

Ασκήσεις

Φυσική Περιβάλλοντος

Δρ. Δήμητρα Παπαδάκη



National and Kapodistrian
University of Athens

*Department of Agricultural Development,
Agrofood and Management of Natural Resources*

Άσκηση 1

- 1 (B) Compute the first and second derivatives of the function $f(x) = x e^x \ln x + x^3 \sin x$.

Solution

The function $f(x)$ is defined on $(0, +\infty)$ and has derivatives of all orders on this interval. The first derivative is

$$f'(x) = e^x \ln x + x e^x \ln x + e^x + 3x^2 \sin x + x^3 \cos x,$$

while the second derivative is

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + e^x \ln x + x e^x \ln x + x \frac{e^x}{x} + e^x + 6x \sin x \\ &\quad + 3x^2 \cos x + 3x^2 \cos x - x^3 \sin x \\ &= (x + 2) e^x \ln x + \left(\frac{1}{x} + 2 \right) e^x + x (6 - x^2) \sin x + 6x^2 \cos x. \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Πώς κατανέμεται το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα;

- – ραδιοκύματα
- – μικροκύματα
- – υπέρυθρη ακτινοβολία
- – ορατό φως
- – υπεριώδες φως
- – ακτίνες X
- – ακτίνες γ

Άσκηση 3

Η ενέργεια της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας συχνά μετριέται σε eV και το αντίστροφο μήκος κύματος σε cm^{-1} . Δείξτε ότι το 1 cm^{-1} είναι ισοδύναμο με $1,24 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$.

$$\text{Έχουμε, } c = \lambda \nu$$

$$E = h\nu,$$

$$E = hc/\lambda$$

Έχω ότι

$$1 \text{ eV} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Άσκηση 4

Ποιες είναι οι διάφορες μορφές ιοντίζουσας ακτινοβολίας; Ποια είναι η φύση και προέλευση;

Μη ιοντίζουσες είναι οι ηλεκτρομαγνητικές ακτινοβολίες σε συχνότητες που μεταφέρουν σχετικά μικρή ενέργεια, μη ικανή να προκαλέσει ιοντισμό, ικανή όμως να προκαλέσει ηλεκτρικές, χημικές και θερμικές επιδράσεις στον οργανισμό, που μπορούν να αποβούν άλλοτε επιβλαβείς και άλλοτε ευεργετικές για τη λειτουργία του.

Ιοντίζουσες είναι οι ακτινοβολίες που μεταφέρουν ενέργεια ικανή να εισχωρήσει στην ύλη, να προκαλέσει ιοντισμό των ατόμων της, να διασπάσει βίαια χημικούς δεσμούς, να προκαλέσει βιολογικές βλάβες στον ανθρώπινο οργανισμό. **Ιοντισμός ενός ουδέτερου ατόμου είναι η βίαιη απομάκρυνση ενός ηλεκτρονίου από τις στοιβάδες του**, λόγω εξωτερικού αιτίου, με αποτέλεσμα την παραγωγή δυο αντίθετα φορτισμένων ιόντων, **του θετικού ατόμου και του αρνητικού ηλεκτρονίου** ακτίνες X , ακτινοβολίες α, β, και γ

Οι φυσικές πηγές ευρίσκονται στο κοσμικό διάστημα και το γήινο περιβάλλον του ανθρώπου, δηλαδή το φλοιό της γης, τα ύδατα και τον ατμοσφαιρικό αέρα

Οι τεχνητές πηγές προκύπτουν από: (α) ιατρική χρήση ιοντίζουσών ακτινοβολιών στην ακτινοδιαγνωστική, ακτινοθεραπεία και πυρηνική ιατρική

(β) λειτουργία πυρηνικών εργοστασίων

(γ) πυρηνικές δοκιμές

(δ) πυρηνικά ατυχήματα

και (ε) άλλες δραστηριότητες

Άσκηση 5

Πόσα μόρια έχουμε σε 1.00 m^3 αέριο, θερμοκρασίας 10°C και πίεσης $P = 2 \text{ atm}$

Solution

The ideal gas law

$$PV = N kT$$

yields the number of particles

$$N = \frac{PV}{kT} = \frac{2 \cdot (1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa}) \cdot (1.00 \text{ m}^3)}{(1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (283 \text{ K})} = 5.17 \cdot 10^{25}$$

Δίνονται

$$k = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Kelvin} = \text{Celsius} + 273.15$$

Οι νόμοι Boyle – Mariotte και Gay – Lussac δίνουν την περίπτωση της γενικής μεταβολής των τριών δεδομένων (θερμοκρασίας, πίεσης και όγκου) ενός ιδανικού αερίου



" Το γινόμενο της πίεσης επί τον όγκο ενός ιδανικού αερίου είναι ανάλογο της απόλυτης θερμοκρασίας του "

$$P V = C T$$

όπου C = σταθερά αναλογίας, που εξαρτάται από τη μάζα του αερίου.

Στην περίπτωση, που αναφερόμαστε σε ένα mole, η C έχει για όλα τα αέρια τη ίδια τιμή και παριστάνεται με R προς τιμήν του Regnault, που πρώτος υπολόγισε την τιμή της. Αρα για ένα mole ιδανικού αερίου θα έχουμε

$$P V = R T$$

Και για μάζα n moles →

$$P V = n R T$$



ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΙΔΑΝΙΚΩΝ
ΑΕΡΙΩΝ

$R \rightarrow$ παγκόσμια σταθερά ιδανικών αερίων

έχει διαστάσεις έργο/βαθμός x moles

οι τιμές της είναι:

$$R = 0,08205 \text{ lt} \cdot \text{atm} / \text{deg} \cdot \text{Mole}$$

$$R = 8,314 \cdot 10 \text{ erg} / \text{deg} \cdot \text{Mole}$$

$$R = 8,314 \text{ Joule} / \text{deg} \cdot \text{mole}$$

Από τον μετασχηματισμό της Καταστατικής Εξίσωσης των Ιδανικών Αερίων έχουμε $PV / T = n R$. Όμως για δεδομένη μάζα αερίου το γινόμενο nR είναι σταθερό, άρα συνεπάγεται ότι το πηλίκο PV / T για σταθερή μάζα αερίου είναι σταθερό για οποιεσδήποτε συνθήκες πίεσης, θερμοκρασίας και όγκου. Από τους συλλογισμούς αυτούς συνάγεται η ισχύς του *Γενικού Τύπου των Αερίων*, που έχει ως εξής :

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

Άσκηση 6

Ο ιδανικός νόμος περί αερίου

$$PV = NkT$$

όπου N είναι ο αριθμός των σωματιδίων αερίου που περιέχονται στον όγκο V , k είναι η σταθερά Boltzmann, και T είναι η απόλυτη θερμοκρασία του αέριο

Δείξτε ότι η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφεί ως $P = nd k T$, όπου nd είναι η πυκνότητα αριθμού σωματιδίων αερίου

ή ως $PV = nRT$, όπου n είναι ο αριθμός των γραμμομορίων αερίου στο V και το R είναι το γενικό σταθερά αερίου

Λύση

Solution

By dividing Eq. (6.9) by the volume V and introducing the number density of particles $n_d \equiv N/V$, we immediately obtain Eq. (6.10).

By introducing the number of moles of gas in V , $n_{\text{mol}} = N/N_A$, where $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ is Avogadro's number, we obtain

$$PV = \frac{N}{N_A} N_A kT = n RT,$$

where $R \equiv N_A k = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ is the *universal gas constant*.

Finally, by introducing the mass m of each gas particle and using Eq. (6.10), we notice that the mass density of the gas is $\rho = m n_d$ and we obtain

$$P = m n_d \frac{kT}{m} = \rho \frac{kT}{m}.$$

Άσκηση 7

Consider the Earth to be a blackbody with average temperature 15°C and surface area equal to $5.1 \times 10^{14} \text{ m}^2$. Find the rate at which energy is radiated by the Earth and the wavelength at which maximum power is radiated. Compare this peak wavelength with that for a 5,800-K blackbody (the sun).

Solution Using (62), the Earth radiates

$$\begin{aligned} E &= \sigma AT^4 \\ &= 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{-K}^4 \times 5.1 \times 10^{14} \text{ m}^2 \times (15.0 + 273.15 \text{ K})^4 \\ &= 2.0 \times 10^{17} \text{ Watts} \end{aligned}$$

The wavelength at which the maximum point is reached in the Earth's spectrum is

$$\lambda_{\text{max}} (\mu\text{m}) = \frac{2,898}{T(\text{K})} = \frac{2,898}{288.15} = 10.1 \mu\text{m} \text{ (Earth)}$$

For the 5,800-K sun,

$$\lambda_{\text{max}} (\mu\text{m}) = \frac{2,898}{5,800} = 0.48 \mu\text{m} \text{ (sun)}$$

Δίνεται ότι $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Fundamental constants

gravitational constant	$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
speed of light in vacuum	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
molar gas constant	$R = 8.315 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Avogadro's number	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
molar volume ¹	$V_m = 22.414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
universal gas constant	$R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmann constant	$k = R/N_A = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan–Boltzmann constant	$\sigma = 5.671 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
permittivity of vacuum	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
permeability of vacuum	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Microscopic physics

electron charge	$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
electron mass	$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 511.0 \text{ keV}$
proton mass	$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938.3 \text{ MeV}$
atomic mass unit	$1 \text{ a.m.u.} = 1.661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931.5 \text{ MeV}$
Planck constant	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
reduced Planck constant	$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0546 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
fine structure constant	$\alpha = \mu_0 c e^2 / (2h) = 7.297 \cdot 10^{-3}$
Rydberg constant	$\mathcal{R} = 1.0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Compton wavelength of the electron	$\lambda_c = 2.426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Wien's displacement law constant	$b = \lambda_{\text{max}} T = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

Astronomical constants

mass of the Earth	$M_E = 5.978 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
mass of the Sun	$M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

¹Ideal gas at $T = 273.15 \text{ K}$ and 1 atm .

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης Coriolis (ανά μονάδα μάζας) στην πόλη της Πάτρας (γεωγραφικό πλάτος 39° Β) σε άνεμο $u=25\text{m/s}$.

Δίνεται γωνιακή ταχύτητα $\Omega=7,29\times 10^{-5}\text{s}^{-1}$.

Δύναμη Coriolis

Αναπτύσσεται σε κάθε σώμα που κινείται σε σχέση με ένα σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται.

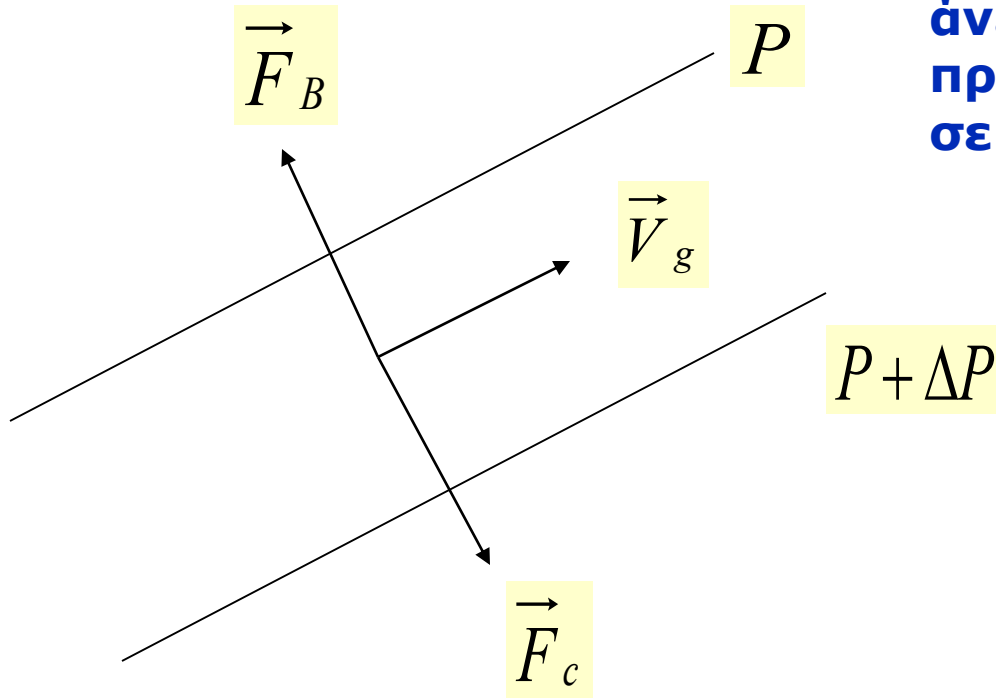
$$\frac{F_c}{m} = -2\omega V \sin \phi = -fV$$

$\omega = 7.29 \times 10^{-5}$ rad/sec $V =$ σχετική ταχύτητα σώματος (αέρα)

$m =$ μάζα σώματος (αέρα) $\phi =$ γεωγραφικό πλάτος

$f =$ coriolis παράμετρος

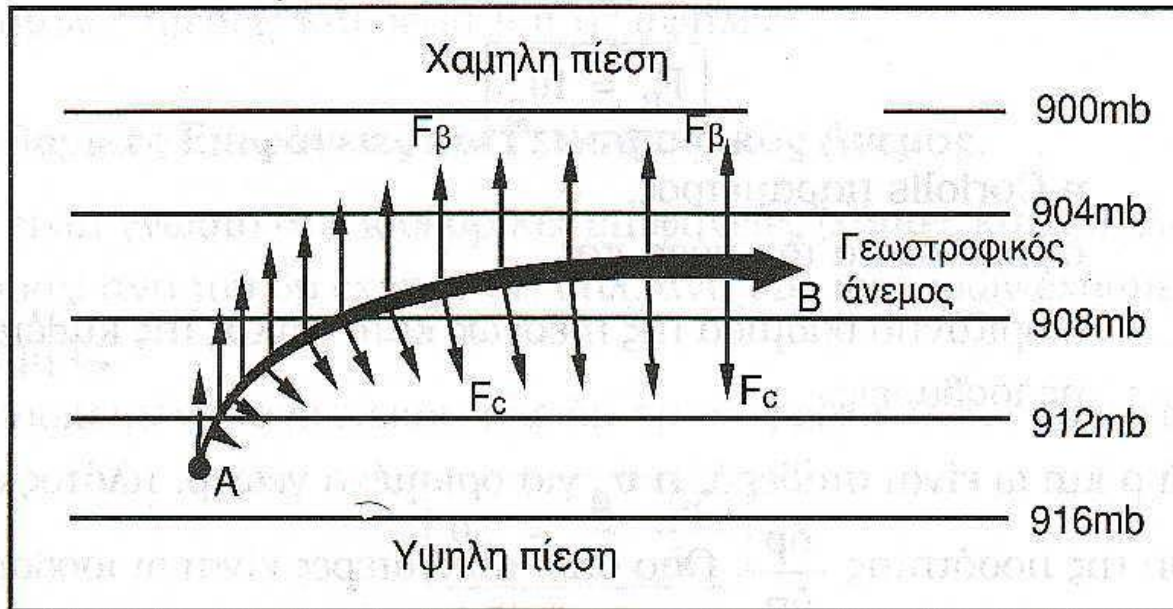
$$|\vec{F}_B| = |\vec{F}_C| \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} = 2\omega V_g \sin \varphi \Rightarrow V_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\delta P}{\delta n}$$



**Ο γεωστροφικός
άνεμος είναι ανάλογος
προς τη βαροβαθμίδα
σε ένα επίπεδο**

Ο γεωστροφικός άνεμος

- Ο γεωστροφικός άνεμος πνέει παράλληλα στις ισοβαρείς καμπύλες έχοντας αριστερά του τις χαμηλές πιέσεις.



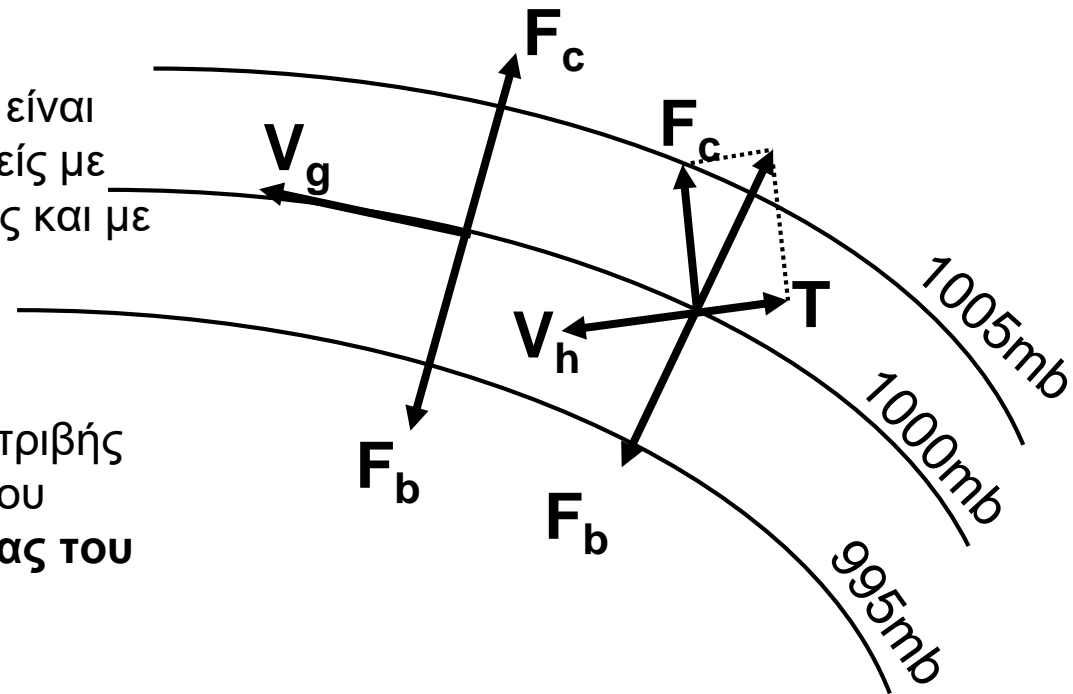
Ο γεωστροφικός άνεμος γύρω από ένα κέντρο χαμηλών πιέσεων πνέει πάντα στην ίδια κατεύθυνση με την περιστροφή της γης. Μια τέτοια κυκλοφορία ονομάζεται κυκλωνική. Γεωστροφική ροή γύρω από κέντρα υψηλών πιέσεων ονομάζεται αντικυκλωνική. Όσο μικρότερη η απόσταση μεταξύ των ισοβαρών, τόσο εντονότερη θα είναι η δύναμη Coriolis που απαιτείται για να ισοροπήσει την δύναμη βαροβαθμίδας και έτσι τόσο ισχυρότερος θα είναι ο γεωστροφικός άνεμος.

Ο γεωστροφικός άνεμος

- Σε ολόκληρη την ατμόσφαιρα στα μέσα και μεγάλα γεωγραφικά πλάτη το μεγάλης κλίμακας πεδίο των ανέμων τείνει να είναι σχεδόν γεωστροφικό.
- Η κατεύθυνση του ανέμου είναι σχεδόν παράλληλη με τις ισοβαρείς και η ταχύτητα του ανέμου είναι σχεδόν ίση με εκείνη του γεωστροφικού ανέμου με μέγιστο σφάλμα 15%.
- Μεγαλύτερες αποκλίσεις από τη γεωστροφική ροή παρατηρούνται κοντά στην επιφάνεια της γης όπου η **δύναμη της τριβής** παίζει σημαντικότερο ρόλο στην ισορροπία δυνάμεων.

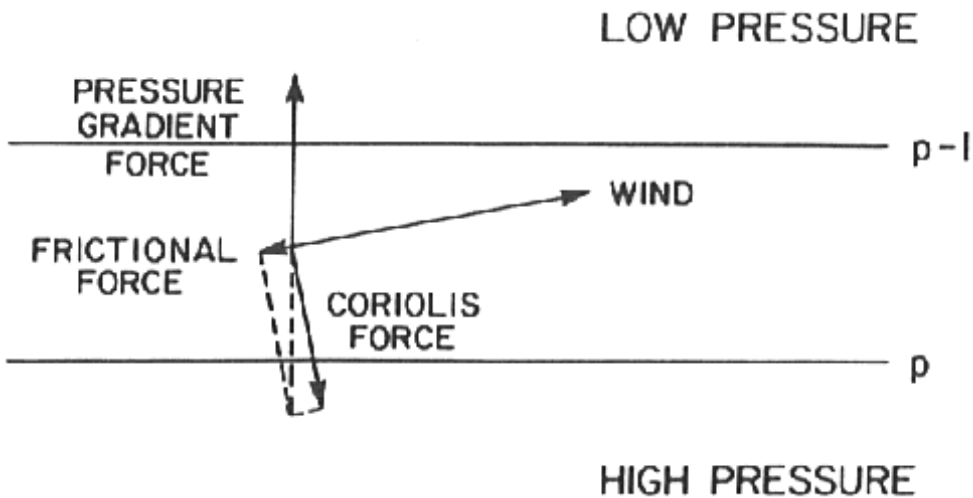
Ο γεωστροφικός άνεμος: η επίδραση της τριβής

- Κοντά στο έδαφος όπου η τριβή δεν είναι αμελητέα ο άνεμος τέμνει τις ισοβαρείς με κατεύθυνση προς τις χαμηλές πιέσεις και με γωνία μεταξύ 10° (θάλασσα) και 45° (ανώμαλο ανάγλυφο).
- Όσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη της τριβής τόσο μεγαλύτερη είναι και η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της **ταχύτητας του ανέμου V_h** με το **διάνυσμα του γεωστροφικού ανέμου V_g**
- Η **γωνία** μεταξύ V_g και V_h καθορίζεται από την απαίτηση ότι η συνιστώσα της βαροβαθμίδας στην κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με την δύναμη της τριβής T .



- Η **ταχύτητα** του ανέμου καθορίζεται από την απαίτηση ότι η δύναμη Coriolis πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να εξισορροπήσει την συνιστώσα της βαροβαθμίδας κάθετα στη διεύθυνση της κίνησης.

Ο Άνεμος στο οριακό στρώμα: η επίδραση της τριβής



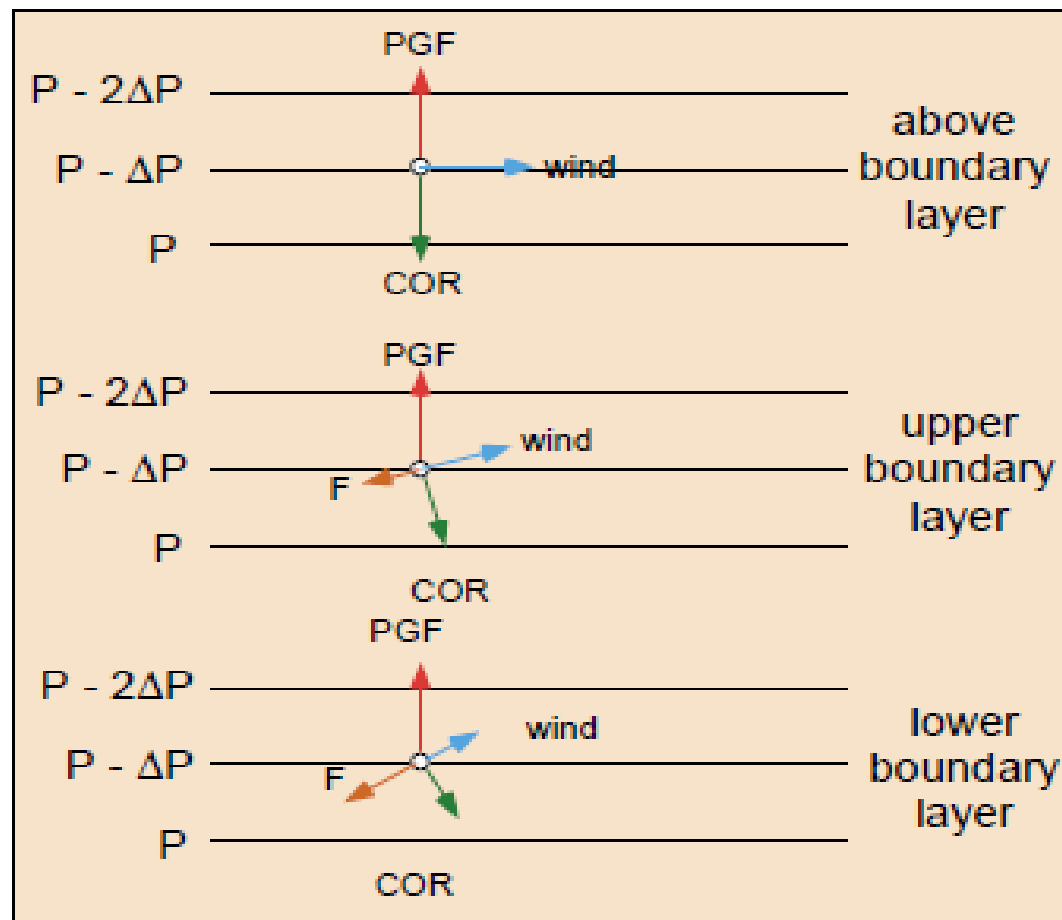
- Ισοροπία τριών δυνάμεων

$0 = \text{Βαροβαθμίδα} + \text{Coriolis} + \text{Τριβή}$

$0 = \text{PGF} + \text{COR} + \text{F}$

- Η τριβή κάνει τον άνεμο να πνέει υπό γωνία ως προς τις ισοβαρείς από τις ψηλές προς τις χαμηλές πιέσεις για την περιοχή του οριακού στρώματος
- Η γωνία που σχηματίζει ο άνεμος με τις ισοβαρείς και η ελάττωσή του εξαρτώνται από την τραχύτητα της επιφάνειας

Ο Άνεμος στο οριακό στρώμα: η επίδραση της τριβής



Άσκηση 9

Είναι ο γεωστροφικός άνεμος εφικτός στον Ισημερινό; Ναι ή όχι, και γιατί; Γνωρίζετε άλλο είδος ανέμου στον Ισημερινό, και ποιο;

Αιτία δημιουργίας ανέμου

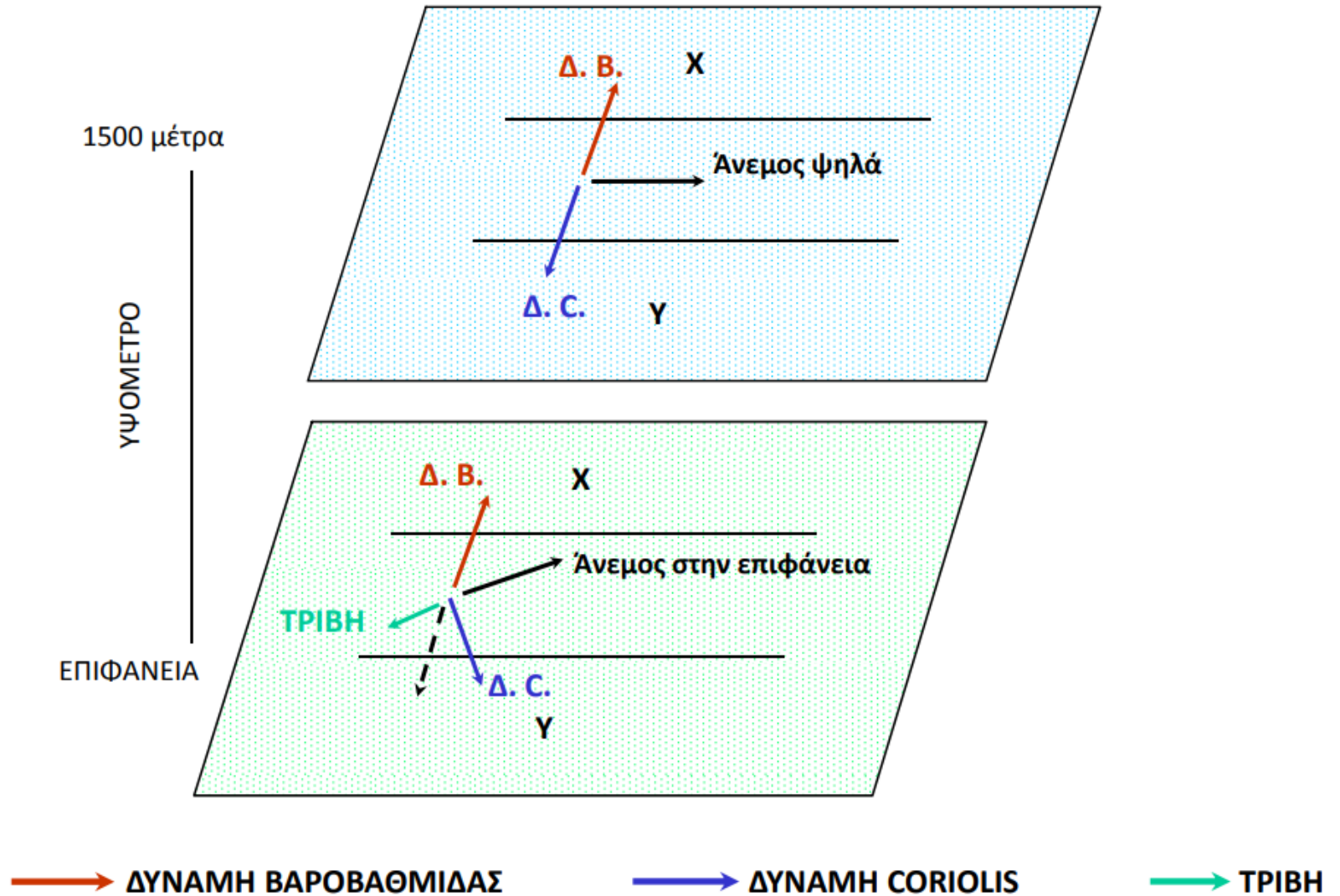
Η βασική αιτία δημιουργίας του ανέμου είναι η δύναμη της **βαροβαθμίδας**, η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι η βαρομετρική πίεση δεν είναι η ίδια σε κάθε περιοχή της επιφάνειας της γης. Η δύναμη της βαροβαθμίδας έχει διεύθυνση κάθετη στις ισοβαρείς και φορά πάντα προς τις χαμηλές πιέσεις.

Αν λοιπόν στον ατμοσφαιρικό αέρα ασκούσαν μόνο η δύναμη αυτή, ο άνεμος θα είχε πάντα φορά από τα βαρομετρικά υψηλά (αντικυκλώνες) προς τα βαρομετρικά χαμηλά (κυκλώνες). Κάτι τέτοιο όμως στην πραγματικότητα δεν συμβαίνει, καθώς ασκείται μία επιπλέον δύναμη στην αέρια μάζα, η οποία οφείλεται στην περιστροφή της γης και ονομάζεται δύναμη Κοριόλις

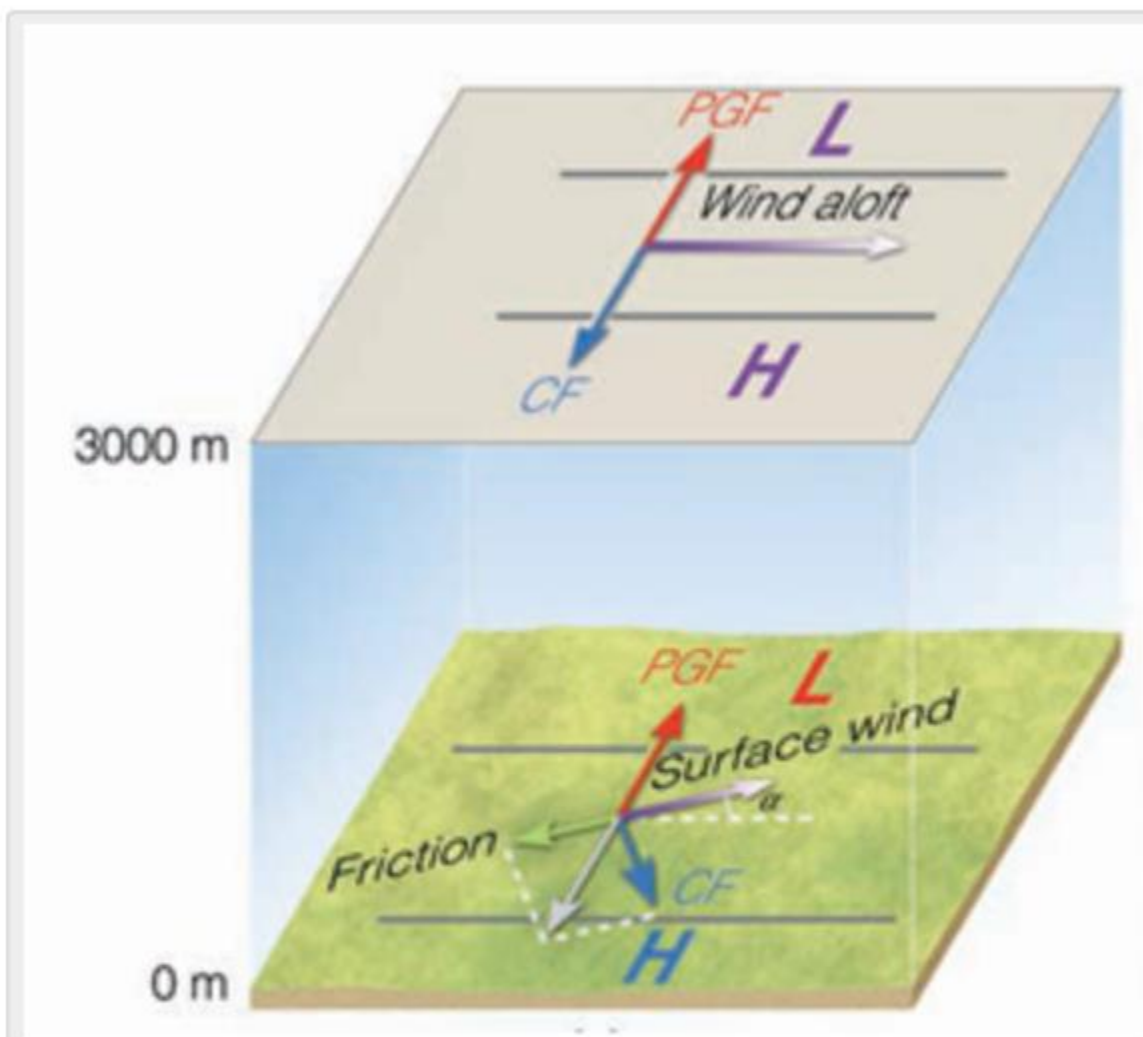
Γεωστροφικός Άνεμος

Στην ατμόσφαιρα ο ατμοσφαιρικός αέρας κινείται τελικά παράλληλα με τις ισοβαρείς έχοντας στα αριστερά του τις χαμηλές πιέσεις στο Β.Η. και στα δεξιά του στο Ν.Η. Ο άνεμος αυτός ονομάζεται **γεωστροφικός άνεμος** και είναι όπως είδαμε αποτέλεσμα μόνο δύο δυνάμεων, της βαροβαθμίδας και της Κοριόλις. Ο γεωστροφικός άνεμος πνέει πάντα πάνω από τα 500 μέτρα υψόμετρο, καθώς στην επιφάνεια αλλά και μέχρι το ύψος των 500 μέτρων, εμφανίζεται και μία Τρίτη δύναμη, που δεν είναι άλλη από τη γνωστή μας τριβή.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΣ ΑΝΕΜΟΣ



Εικόνα 11. Επιφανειακός άνεμος



Σχήμα 5: Ο άνεμος στην επιφάνεια έχει διαφορετική διεύθυνση από τον άνεμο στα υψηλότερα στρώματα, ο οποίος είναι απαλλαγμένος από τριβές. Έτσι αν ο άνεμος στην επιφάνεια είναι νοτιοδυτικός στα υψηλότερα στρώματα ο άνεμος θα είναι δυτικός. Πηγή σχήματος: Meteorology Today – C. Donald Ahrens (Brooks/Cole Cengage Learning).

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η ενέργεια μέλανος σώματος που εκπέμπεται από ένα σώμα θερμοκρασίας $T = 250^{\circ}\text{C}$ και με επιφάνεια 500m^2 . Να συγκριθεί με την εκπομπή του ίδιου ακριβώς σώματος με θερμοκρασία $T = 100^{\circ}\text{C}$ και $T = 3000^{\circ}\text{C}$.

Δίδεται σταθερά Stefan-Boltzmann $5.67 \cdot 10^{-8}\text{W}/\text{m}^2\text{K}^{-4}$

Άσκηση 11

ΜΕΤΩΠΙΚΕΣ ΥΦΕΣΕΙΣ

- Οι υφέσεις αυτές δημιουργούνται κατά μήκος των μετώπων. Σύμφωνα με τη θεωρία η διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σε δύο αέριες μάζες παρουσιάζει κάποια στιγμή, εξαιτίας κάποιου αιτίου, έναν ελαφρό κυματισμό. Υπάρχει η δυνατότητα αυτός ο κυματισμός να μεγαλώσει με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας γλώσσας θερμού αέρα μέσα στην ψυχρή αέρια μάζα.

Από εδώ και μπρος το σύστημα αρχίζει να μετακινείται. Στην κατάσταση αυτή έχουν ήδη δημιουργηθεί ένα θερμό και ένα ψυχρό μέτωπο. Το ψυχρό μέτωπο κινείται πιο γρήγορα από το θερμό. Όταν το προφτάσει, ενώνονται και δημιουργούν ένα συνεσφιγμένο μέτωπο.

Όταν το ψυχρό μέτωπο προλάβει το θερμό σε όλη του την έκταση, το θερμό μέτωπο εξαφανίζεται και δημιουργείται ένας στρόβιλος που γρήγορα εξαφανίζεται.

Άσκηση 12

Τι είναι & πως περιγράφεται η σκέδαση? Ποιες οι διαφορές μεταξύ σκέδασης Rayleigh & Mie;

Σκέδαση του φωτός ονομάζεται ο διασκορπισμός των φωτεινών ακτίνων όταν προσπέσουν σε μικροσκοπικά σωματίδια, έτσι ώστε να διαχέονται στον χώρο χωρίς να φαίνονται. Η σκέδαση είναι αποτέλεσμα της ανάκλασης που γίνεται πολλές φορές προς διάφορες κατευθύνσεις. Πρόκειται ουσιαστικά, για απορρόφηση του φωτός και επανεκπομπή του από τα μικροσκοπικά σωματίδια πάνω στα οποία προσπίπτει.

Η σκέδαση της ηλιακής ακτινοβολίας οφείλεται τόσο στην ύπαρξη των αιωρουμένων σωματιδίων (aerosols) (φαινόμενο σκέδασης Mie), όσο και των μορίων της ατμόσφαιρας (φαινόμενο σκέδασης Rayleigh).

Σκέδαση Rayleigh	Η ακτινοβολία σκεδάζεται ελαστικά από άτομα ή μόρια, χωρίς αλλαγή στο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας.
Σκέδαση Mie	Η ακτινοβολία σκεδάζεται ελαστικά από μικρά σωματίδια ή αιωρήματα (συγκρίσιμου μεγέθους με το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας), χωρίς αλλαγή στο μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας.



Dr. Dimitra Papadaki | Senior Researcher

Tel: +30 210 727 6841

dpapadaki@phys.uoa.gr



National and Kapodistrian
University of Athens