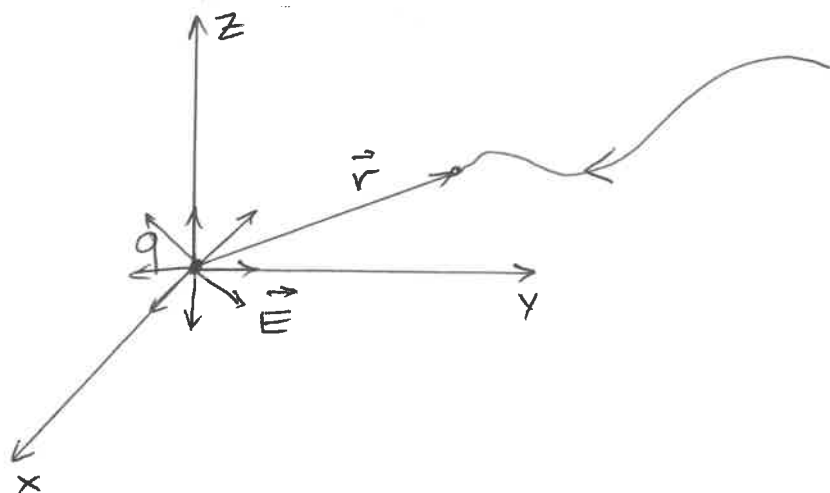


Το ηλεκτρικό δυναμικό V

Ως ηλεκτρικό δυναμικό V ορίζεται το έργο ανά μονάδα φορτίου που απαιτείται για τη μετακίνηση από κάποιο (αυθαίρετο) σημείο σε σημείο $\vec{r}$ του χώρου, δοκιμαστικό φορτίο q .
 Η ισοδύναμη είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου.

$$V = \frac{W_{p \rightarrow \vec{r}}}{q} = - \int_p^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{Μονάδες: } \frac{J}{C} \left(\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} \right)$$

- Ισχύει: $\Delta U = q\Delta V$.
- Ποτέ δεν μετράμε το δυναμικό V , από που μετράμε είναι η διαφορά δυναμικού ΔV . Και από πού στο V υπάρχει η αυθαίρεση του από που μετράμε.
- Στις περισσότερες περιπτώσεις διαλέγουμε ως σημείο αναφοράς το άπειρο ($r \rightarrow \infty$), όπου εάν έχουμε χωρικά εντατισμένα κατανόσεις $V \rightarrow 0$. Οπότε το $V(\vec{r})$ είναι ως προς το άπειρο.
- Σε κάποιες περιπτώσεις ανώς θέτουμε κάποιο σημείο (π.χ. στο m) όπου θεωρούμε $V=0$ και μετράμε τις διαφορές από αυτό.



Για να υπολογίσουμε το δυναμικό σε διατ $\vec{r}$, αφού έχουμε ενσωματωμένη κατανομή (ένα φορτίο) διαλέγουμε το $P \rightarrow \infty$.

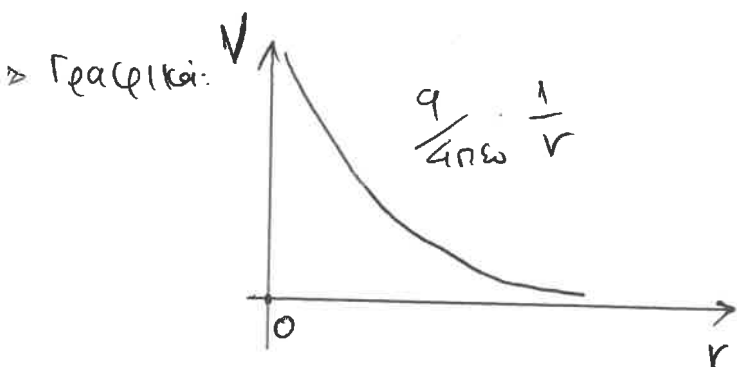
Συνεπώς το δυναμικό σημειακού φορτίου θα είναι:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r'^2} dr' = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r$$

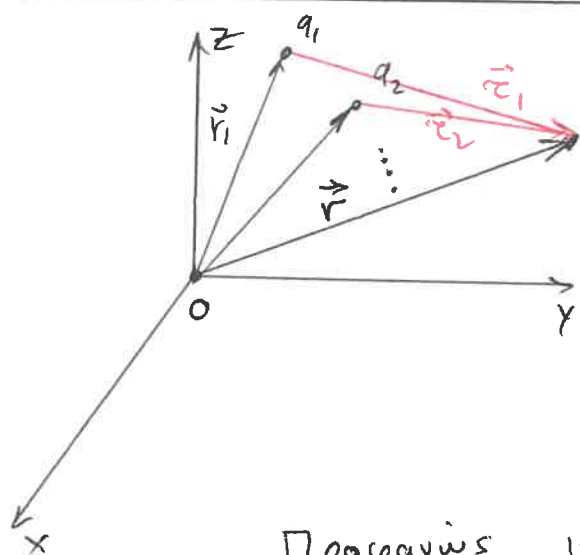
$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}} \quad \leftarrow \text{Εξαρτάται μόνο από την απόσταση } r \text{ από το φορτίο } q. \text{ (Όχι από } \mu\text{νικς).}$$

► Η διαφορά δυναμικών μεταξύ $\vec{r}_A$ και $\vec{r}_B$ θα είναι:

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$



1) Δυναμικό διακριτής κατανομής φορτίων (q_i)



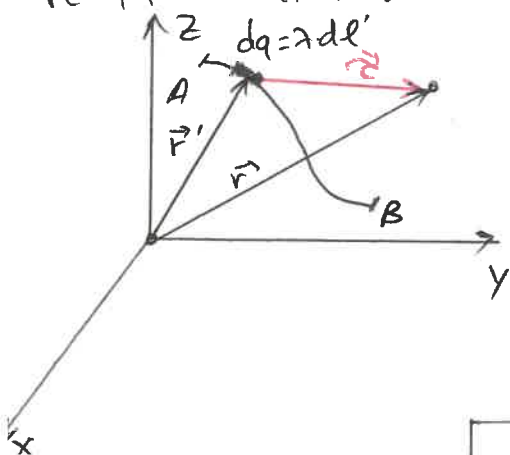
$$V(P) = \underbrace{\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}}_{V_1} \frac{1}{r_1} + \underbrace{\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}}_{V_2} \frac{1}{r_2} + \dots$$

$$\Rightarrow V_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad \text{ΒΑΘΜΕΤΟ!}$$

Προφανώς ισχύει η αρχή της επαλληλίας, επομένως το δυναμικό συν $\vec{r}$ είναι το άθροισμα των δυναμικών από το κάθε φορτίο ξεχωριστά.

2) Γραμμική κατανομή φορτίου (λ)

Σε μια γραμμή στο χώρο υπάρχει καταμετρημένο φορτίο με γραμμική πυκνότητα $\lambda = dq/d\ell$ (C/m)



Κάθε κομμάτι έχει φορτίο $dq = \lambda dl$ και δημιουργεί δυναμικό:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

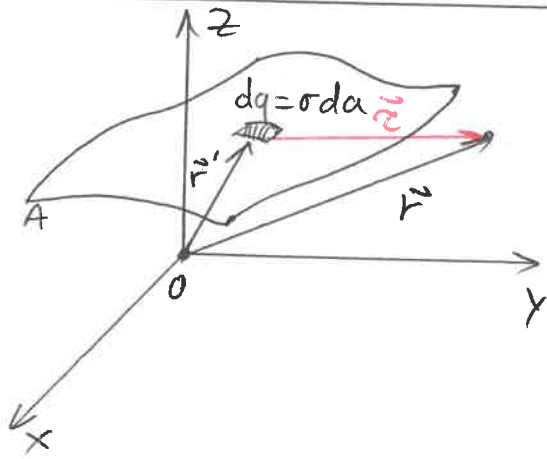
Οπότε:

$$V(\vec{r}) = \int_A^B \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

↑
ΒΑΘΜΕΤΟ!

, με: $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$
 $dl = |d\vec{r}'|$

3] Επιφανειακή κατανομή φορτίου (σ)

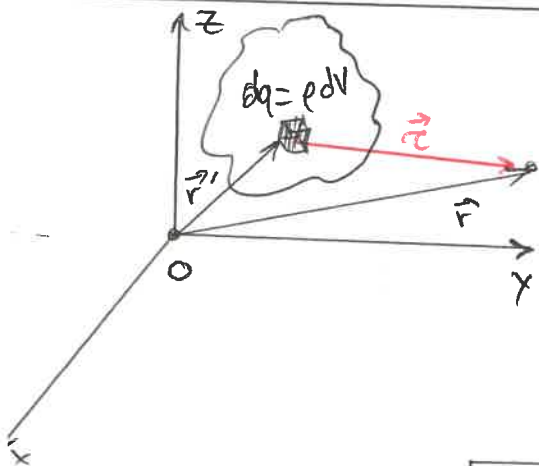


Το κάθε κομμάτι της επιφάνειας
είναι φορτίο $dq = \sigma da$ και δημιουργεί
σε θέση $\vec{r}$ ένα στοιχειώδες δυναμικό.

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\sigma da}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \iint_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma da}{r} \quad \text{ΒΑΘΜΟ 70!}$$

4] Χωρική κατανομή φορτίου (ρ)



Το κάθε κομμάτι του όγκου
είναι φορτίο $dq = \rho dV$ και δημιουργεί
σε θέση $\vec{r}$ ένα στοιχειώδες δυναμικό

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \quad \text{ΒΑΘΜΟ 70!}$$

Σχόλιο: Οι παραπάνω εκφράσεις είναι δύσκολες
για τον υπολογισμό του δυναμικού V . Θα δούμε αργότερα
παραγωγές που δίνονται. Στιγμές υπολογίζονται με άλλες
τεχνικές (εξ. Poisson θα δείτε σε άλλα μαθήματα)

Υπολογισμός του $\vec{E}$ από το V .

-5-

Είδαμε από τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού

ότι:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow \int_A^B dV = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow - \int_A^B dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow -dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (\text{καρτεσιανός})$$

$$\Rightarrow -dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (1)$$

Όπως συμφωνούμε ότι το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης

$V(x, y, z)$ θα είναι:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

Αν τα γράψουμε ως διάνυσμα:

$$\boxed{\vec{E} = - \vec{\nabla} V} \quad \leftarrow \text{ΔΙΑΝΥΣΜΑ!}$$

Όπου η κλίση ορίζεται ως

$$\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right)$$

Ασκήσεις υπολογισμού του δυναμικού V

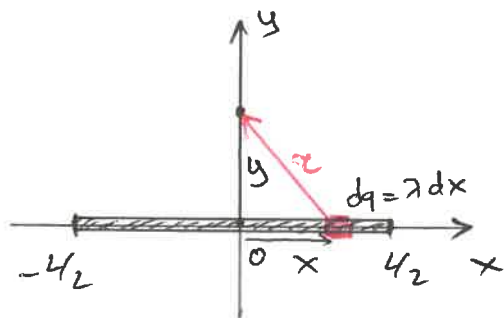
-6-

- 1^ο Γίδος: Εάν γνωρίζετε την κατανομή και υπολογίζετε το V απευθείας από την κατανομή.

$$V = \iiint_V \frac{\rho dz}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- 2^ο Γίδος: Εάν έχετε εκεί το $\vec{E}$ και από εκεί υπολογίζετε το $V = - \int_P^r \vec{E} \cdot d\vec{\rho}$

Άσκηση 1: Να βρείτε το δυναμικό V σε απόσταση y από το μέσο ενός ομογενούς αγωγού μήκους L που φέρει ομοιόμορφα καταγενημένο φορτίο Q. ($\lambda = Q/L$)



Απάντηση:

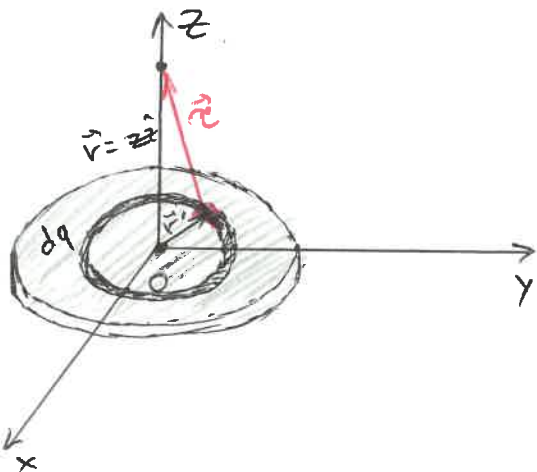
$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow V(y) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \quad \begin{array}{l} x = y \tan \theta \\ dx = y \sec^2 \theta d\theta \\ \text{από اینجا} \\ \text{δοκεί} \end{array} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$\Rightarrow V(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\frac{L}{2} + \sqrt{(\frac{L}{2})^2 + y^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{(\frac{L}{2})^2 + y^2}} \right]$$

Ελέγξτε ότι παύεται: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 y \sqrt{(\frac{L}{2})^2 + y^2}}\hat{y}$

Άσκηση 2: Δίσκος ακτίνας R φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή σωματικού φορτίου Q . Να βρείτε το δυναμικό V σε απόσταση z από τον άξονα. ($\sigma = Q/\pi R^2$)



Αξιολογείτε την κυλινδρική αλληλεία και βρείτε το δυναμικό σε διαμ z που οφείτεται σε δακτύλιο πάχους dr' , ίσο με $dq = \sigma 2\pi r' dr'$. Έτσι θα το δυναμικό που οφείτεται σε αυτό το dq έχουμε:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\sigma 2\pi r' dr'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r'^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow V(z) = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} dr' \xrightarrow[\substack{\text{Θέτουμε} \\ u = r'^2 + z^2 \\ du = 2r' dr'}]{\text{}} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2 + z^2} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{2}$$

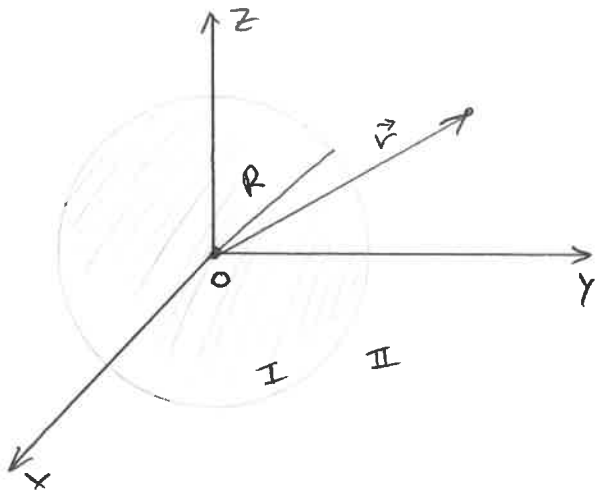
$$\Rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{u} \right]_{z^2}^{R^2+z^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2+z^2} - z \right] \quad -8-$$

Επομένως:

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2+z^2} - z \right]$$

και ελέγχουμε ότι ισχύει: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right] \hat{z}$

Άσκηση 3: Σφαίρα ακτίνας R φέρει ομοιόμορφο φορτίο Q ομοιόμορφα κατανοημένο στον όγκο της. Να βρείτε το δυναμικό V σε όλο το χώρο.



Απάντηση:

Σε αυτή την άσκηση θα υπολογίσουμε το V χρησιμοποιώντας το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ που δίνεται από αντιστοιχία άσκησης:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} \hat{r}, & 0 \leq r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}, & r \geq R \end{cases}$$

Έχουμε δύο περιοχές στο πρόβλημα, μία και έξω από τη σφαίρα. -3-

$$V = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Σχόλιο: Επιλέγουμε ως σημείο αναφοράς το ∞ , αφού έχω εντονισμένα φορτία και $\vec{E} \rightarrow 0$ στο άπειρο.

Έξω ($r \geq R$):

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E \cdot dr = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Μία ($0 \leq r \leq R$):

$$V(r) = - \left[\int_{\infty}^R E dr + \int_R^r E dr \right]$$

$$= - \int_{\infty}^R E dr - \int_R^r E dr$$

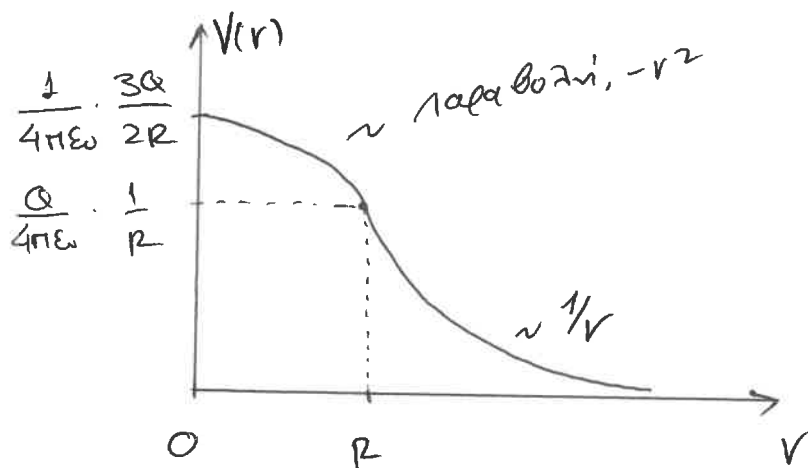
$$= + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} - \int_R^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'}{r'^3} dr'$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_R^r$$

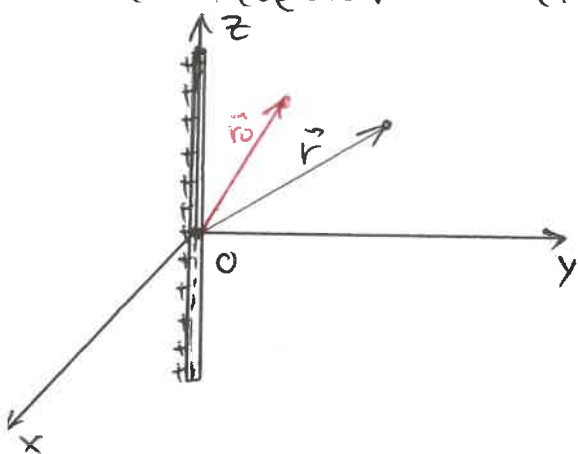
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{2R} \right)$$

Οπότε:

$$V(r) = \begin{cases} + \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2R^3} r^2, & 0 \leq r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, & r \geq R. \end{cases}$$



Άσκηση 4: Να βρεθεί το δυναμικό V που δημιουργείται από
 ένα γραμμικό αέρα πυκνότητας λ (C/m).



Έχουμε λοιπόν ότι $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \hat{e}$.

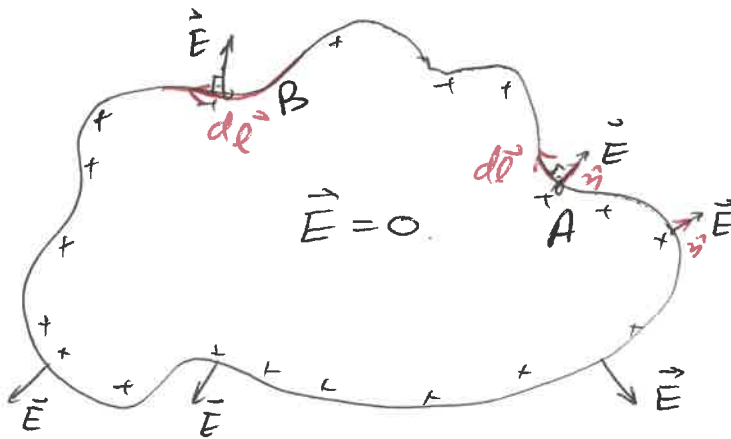
Εδώ η κατανομή φορτίου εκτείνεται ως το άπειρο, οπότε
 διαλέγουμε αυθαίρετο σημείο ρ_0 ως σημείο αναφοράς για το
 δυναμικό.

$$\begin{aligned}
 V &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \hat{e} \cdot (d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}) \\
 &= - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho'} d\rho' = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \rho' \right]_{\rho_0}^{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\rho_0}{\rho} \right]
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Σχόλιο: Εάν διαλέγατε ως σημείο αναφοράς το $r_0 \rightarrow \infty$ θα είχατε $V \rightarrow \infty$! Άρα, επιλέγουμε διαλέγουμε ένα αυθαίρετο $r = r_0$ ως σημείο αναφοράς για το οποίο προφανώς $V(r_0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_0}\right) = 0$.

Δωαδικό σε επικράνεια αγωγού

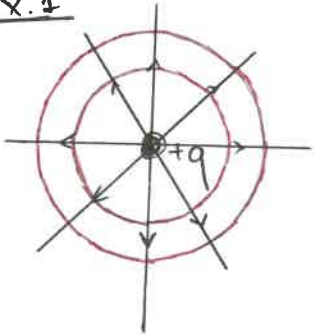
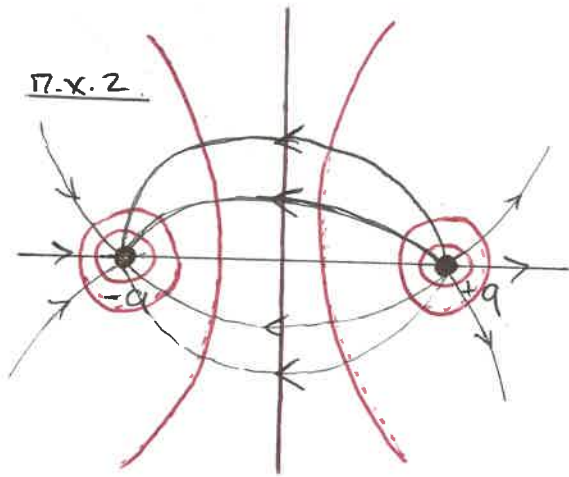
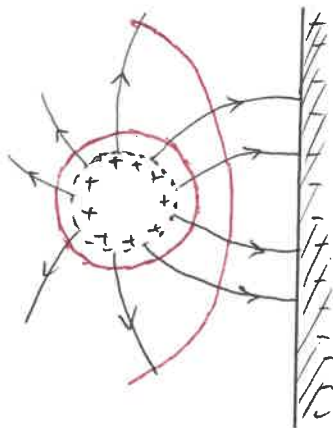


► Το δωαδικό πάνω στην επικράνεια του αγωγού (και μέσα) είναι σταθερό. Προφανώς αφού ισχύει ότι $\vec{E} \nparallel \hat{n}$, όπου $\hat{n}$ διάνυσμα κάθετο στην επικράνεια, ή $\vec{E} \perp$ επικράνεια.

$$\Rightarrow V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = 0 \Rightarrow V_B - V_A = 0 \Rightarrow V_B = V_A$$

► Αγωγοί = Ισοδωαδικές επικράνεις.

- Ισοδυναμικές Επιφάνειες = Επιφάνειες όπου $V = \text{σταθ.}$
- Εάν ένα φορτίο κινείται πάνω στις ισοδυναμικές επιφάνειες ΔΕΝ παύει έργο.
- $\vec{E} \perp$ ισοδυναμικές επιφάνειες
- ⇒ Δυναμικές γραμμές $\perp$ ισοδυναμικές επιφάνειες.

π.χ. 1π.χ. 2π.χ. 3

Το παρακάτω σχήμα συνοψίζει όλα τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν στην ηλεκτροστατική και πηλ από το ένα περνάμε στο άλλο.

