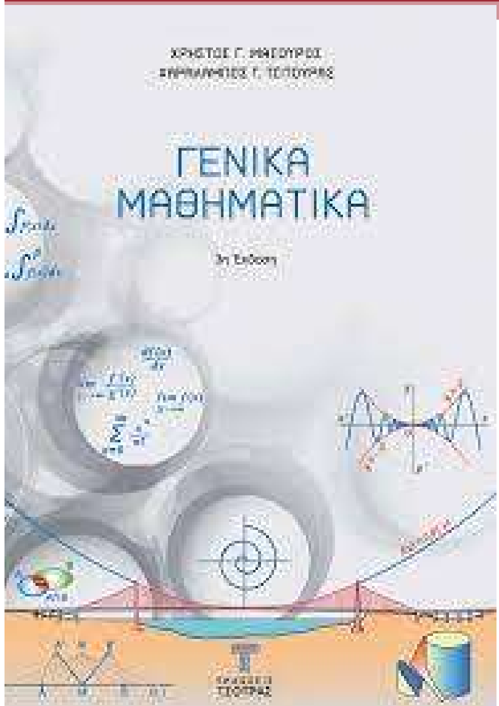
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Σύνολα, Συναρτήσεις και Πραγματικοί Αριθμοί



Σταμάτης Βολιώτης
3ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

Πραγματικοί αριθμοί

- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$
- Αλγεβρικές πράξεις
- Αλγεβρική Δομή
- Πράξη: Αν έχουμε ένα μη κενό σύνολο Ε, τότε μια πράξη στο Ε είναι μια απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου $E \times E$ στο Ε
- Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις: την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό

Πραγματικοί αριθμοί

- **Ιδιότητες της πρόσθεσης**

I_1. Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης

Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

I_2. Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου της πρόσθεσης

Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, τον οποίο συμβολίζουμε με 0 και τον αποκαλούμε **μηδέν**, τέτοιος ώστε: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, για κάθε πραγματικό αριθμό α.

Πραγματικοί αριθμοί

- **Ιδιότητες της πρόσθεσης**

I_3. Ύπαρξη αντιθέτου

Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α', για τον οποίο ισχύει $\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha=0$. Ο αριθμός α' ονομάζεται **αντίθετος** του α και συμβολίζεται με $-\alpha$, δηλαδή $\alpha'=-\alpha$.

I_4. Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης

Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ισχύει:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

Πραγματικοί αριθμοί

- **Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού**

I_5. Προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού

Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

I_6. Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου του πολλαπλασιασμού

Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, τον οποίο συμβολίζουμε με 1 και τον αποκαλούμε **μονάδα**, τέτοιος ώστε:

$$a1 = 1a = a$$

για κάθε πραγματικό αριθμό a.

Πραγματικοί αριθμοί

- **Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού**

I_7. Ύπαρξη αντιστρόφου

Για κάθε πραγματικό αριθμό $a \neq 0$, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός a', για τον οποίο ισχύει

$$aa' = a'a = 1.$$

Ο αριθμός a' ονομάζεται **αντίστροφος** του a και συμβολίζεται με a^{-1}, δηλαδή $a' = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

I_8. Αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

Πραγματικοί αριθμοί

- Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού συνδέονται μεταξύ τους

I_9. Επιμεριστική ιδιότητα

Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

- **Ιδιότητες της διάταξης**

I_{10}. Μεταβατικότητα της διάταξης

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί με

$$\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma, \quad \text{τότε έχουμε ότι} \quad \alpha > \gamma$$

I_{11}. Ιδιότητα της τριχοτομίας

Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει μόνον μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \beta < \alpha$$

Πραγματικοί αριθμοί

- Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού συνδέονται με την διάταξη

I_{12}. Συμβατότητα της πρόσθεσης με τη διάταξη

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

για κάθε πραγματικό αριθμό γ.

I_{13}. Συμβατότητα του πολλαπλασιασμού με τη διάταξη

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε

$$\alpha\gamma > \beta\gamma$$

για κάθε πραγματικό αριθμό $\gamma > 0$.

Πραγματικοί αριθμοί

- Η πληρότητα των πραγματικών αριθμών

Ορισμός 15.1. Ένα υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών ονομάζεται:

i. **άνω φραγμένο**, αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός m τέτοιος ώστε $x \leq m$ για κάθε $x \in A$. Το m ονομάζεται **άνω φράγμα** του A.

ii. **κάτω φραγμένο**, αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός n τέτοιος ώστε $n \leq x$ για κάθε $x \in A$. Το n ονομάζεται **κάτω φράγμα** του A

iii. **φραγμένο** αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο.

- Το ελάχιστο από τα άνω φράγματα ονομάζεται supremum

I_{14}. Ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει supremum