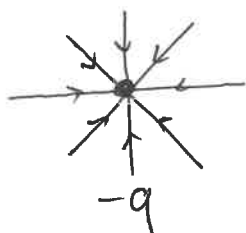
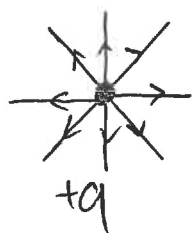
Αν  $\vec{F} \parallel \vec{A}$  μέγιστη αριθμός φορτίων

Αν  $\vec{F} \perp \vec{A}$  κανένα φορτίο (τηλεμετρική ροή).

## Δυναμικές Γραφτές Ηλεκτρικού πεδίου

Δυναμικές γραφτές ηλεκτρικού πεδίου είναι οι γραφτές στις οποίες το άνωμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  είναι εφαπτόμενο.

- Η πυκνότητα των γραμμών  $\sim |\vec{E}|$  (μέτρο του πεδίου)
- Οι δυναμικές γραφτές ξεκινούν από θετικό και καταλήγουν σε αρνητικό.



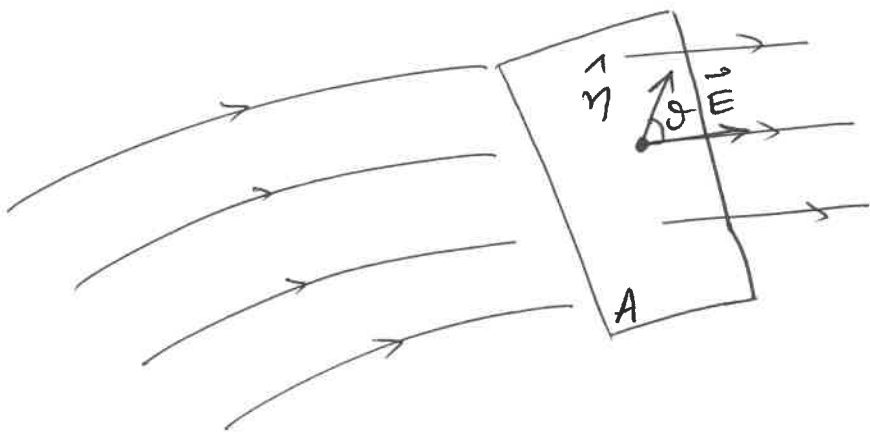
ΠΡΟΣΟΧΗ: Σε αυτή την εικόνα ορίζεται ότι  $|\vec{E}| =$  αριθμός δυναμικών γραμμών που διαπερνούν την μονάδα επιφάνειας κάθετως.

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε και για το ηλεκτικό -3-  
 πεδίο  $\vec{E}$  την ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας επιφάνειας  
 στοιχειώδους  $d\vec{a}$  ως:  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{a} = |\vec{E}| |d\vec{a}| \cos \theta$   
 και που δείχνει το πλήθος των <sup>δυναμικών</sup> γραμμών που διαπερνούν  
 την επιφάνεια αυτή.

\* { Ηλεκτρική ροή σε μια επιφάνεια = αριθμός }  
 \* { των γραμμών του πεδίου που τέμνονται από την }  
 επιφάνεια }

ή  
 \* { Το ηλ. πεδίο = αριθμός δυν. γραμμών / μονάδα επιφάνειας } \*

Για ομαία επιφάνεια έχουμε:



$$\vec{E}$$

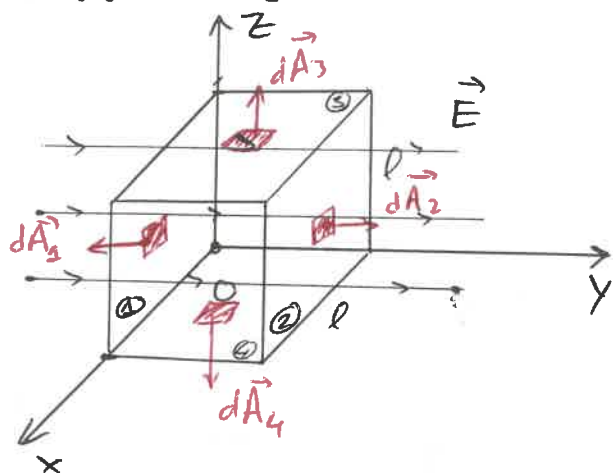
$$\Phi_E = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

, Ροή ηλεκτρικού πεδίου για  
 οποιαδήποτε επιφάνεια.

ή (λόσοι δυναμικές γραμμές περνούν την  
 επιφάνεια)

Παράδειγμα: Δίνεται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = E_y \hat{y}$ .

Να βρείτε τη ροή  $\Phi_E$ , από κάθε μια πλευρά του κύβου πλευράς  $l$  του σχήματος.



Σχόλιο: Σε κλειστά σχήματα (όγκους) το διάνυσμα της ηλεκτρικής διαρροής προς τα έξω.

Απάντηση:

Πλευρά 1:  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = E_y \hat{y} \cdot dx dz (-\hat{y})$   
 $= E_y dx dz \hat{y} \cdot (-\hat{y})$   
 $= -E_y dx dz$

$\Rightarrow \Phi_{1E} = \int_0^l \int_0^l -E_y dx dz = -E_y l^2$

Πλευρά 2:  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = E_y \hat{y} \cdot dx dz \hat{y}$   
 $= E_y dx dz$

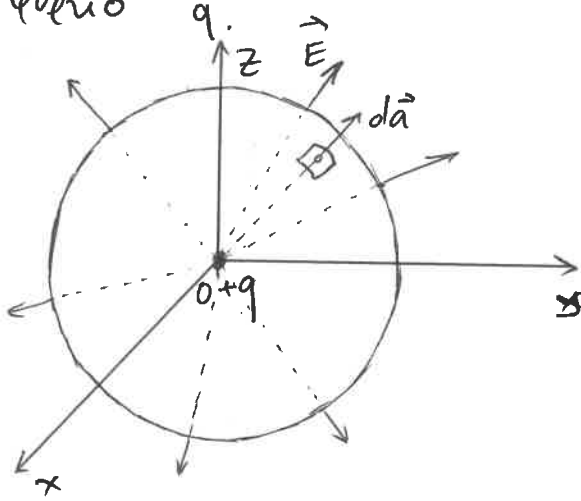
$\Rightarrow \Phi_{2E} = \int_0^l \int_0^l +E_y dx dz = E_y l^2$

Πλευρά 3:  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = E_y \hat{y} \cdot dx dy \hat{z} = E_y dx dy \hat{y} \cdot \hat{z}$

$= 0$

Ομοίως θα όδης ως άδην.  $\Phi_{4E} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots = 0$  κλειστό  
εμβαδόν  
πάντα 0

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε την ηλεκτρική ροή διαφύσου -5- σφαίρας ακτίνας  $R$ , στο κέντρο της οποίας βρίσκεται σημειακό φορτίο  $q$ .



Απάντηση:

Από τον νόμο Coulomb γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί φορτίο  $q$  συν αρχή των αξόνων είναι:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{r}, \text{ σε κάθε σημείο του χώρου.}$$

Το εμβαδό στοιχειώδους επιφάνειας πάνω στη σφαίρα είναι:

$$d\vec{a} = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r}$$

Επομένως η στοιχειώδης ροή είναι:  $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{a}$

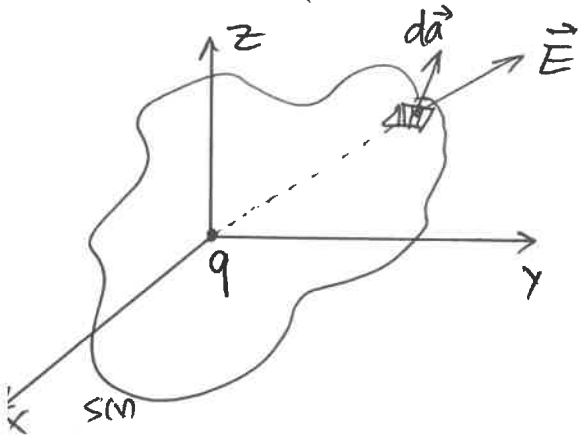
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \hat{r} \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r}$$

$$\Rightarrow d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow \Phi_{\text{ολ}} = \oint_{\text{σφ}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{\text{ολ}} = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Παρατήρηση: Ας κάνουμε τον ίδιο υπολογισμό για καεριο συν αξι των αξόνων  $q$ , το οποίο θα βρίσκεται εντός τυχαίας νοητής επιφάνειας.



Ομοίως  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την ροή  $\Phi = \oint_{SCN} \vec{E} \cdot d\vec{a}$  πρέπει να διαλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων να περιγράψουμε το στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας. Λόγω σφαιρικής συμμετρίας του  $\vec{E}$  διαλέγουμε σφαιρικές.

$$d\vec{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r} + r \sin\theta dr d\varphi \hat{\theta} + r d\theta dr \hat{\varphi}$$

τότε:  $\vec{E} \cdot d\vec{a} = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r} \right) \cdot \left( r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r} + r \sin\theta dr d\varphi \hat{\theta} + r d\theta dr \hat{\varphi} \right)$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \text{ αφού } \begin{cases} \hat{r} \cdot \hat{r} = 1 \\ \hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0 \\ \hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Επομένως:  $\Phi = \oint_{SCN} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot 1 \cdot 1$

Λογικό, αφού το ίδιο νόηδος διακριτών βγαίνει ανεξαρτήτως επιφάνειας

## Νόμος του Gauss

- 7 -

$$\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{εγκλ.}}}{\epsilon_0}$$

Όπου:  $S(V) \equiv$  Επιφάνεια  $S$  που περιέχει όγκο  $V$

$Q_{\text{εγκλ.}} \equiv$  Το συνολικό φορτίο που βρίσκεται εγκλεισμένο στον όγκο που περιέχει η επιφάνεια.

**\*\*** Ο Νόμος του Gauss χρησιμοποιείται για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  από κατανομές φορτίου, όταν υπάρχει κάποια συμμετρία στο σύστημα. **\*\***

### Εφαρμογές Νόμου Gauss

ΣΟΣ

Για να χρησιμοποιήσουμε το Ν. Gauss εφαρμόσαμε ως εξής:

Βήμα 1: Εντονίζουμε εάν υπάρχει συμμετρία στη κατανομή και διαλέγουμε με βάση τη συμμετρία μια κατάλληλη βοηθητική επιφάνεια, η οποία καλείται επιφάνεια Gauss.

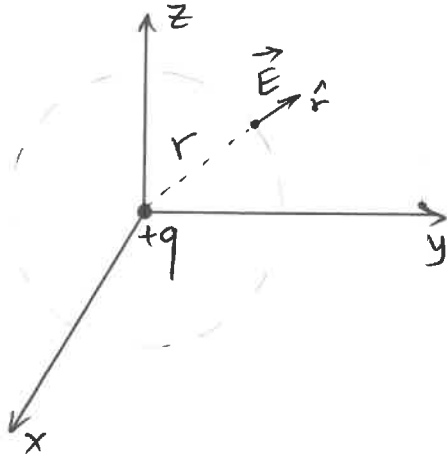
Βήμα 2: Από Ν. Gauss με άγνωστο το μέγεθος  $|\vec{E}|$

παίρνουμε:  $\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{a} = |\vec{E}| \cdot A = q/\epsilon_0$   
↳ εμβαδόν επιφάνειας Gauss

Βήμα 3: Λύνουμε ως προς  $|\vec{E}| = \dots$

Εφαρμογή 1: Να δείτε χρησιμοποιώντας τον Ν. Gauss -8-

το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί σημειακό φορτίο.



Αφού στο πρόβλημα υπάρχει σφαιρική συμμετρία διαλέγουμε μια σφαίρα ως επιφάνεια Gauss, ακτίνας  $r$ .

Έτσι υποδιόμαστε ότι  $\vec{E} = |E| \hat{r}$ ,  $d\vec{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ .

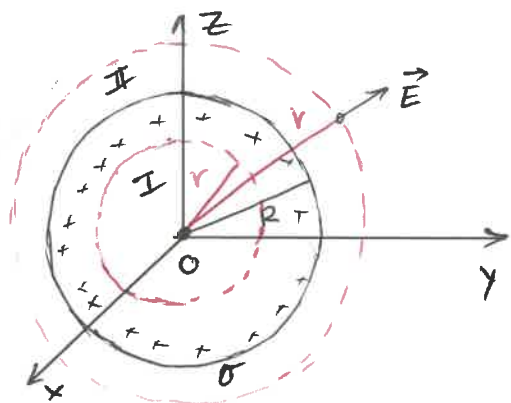
$$\text{Άρα το } \oint_{\text{env}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \underbrace{(|E|)}_{\text{μίσο}} \cdot \underbrace{(4\pi r^2)}_{\substack{\text{εμβατό} \\ \text{επιφάνειας} \\ \text{σφαίρας}}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \text{ το μίσο του ηλεκτρικού πεδίου}$$

$$\text{και άρα } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}$$



Εφαρμογή 2: Να βρούμε το  $\vec{E}$  από επιφανειακή κατανομή  $\sigma$  φορτίου σε σφαίρα ακτίνας  $R$ .



Απάντηση: Εδώ υπάρχει σφαιρική συμμετρία, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρική νοητή επιφάνεια Gauss. Το  $\vec{E} = |\vec{E}| \hat{r}$ . Έχουμε δύο περιοχές που πρέπει να εξεταστούμε τον Ν. Gauss για να βρούμε το  $\vec{E}$ .

Περιοχή Ι:  
(Μέσα)

$$\oint_{\text{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{εγκλ.}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2 = 0, \quad \text{Δεν έχουμε φορτία μέσα στη σφαιρική επιφάνεια Gauss}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 0, \quad 0 < r < R$$

Περιοχή ΙΙ:  
(Έξω)

$$\oint_{\text{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{εγκλ.}}}{\epsilon_0}$$

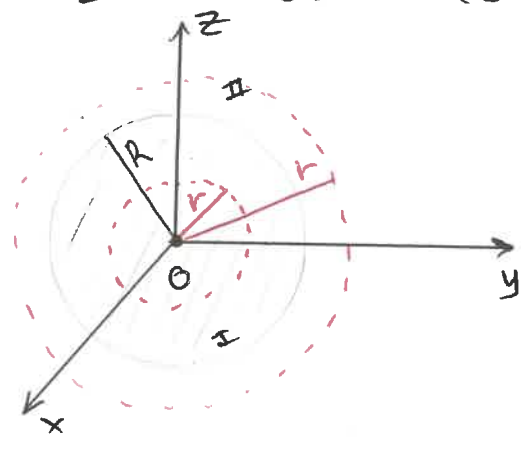
$$\Rightarrow |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Συνολικά:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & 0 < r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}, & r > R. \end{cases}$$

Εφαρμογή 3: Σφαίρα ακτίνας  $R$  φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $Q$ . Να υπολογιστεί το  $\vec{E}$  σε όλο το χώρο.



Αρα έχουμε χωρική κατανομή ομοιόμορφη:  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Απάντηση: Θα εφαρμόσουμε τον Ν. Gauss για και έξω από τη σφαίρα χρησιμοποιώντας νομική σφαιρική επιφάνεια.

Περιοχή II:  
(Έξω)

$$\oiint_{\text{scm}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{εμπ}}}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}, \quad r > R.$$

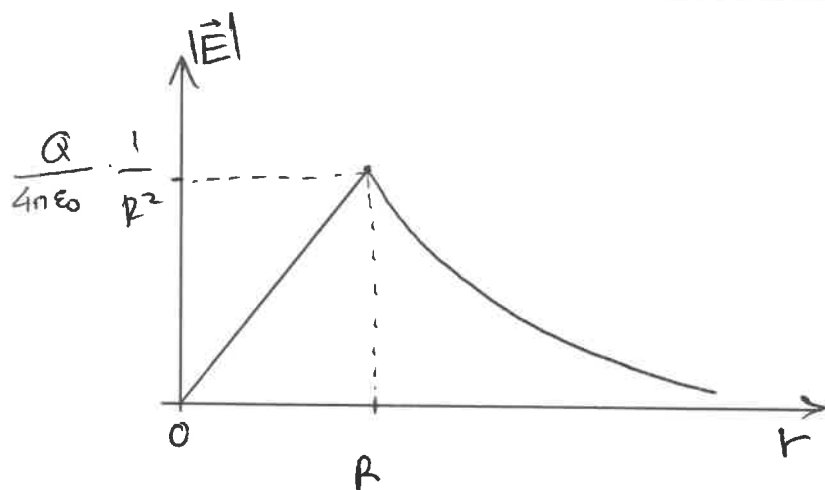
Περιοχή I:  
(Μέσα)

$$\oiint_{\text{scm}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{εμπ}}}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} \hat{r}, \quad 0 < r < R$$

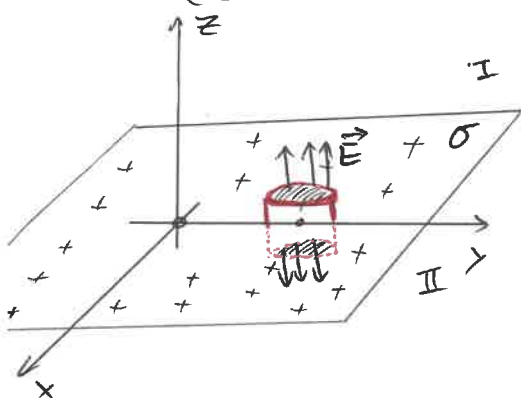
Συνεπώς:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} \hat{r} & , 0 \leq r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r} & , r \geq R. \end{cases}$$

-11-



Εφαρμογή 4: Να βρείτε το πεδίο  $\vec{E}$  σε όλο το χώρο που δημιουργείται από άπειρη επιφάνεια με ομοιόμορφη κατανομή.



Ανάλυση: Έχουμε δύο περιοχές πάνω και κάτω από την επιφάνεια:

Από αυτήν είναι το  $\vec{E} = |E| \hat{z}$  πάνω και  $\vec{E} = -|E| \hat{z}$  κάτω.

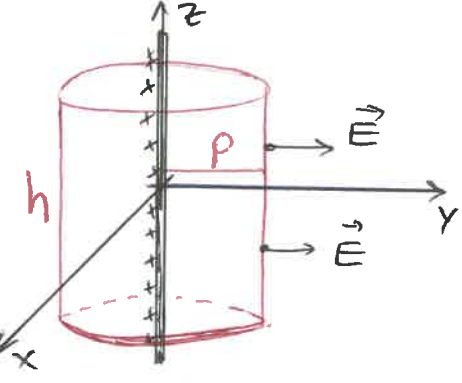
Εφαρμόζουμε το Ν. Γαους, για τον κύβινδρο <sup>ακτίνας ρ</sup> του σχήματος.

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \underbrace{|E| \cdot \pi \rho^2}_{\text{πάνω εon}} + \underbrace{|E| \pi \rho^2}_{\text{κάτω εon}} = \frac{\sigma \cdot \pi \rho^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & , z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & , z < 0 \end{cases}$$

Εφαρμογή 5: Να βρείτε το μακροπρόθεσμο πεδίο  $\vec{E}$  που δημιουργείται από άπειρο φορτισμένο σύρμα γραμμικής πυκνότητας  $\lambda$ .



Απόδειξη:

Από συμμετρία κυλινδρική που υπάρχει στο πρόβλημα, διαλέγουμε κύλινδρο ως επιφάνεια Gauss ακτίνας  $\rho$ , ύψους  $h$ .

Οπότε:

$$\oiint_{S_{\text{cyl}}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| \cdot 2\pi\rho h = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0}$$

\* Οι δάσεις έχουν ροή 0 αφού  $\vec{E} \perp \hat{n}$  στις βάσεις.  
(πάνω και κάτω)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \hat{\rho}}$$