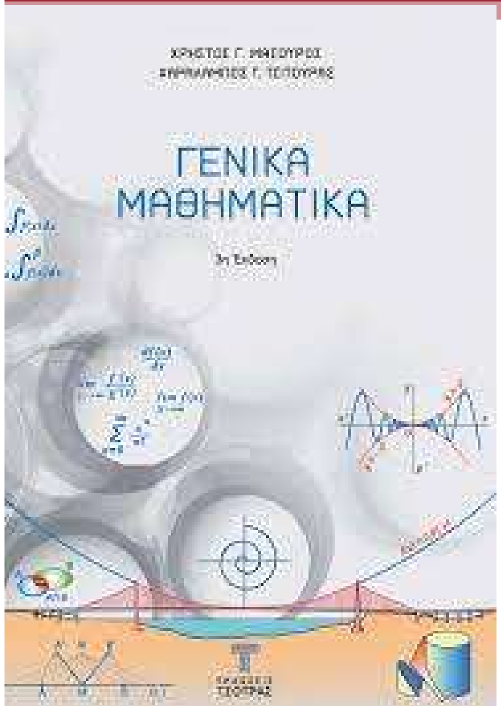
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Πραγματικές Συναρτήσεις



Σταμάτης Βολιώτης
4ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

Πραγματικές συναρτήσεις

- Αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

  - Ως **άθροισμα** των f και g, ορίζουμε την συνάρτηση $f+g$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D(f)\cap D(g)$ και για την οποία ισχύει:

    $$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\text{, για κάθε } x\in D(f)\cap D(g)$$

  - Ως **διαφορά** των f και g, ορίζουμε την συνάρτηση $f-g$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D(f)\cap D(g)$ και για την οποία ισχύει:

    $$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\text{, για κάθε } x\in D(f)\cap D(g)$$

  - Ως **γινόμενο** των f και g, ορίζουμε την συνάρτηση $f\cdot g$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D(f)\cap D(g)$ και για την οποία ισχύει:

    $$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\text{, για κάθε } x\in D(f)\cap D(g)$$

Πραγματικές συναρτήσεις

- Αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

- Ως **πηλίκο** των f και g, ορίζουμε την συνάρτηση $\frac{f}{g}$, ή οποία βέβαια δεν θα πρέπει να περιλαμβάνει στο πεδίο ορισμού της τους πραγματικούς αριθμούς που μηδενίζουν την g. Έτσι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο

$$D = D(f) \cap D(g) \cap \{x \in D(g) \mid g(x) \neq 0\}$$

και ισχύει:

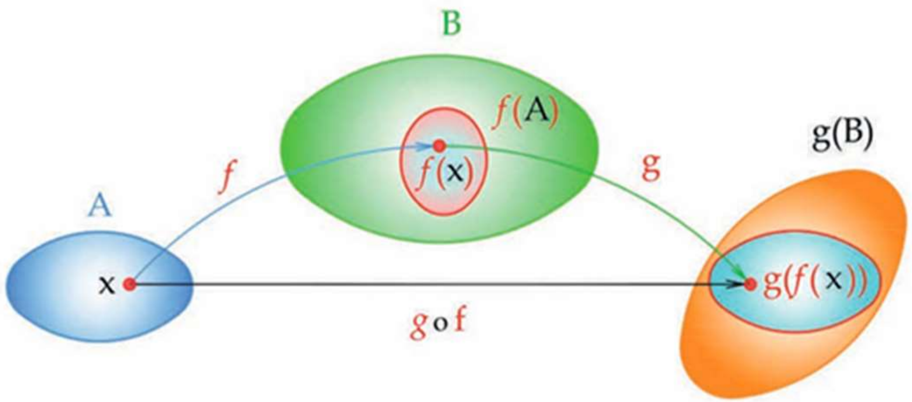
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ για κάθε } x \in D$$

- αν η f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $D(f)$ και λ πραγματικός αριθμός, τότε ορίζεται η συνάρτηση $\lambda \cdot f$ ως εξής:

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \text{ για κάθε } x \in D(f)$$

Πραγματικές συναρτήσεις

- Σύνθεση Συναρτήσεων

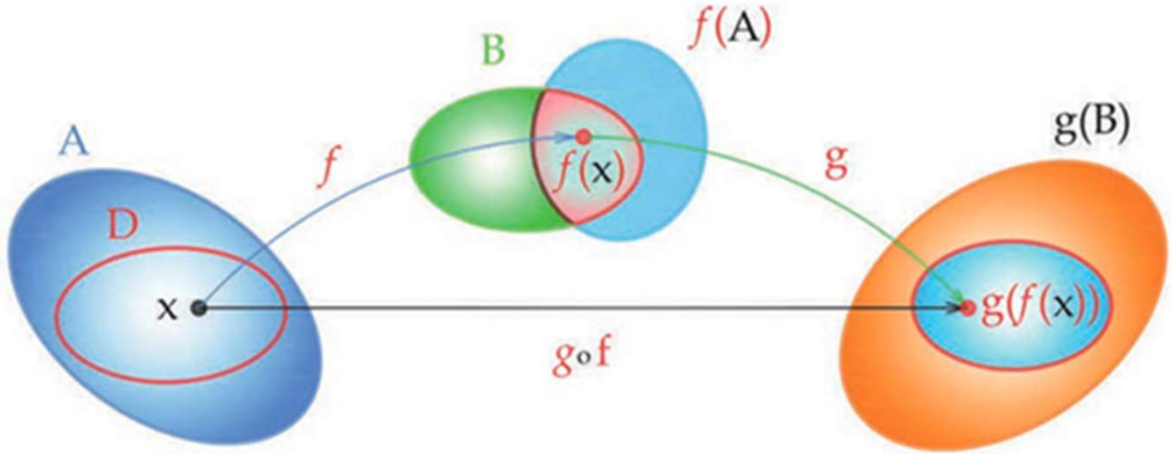


(i) Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με $f(A) \subseteq B$, τότε η σύνθεση της f με την g είναι η συνάρτηση

$$g \circ f : A \to \mathbb{R} \text{ με } (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{για κάθε } x \in A$$

Πραγματικές συναρτήσεις

- Σύνθεση Συναρτήσεων



(ii) Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις και το $f(A)$ δεν είναι υποσύνολο του B, αλλά $f(A) \cap B \neq \varnothing$, τότε η σύνθεση της f με την g είναι η συνάρτηση

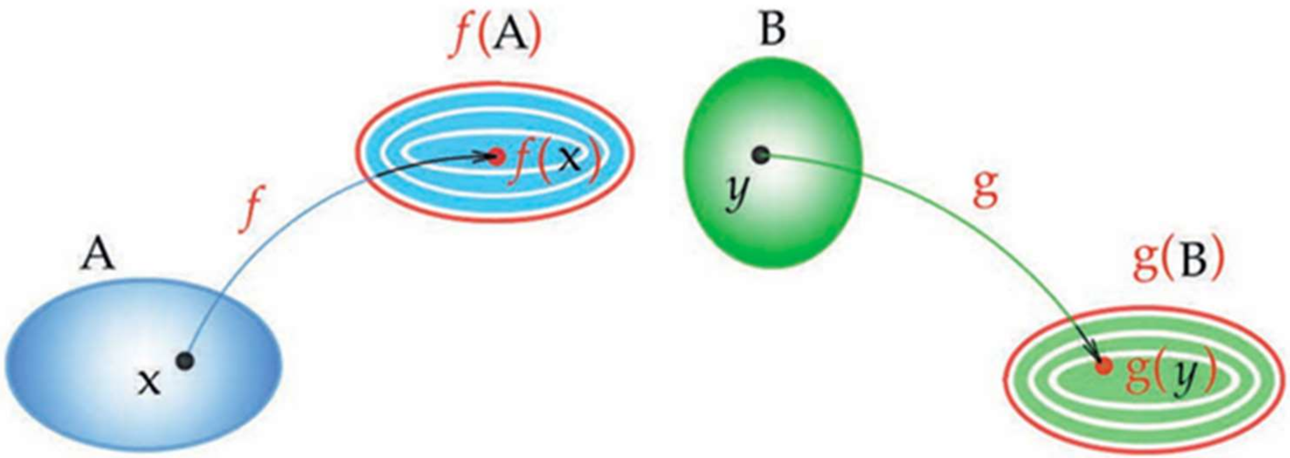
$$g \circ f : D \to \mathbb{R} \text{ με } (g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ για κάθε } x \in D$$

όπου το σύνολο D είναι το υποσύνολο του συνόλου A, το οποίο αποτελείται από όλα εκείνα τα στοιχεία του A, που η εικόνα τους μέσω της f βρίσκεται μέσα στο B. Δηλαδή

$$D = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Πραγματικές συναρτήσεις

- Σύνθεση Συναρτήσεων



?

Πραγματικές συναρτήσεις

- Ιδιότητες της σύνθεσης των συναρτήσεων

i) Η σύνθεση των συναρτήσεων δεν έχει την **αντιμεταθετική** ιδιότητα.

$$f : A \to B \quad \text{και} \quad g : B \to A .$$

Τότε ορίζονται οι συνθέσεις

$$g \circ f : A \to A \quad \text{και} \quad f \circ g : B \to B .$$

Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ του παραδείγματος αυτού είναι εν γένει διαφορετικές μεταξύ τους.

ii) Η σύνθεση των συναρτήσεων έχει όμως την **προσεταιριστική** ιδιότητα. Δηλαδή αν έχουμε τις συναρτήσεις

$$f : A \to \mathbb{R} ,\ g : B \to \mathbb{R} \text{ και } h : \Gamma \to \mathbb{R}$$

με $f(A) \subseteq B$ και $g(B) \subseteq \Gamma$, τότε ισχύει

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

Πραγματικές συναρτήσεις

- Ιδιότητες της σύνθεσης των συναρτήσεων

iii) Αν ορίζεται το άθροισμα $f+g$ των συναρτήσεων f,g και επίσης ορίζεται η σύνθεση $(f+g)\circ h$, τότε

$$(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$$

iv) Αν ορίζεται το γινόμενο $f\cdot g$ των συναρτήσεων f,g και επίσης ορίζεται η σύνθεση $(f\cdot g)\circ h$, τότε

$$(f\cdot g)\circ h = (f\circ h)\cdot(g\circ h)$$

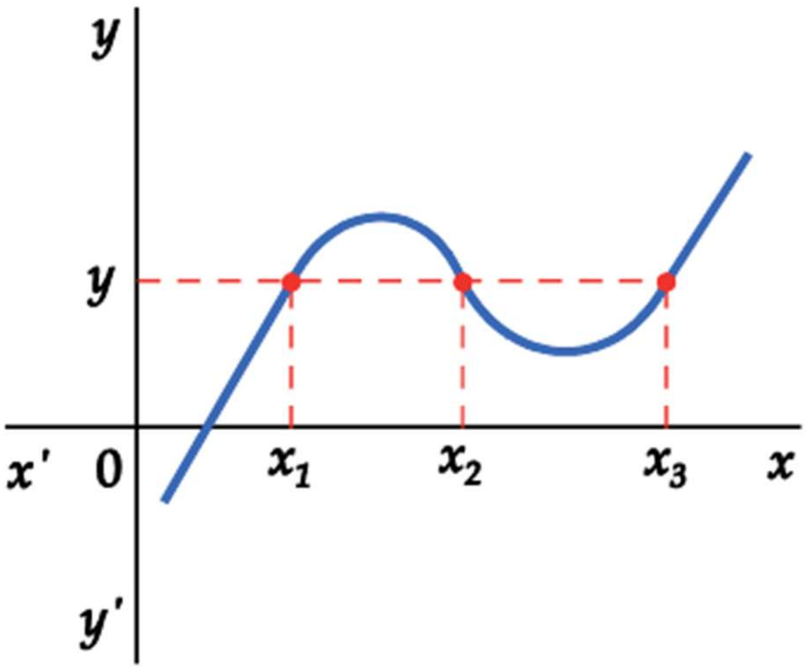
v) Αν I η ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή $I(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε για κάθε συνάρτηση f ισχύει

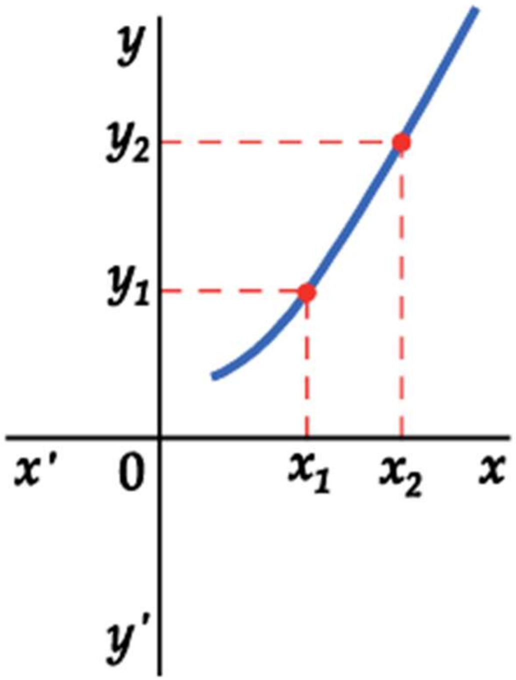
$$I\circ f = f\circ I = f$$

Τέλος εύκολα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι αν οι f, g είναι αμφιμονοσήμαντες και ορίζεται η σύνθεσή τους $g\circ f$, τότε η $g\circ f$ είναι και αυτή μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

Πραγματικές συναρτήσεις

- Αντίστροφη Συνάρτηση
  - Αμφιμονοσήμαντη ?





Πραγματικές συναρτήσεις

- Αντίστροφη Συνάρτηση

Ορισμός 4.1. Ονομάζουμε **αντίστροφη συνάρτηση** μιας αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης f, τη συνάρτηση f^{-1}, η οποία σε κάθε $y \in R(f)$ αντιστοιχεί το μοναδικό $x \in D(f)$ για το οποίο ισχύει $y = f(x)$.

Άμεση συνέπεια του ορισμού που μόλις δώσαμε είναι ότι

$$D\left(f^{-1}\right) = R(f) \quad \text{και ότι} \quad R\left(f^{-1}\right) = D(f).$$

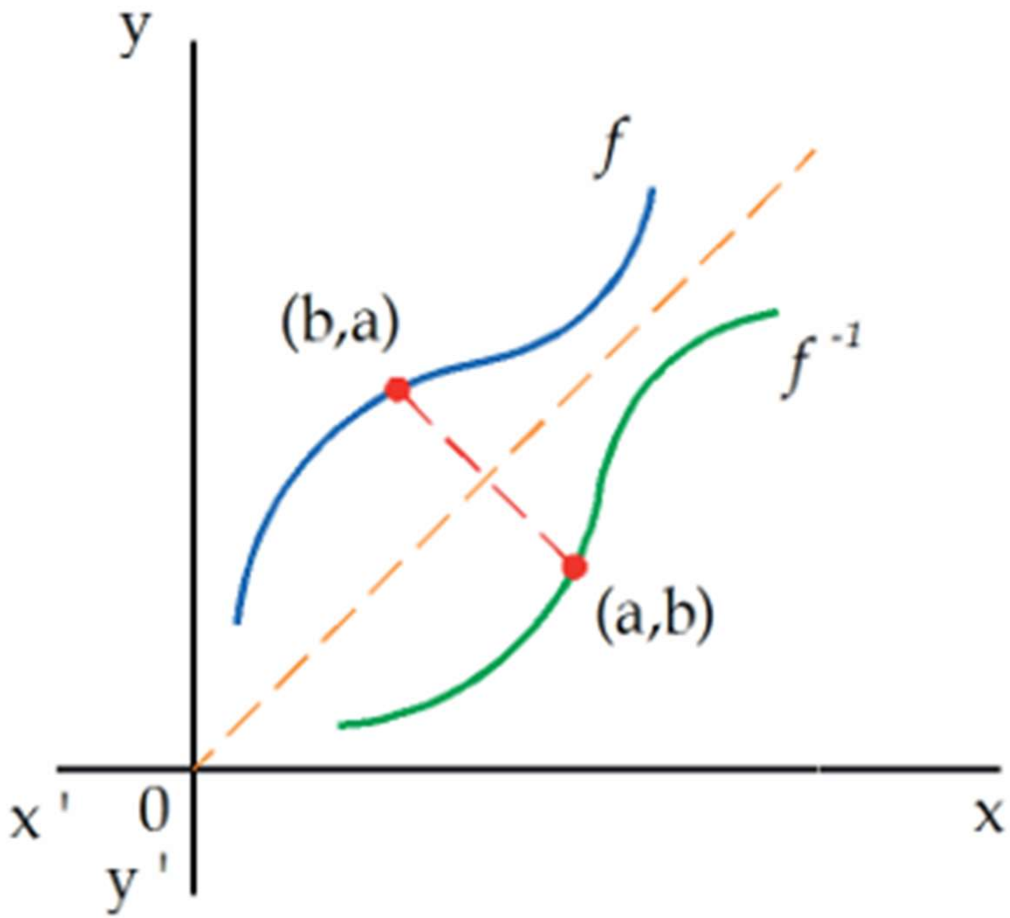
Επίσης άμεσα προκύπτει ότι

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f\,.$$

Πρόταση 4.1. *Αν f, g είναι αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις και $R(f) = D(g)$ τότε αληθεύει η ισότητα $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Πραγματικές συναρτήσεις

- Η γραφική παράσταση της αντίστροφης



Πραγματικές συναρτήσεις

- Μονότονες συναρτήσεις

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και E ένα μη κενό υποσύνολο του A. Η f θα λέγεται:

- **αύξουσα** στο E, αν για κάθε $x_1, x_2 \in E$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \le f(x_2)$
- **γνησίως αύξουσα** στο E, αν για κάθε $x_1, x_2 \in E$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- **φθίνουσα** στο E, αν για κάθε $x_1, x_2 \in E$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \ge f(x_2)$
- **γνησίως φθίνουσα** στο E, αν για κάθε $x_1, x_2 \in E$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

Πρόταση 5.1. *Αν οι συναρτήσεις $g : B \to A$ και $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονες, και η μονοτονία είναι του ιδίου είδους, τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, ενώ αν είναι διαφορετικού είδους τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.*

Πραγματικές συναρτήσεις

- Μονότονες συναρτήσεις

Για τον προσδιορισμό του είδους της μονοτονίας μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$, πολλές φορές χρησιμοποιούμε τον λόγο μεταβολής της f, ο οποίος ορίζεται ως ακολούθως:

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \mu\varepsilon \quad x_2 > x_1$$

Πρόταση 5.2. *Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Τότε η f είναι:*

i. αύξουσα στο A αν και μόνον αν $\lambda \geq 0$

ii. γνησίως αύξουσα στο A αν και μόνον αν $\lambda > 0$

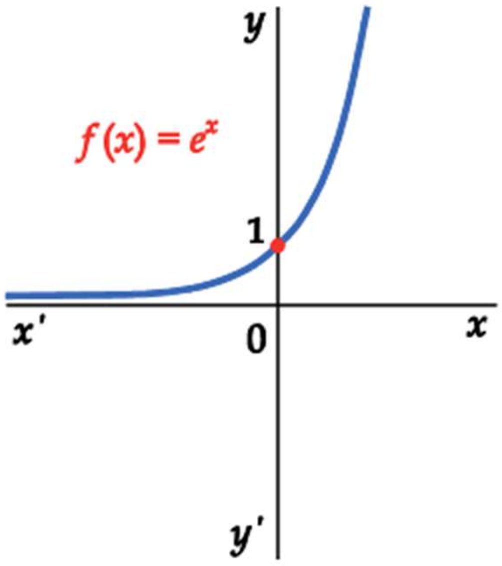
iii. φθίνουσα στο A αν και μόνον αν $\lambda \leq 0$

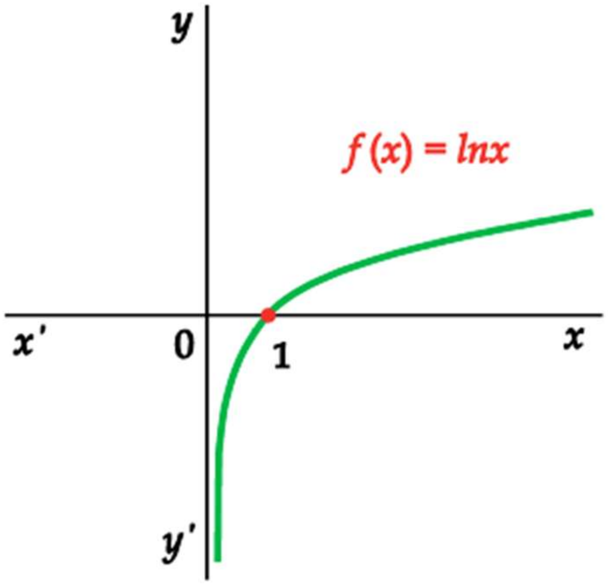
iv. γνησίως φθίνουσα στο A αν και μόνον αν $\lambda < 0$

v. σταθερή στο A αν και μόνον αν $\lambda = 0$.

Πραγματικές συναρτήσεις

- Μονότονες συναρτήσεις

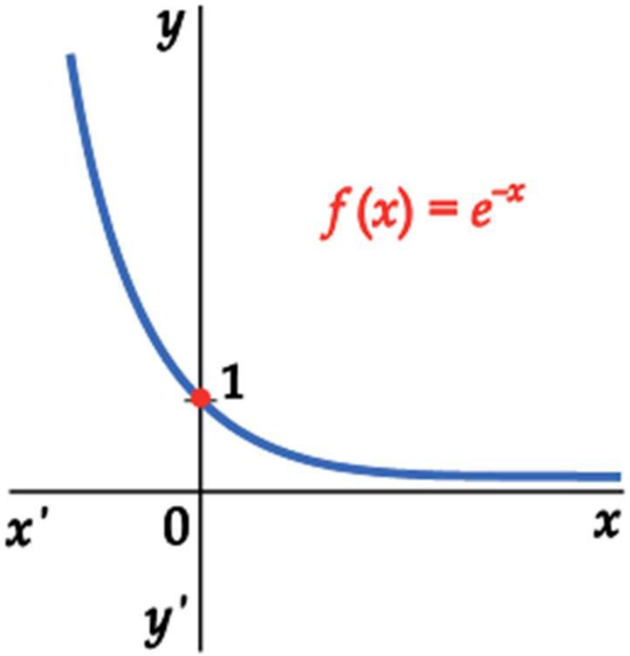




?

Πραγματικές συναρτήσεις

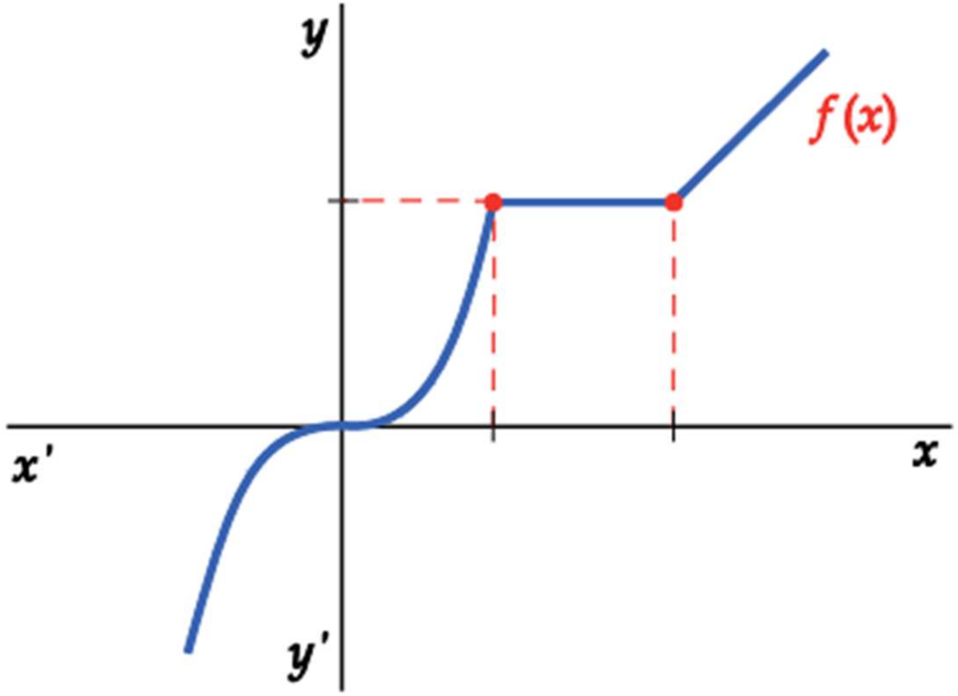
- Μονότονες συναρτήσεις



?

Πραγματικές συναρτήσεις

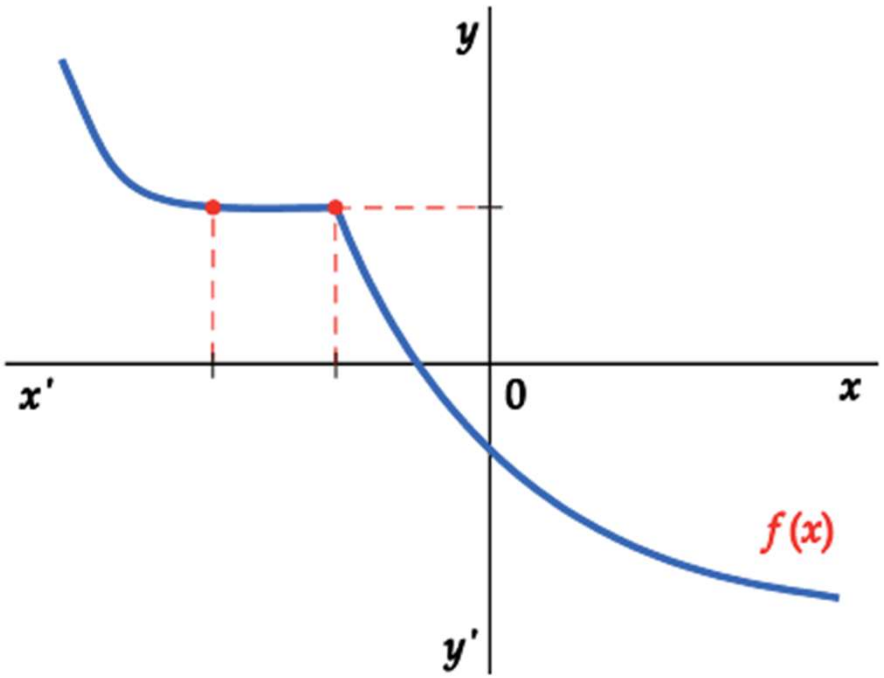
- Μονότονες συναρτήσεις



?

Πραγματικές συναρτήσεις

- Μονότονες συναρτήσεις



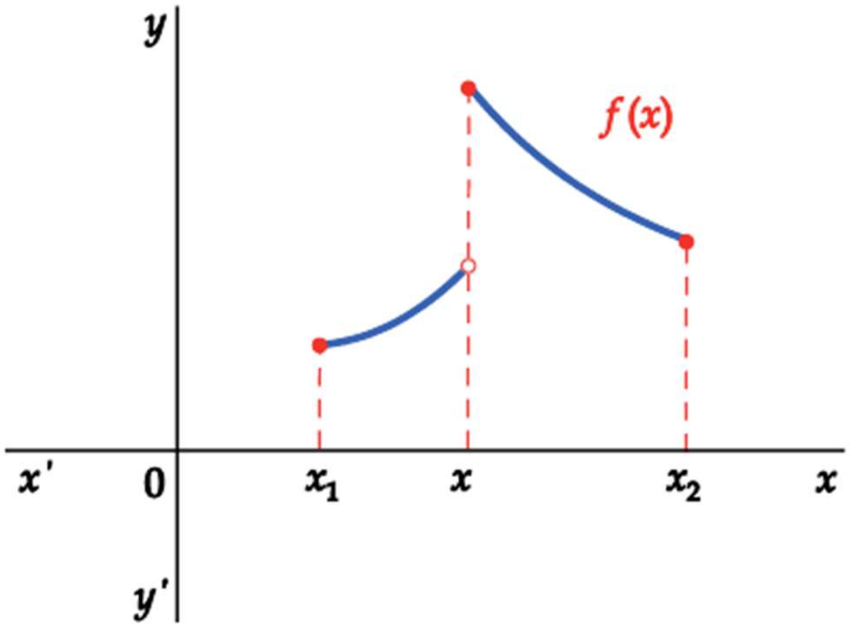
?

Πραγματικές συναρτήσεις

- Μονότονες συναρτήσεις

Πρόταση 5.3. *Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη, τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη, άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η f^{-1} έχει το αυτό είδος μονοτονίας με την f.*

?



Πραγματικές συναρτήσεις

- Φραγμένες συναρτήσεις

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι:

- η f είναι **άνω φραγμένη** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \leq M$
- η f είναι **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός m τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \geq m$
- η f είναι **φραγμένη** αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί M και m τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$

Τον αριθμό M καθώς και κάθε μεγαλύτερό του τον ονομάζουμε **άνω φράγμα** της f. Ομοίως τον αριθμό m καθώς και κάθε μικρότερό του τον ονομάζουμε **κάτω φράγμα** της f.

Πρόταση 6.1. *Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι δύο φραγμένες συναρτήσεις, τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους $\kappa f + \lambda g$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση.*

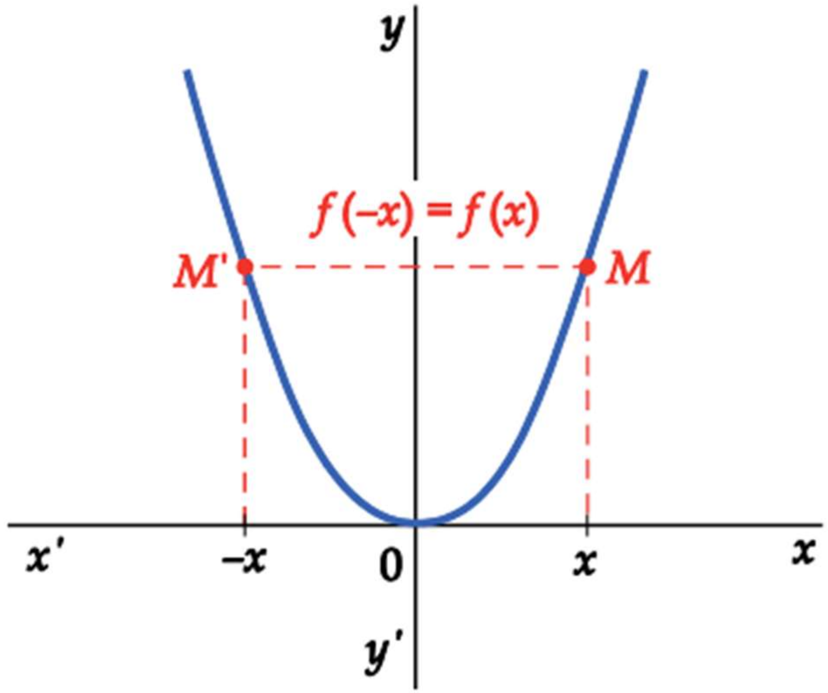
Πραγματικές συναρτήσεις

- Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός 7.1. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** αν και μόνον αν, για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

- $f(x) = x^2$



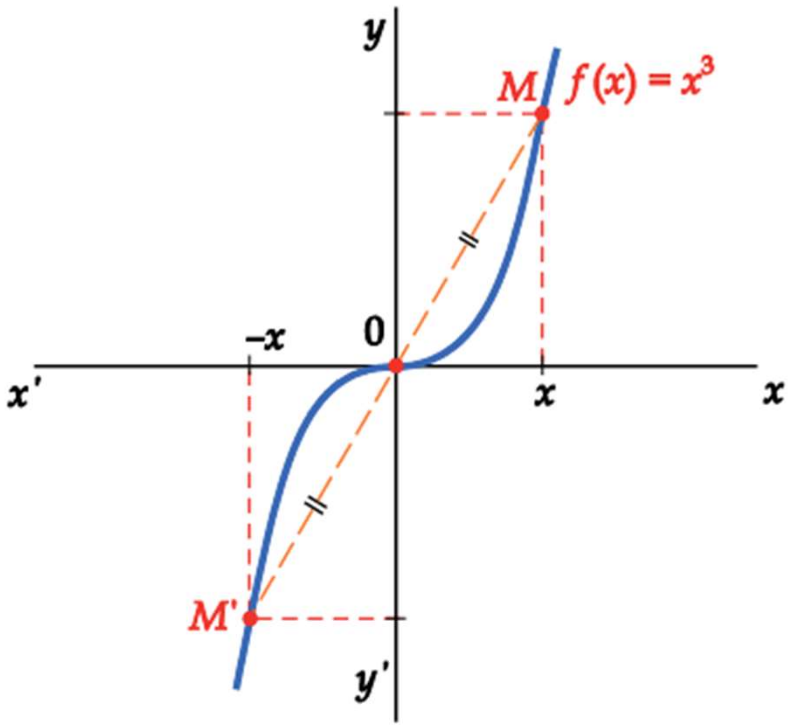
Πραγματικές συναρτήσεις

- Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός 7.2. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **περιττή** αν και μόνον αν, για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

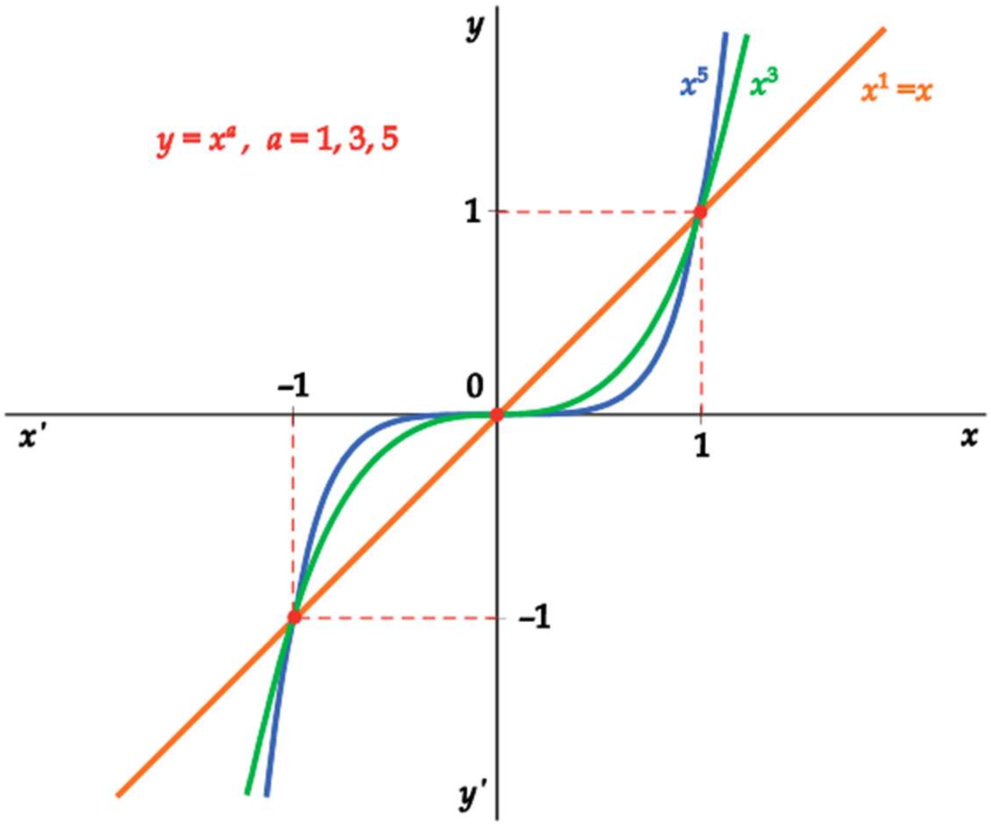
- $f(x) = x^3$



Πραγματικές συναρτήσεις

- Συναρτήσεις Δυνάμεων

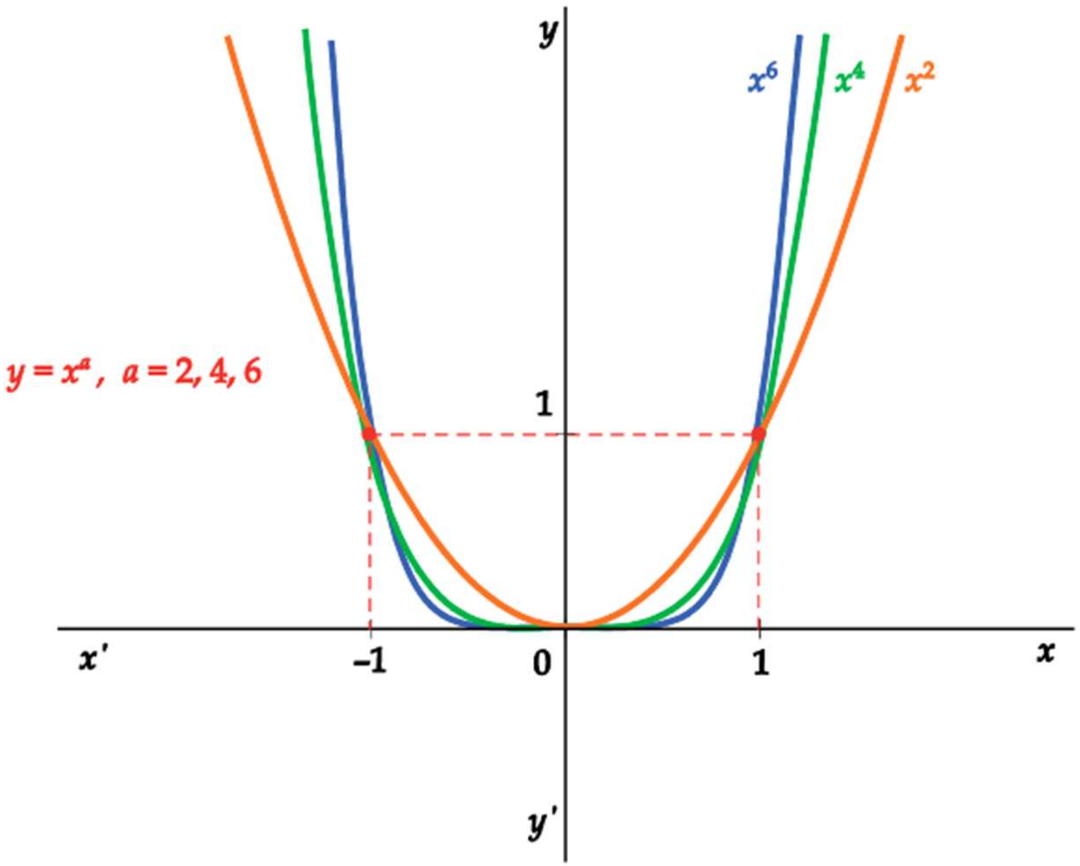
$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}$$



Πραγματικές συναρτήσεις

- Συναρτήσεις Δυνάμεων

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

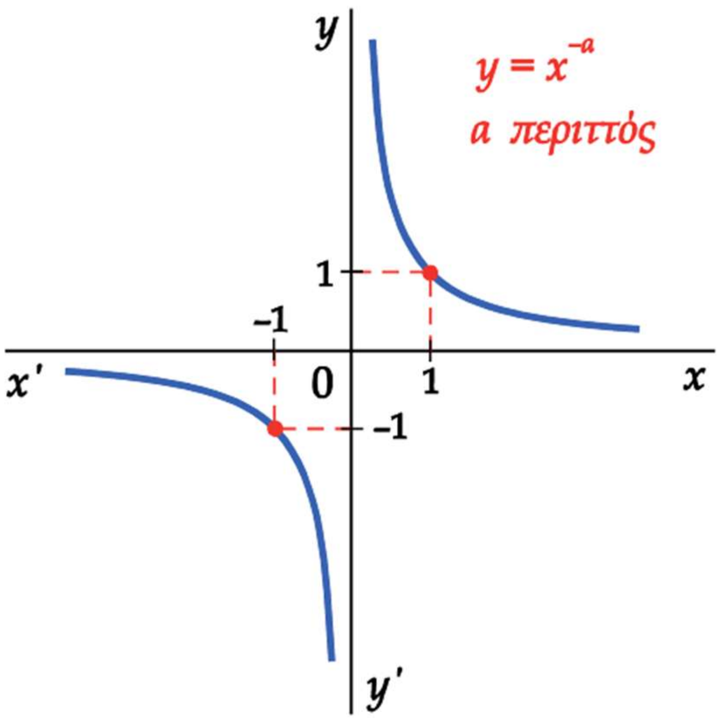


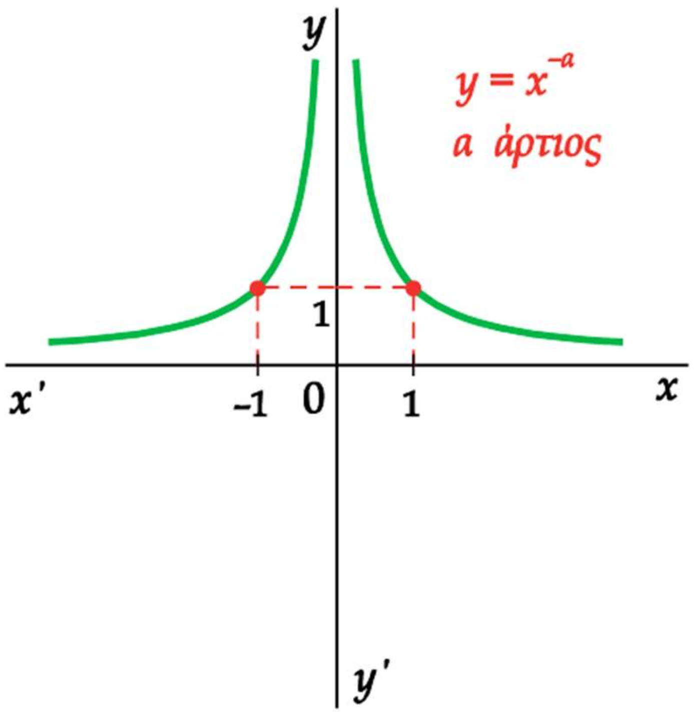
Πραγματικές συναρτήσεις

- Συναρτήσεις Δυνάμεων

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Όταν ο a είναι αρνητικός ακέραιος



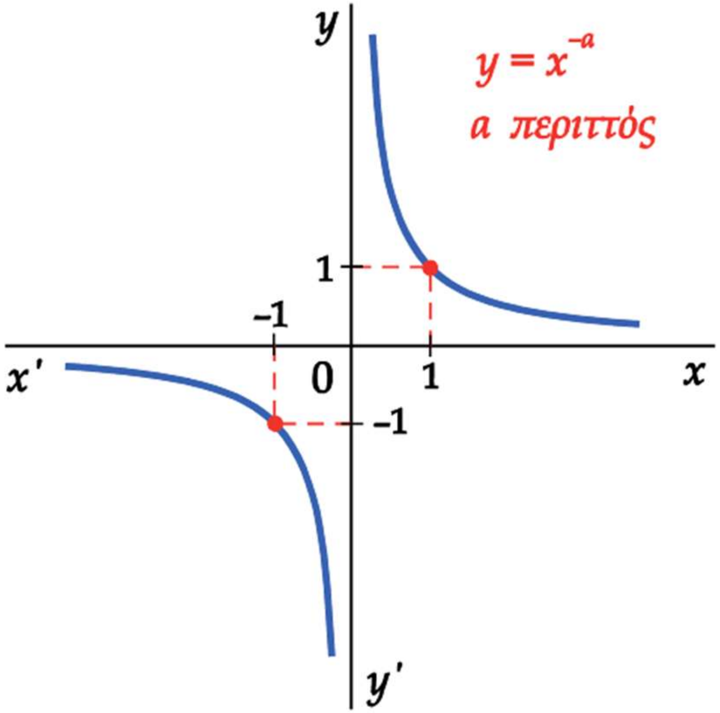


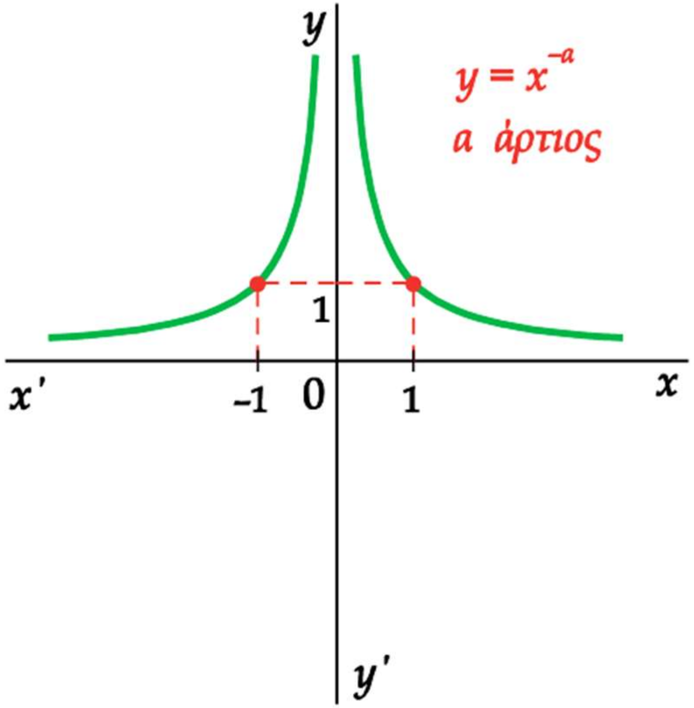
Πραγματικές συναρτήσεις

- Συναρτήσεις Δυνάμεων

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Όταν ο a είναι αρνητικός ακέραιος

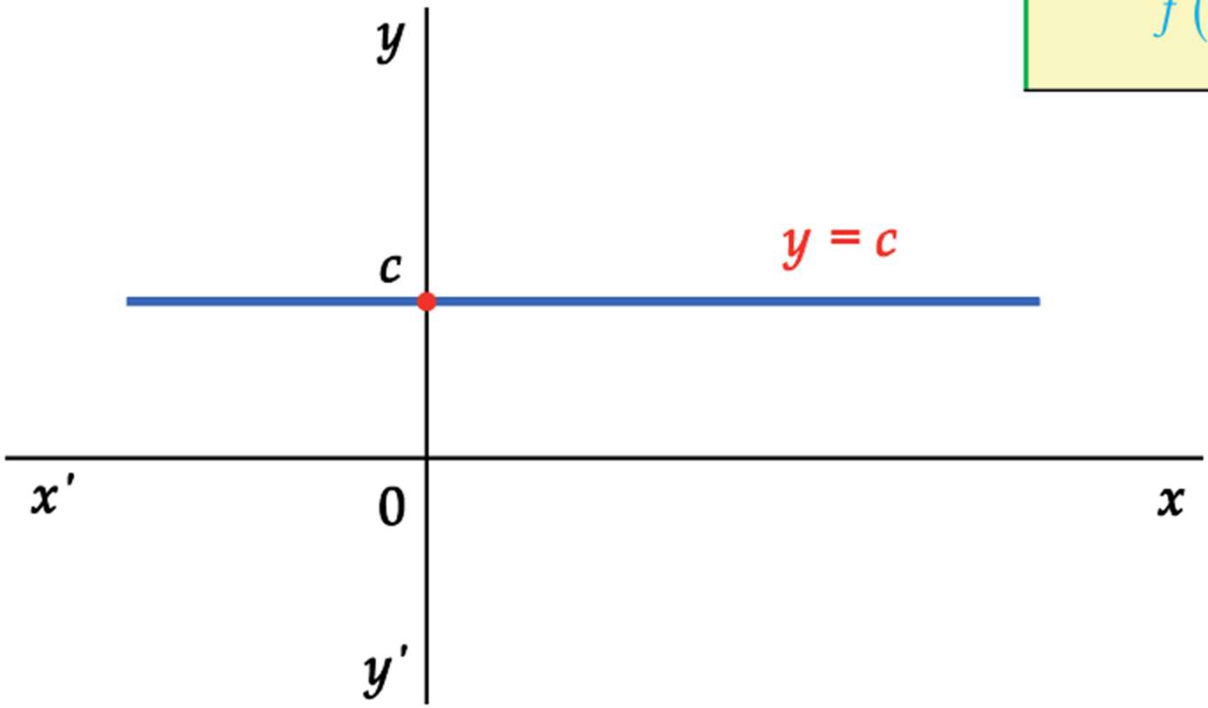




Πραγματικές συναρτήσεις

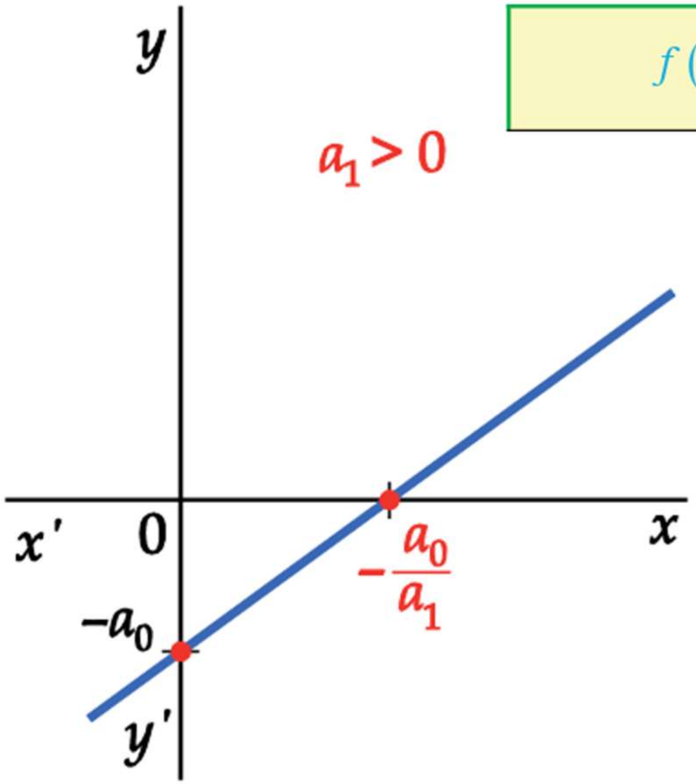
- Πολυωνυμικές συναρτήσεις
  - συναρτήσεις της μορφής: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$, όπου $a_n ,\ldots, a_1$, a_o πραγματικοί αριθμοί.
  - η σταθερή συνάρτηση

$$f(x) = c$$

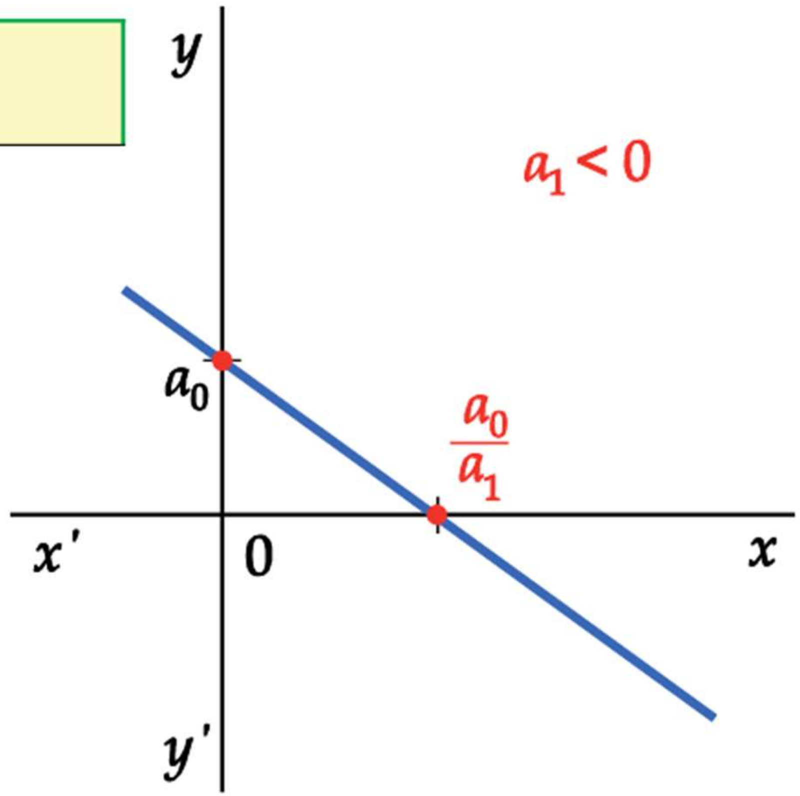


Πραγματικές συναρτήσεις

- Πολυωνυμικές συναρτήσεις
  - συναρτήσεις της μορφής: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$, όπου $a_n, \ldots, a_1, a_o$ πραγματικοί αριθμοί.
  - η πρωτοβάθμια οποία ονομάζεται και γραμμική



$$f(x) = a_1 x + a_0$$



Πραγματικές συναρτήσεις

- Γραμμικές Συναρτήσεις

Πρόταση 8.1. *Το άθροισμα δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση.*

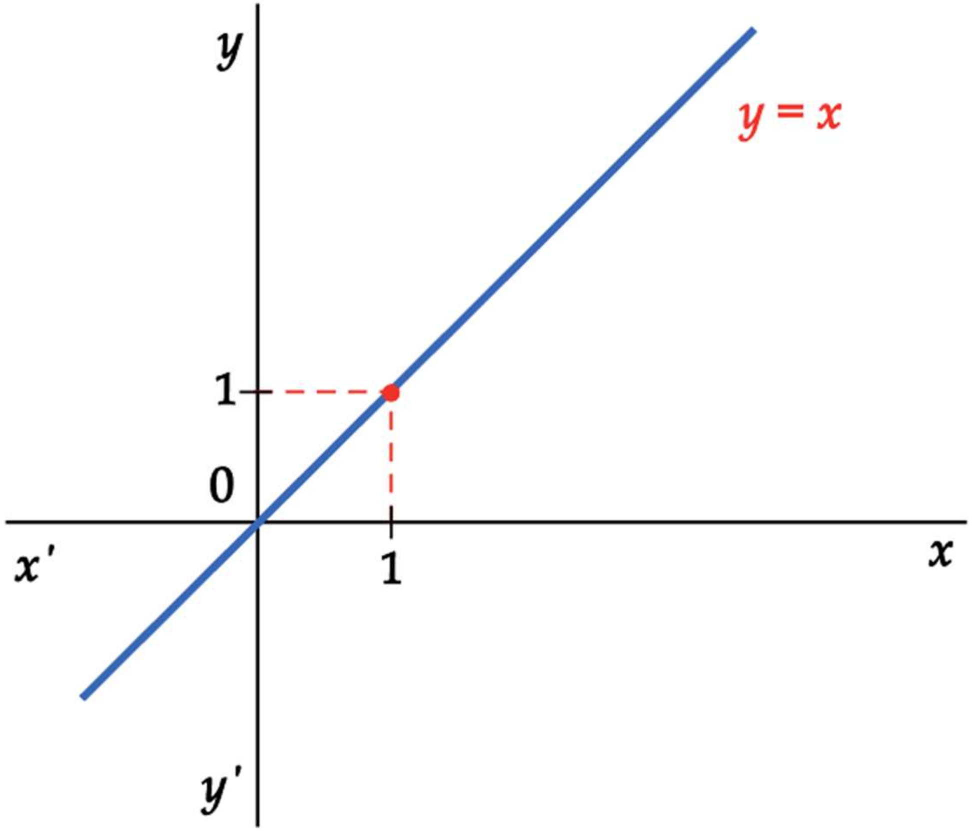
Πρόταση 8.2. *Αν η f είναι γραμμική συνάρτηση, τότε και η λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι γραμμική συνάρτηση.*

Πόρισμα 8.1. *Αν οι f, g είναι γραμμικές συναρτήσεις,, τότε και η $\kappa f + \lambda g$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι γραμμική συνάρτηση.*

Πρόταση 8.3. *Η σύνθεση δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση.*

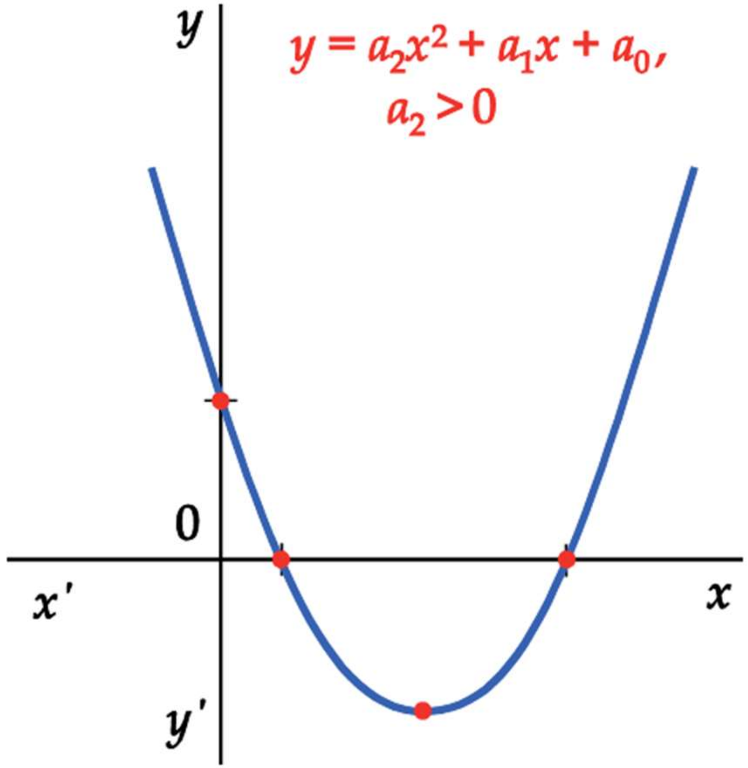
Πραγματικές συναρτήσεις

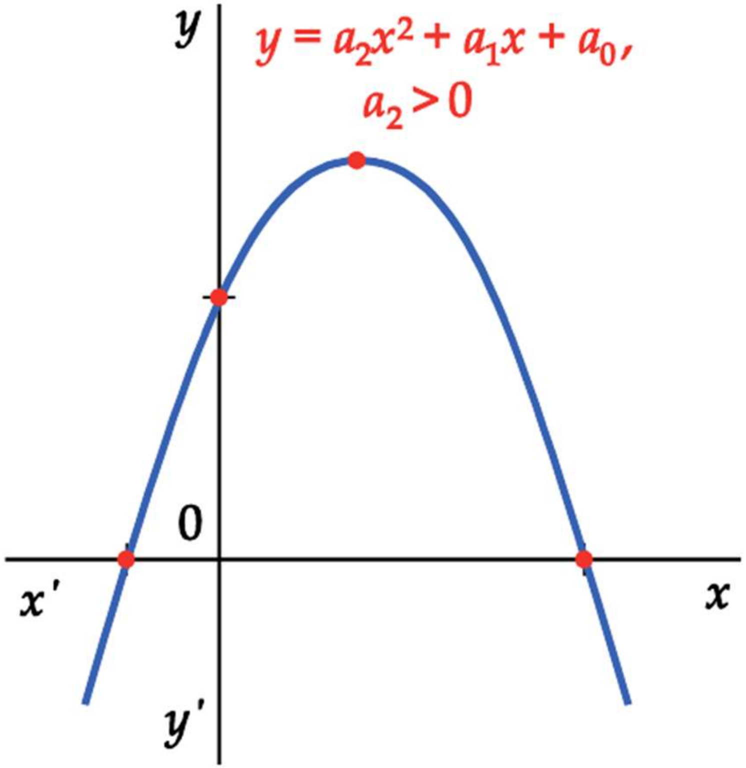
- Πολυωνυμικές συναρτήσεις
  - συναρτήσεις της μορφής: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$, όπου $a_n, \ldots, a_1, a_o$ πραγματικοί αριθμοί.
  - η πρωτοβάθμια οποία ονομάζεται και γραμμική
    - Όταν $a_1 = 1$ και $a_o = 0$



Πραγματικές συναρτήσεις

- Πολυωνυμικές συναρτήσεις
  - συναρτήσεις της μορφής: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$, όπου $a_n ,\ldots, a_1$, a_o πραγματικοί αριθμοί.
  - η δευτεροβάθμια
    - η γραφική παράσταση της οποίας ονομάζεται παραβολή

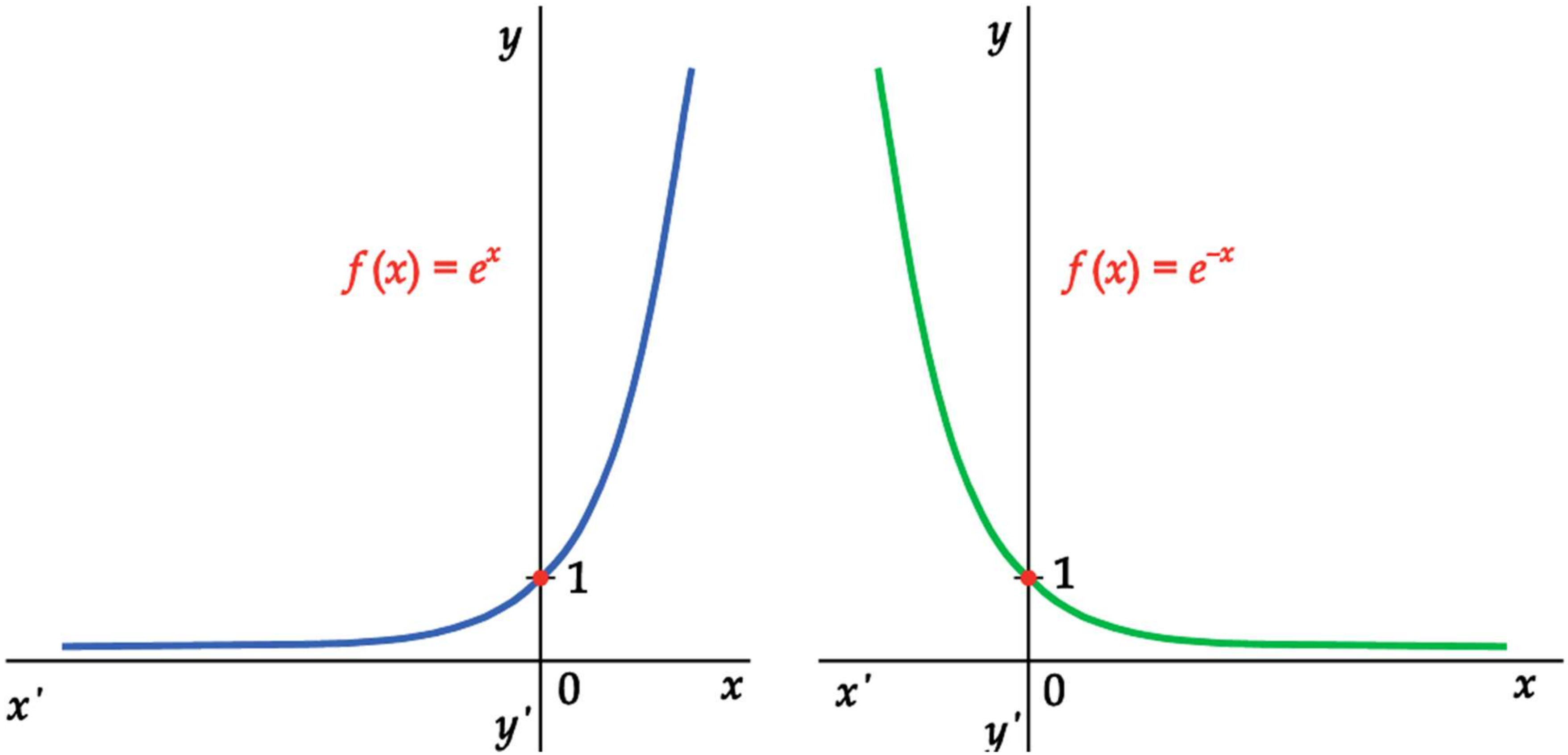




Πραγματικές συναρτήσεις

- Εκθετική συνάρτηση

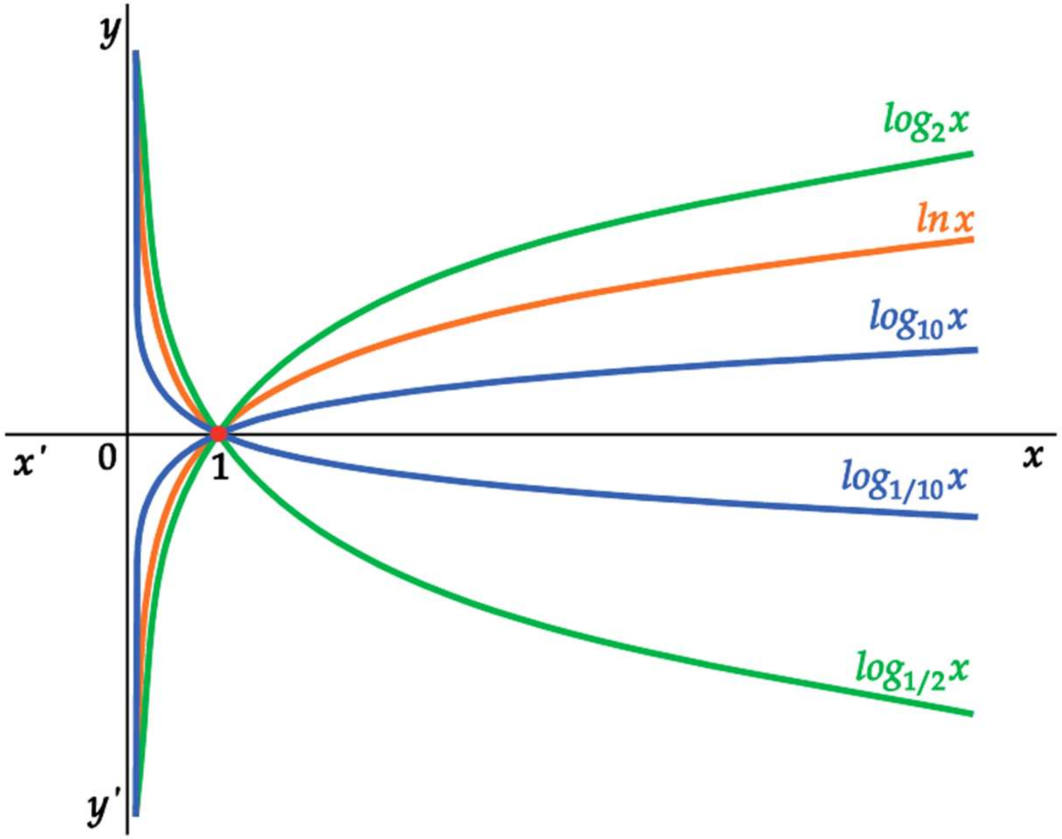
$$f(x) = a^x, \quad a > 0 \quad \text{και} \quad a \neq 1$$



Πραγματικές συναρτήσεις

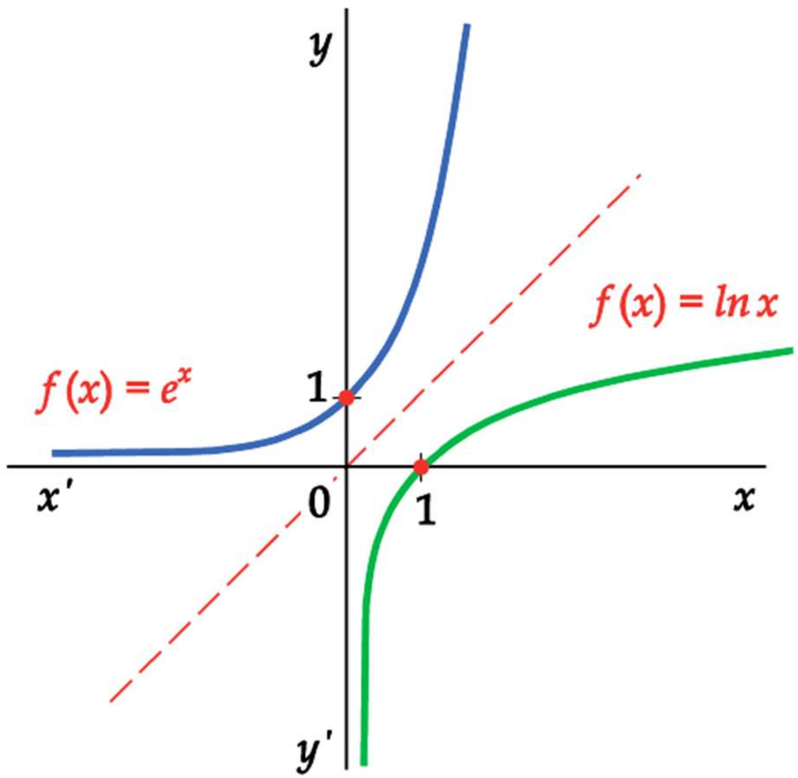
- Λογαριθμική συνάρτηση

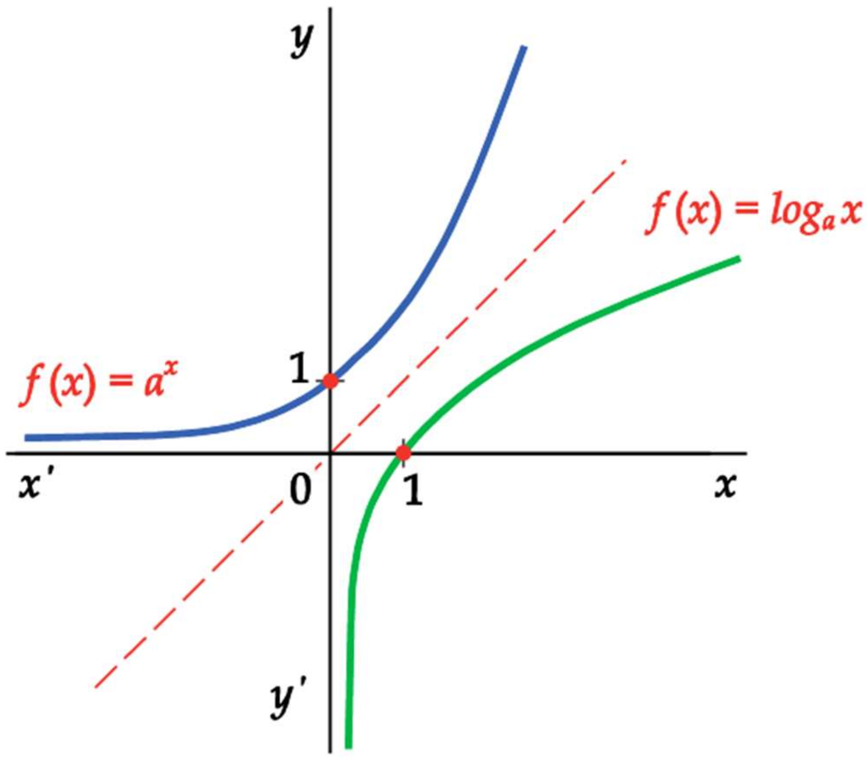
$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0 \quad \text{και} \quad a \neq 1$$



Πραγματικές συναρτήσεις

- Η λογαριθμική συνάρτηση είναι η αντίστροφή της εκθετικής

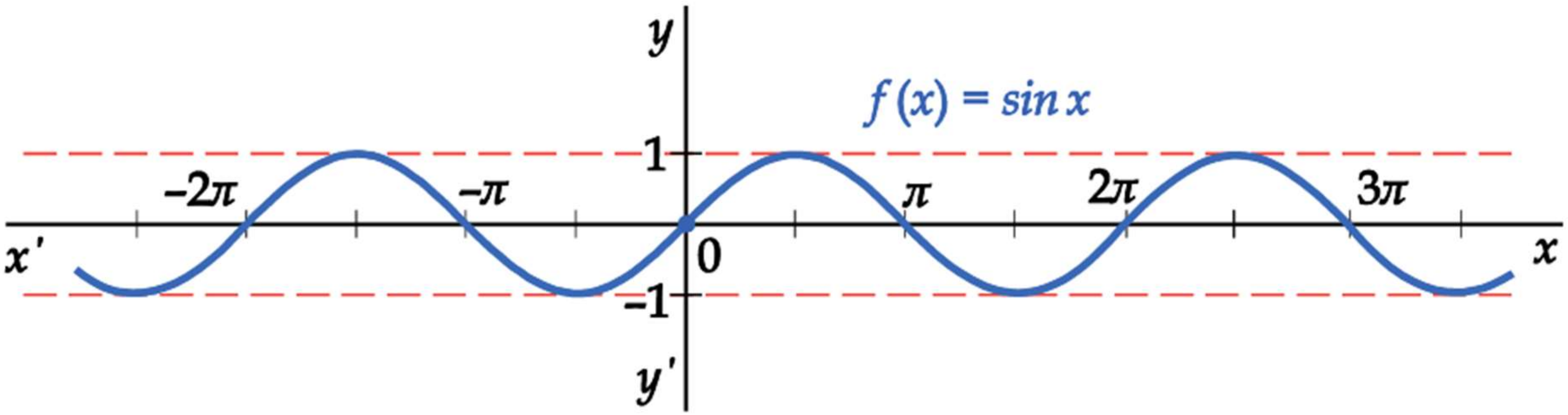




Πραγματικές συναρτήσεις

- τριγωνομετρικές συναρτήσεις

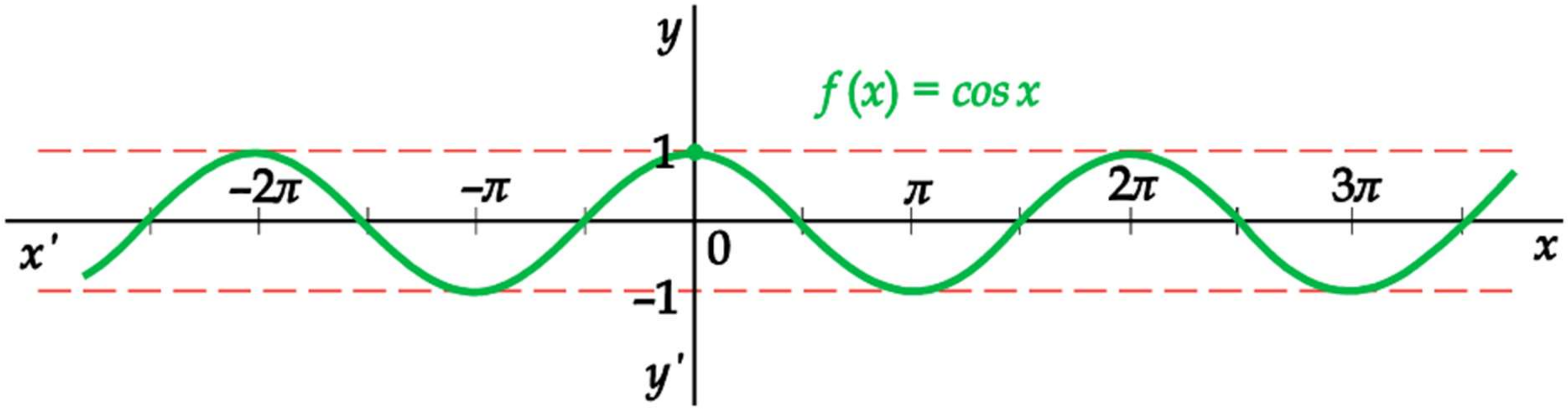
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] \ \text{με} \ x \to \sin x$$



Πραγματικές συναρτήσεις

- τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1] \ \text{με} \ x \to \cos x$$

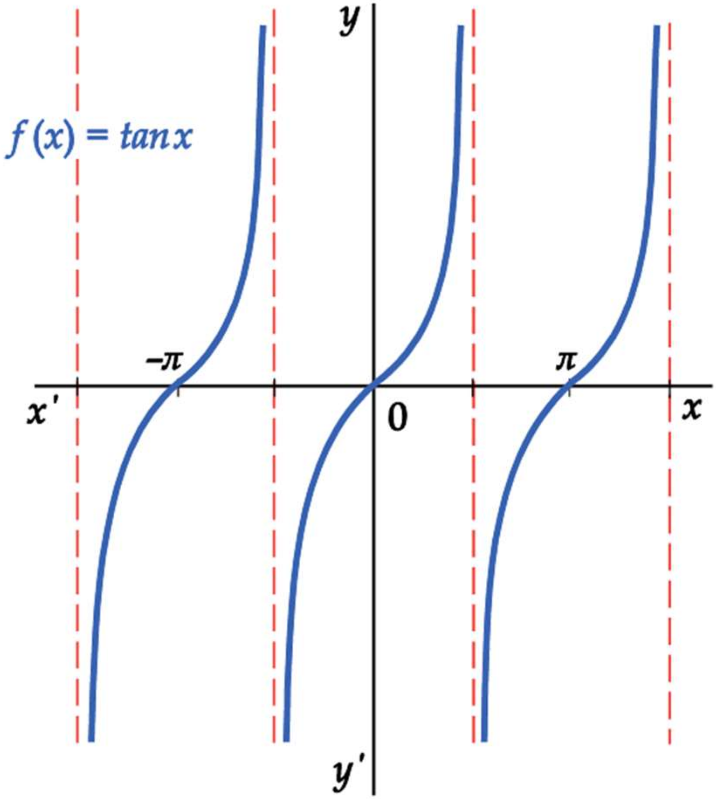


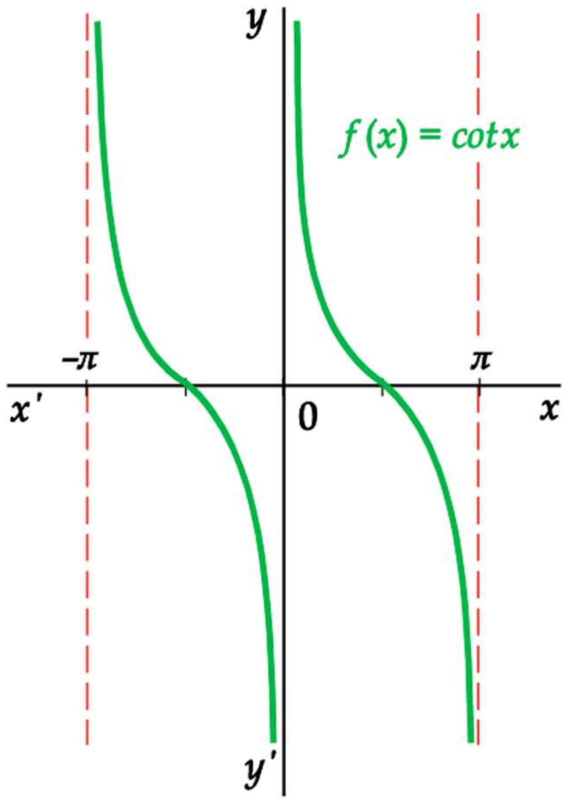
Πραγματικές συναρτήσεις

- τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\tan : \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \to \mathbb{R} \quad \mu\varepsilon \quad x \to \tan x$$

$$\cot : \mathbb{R} - \{\kappa\pi\} \to \mathbb{R} \quad \mu\varepsilon \quad x \to \cot x$$



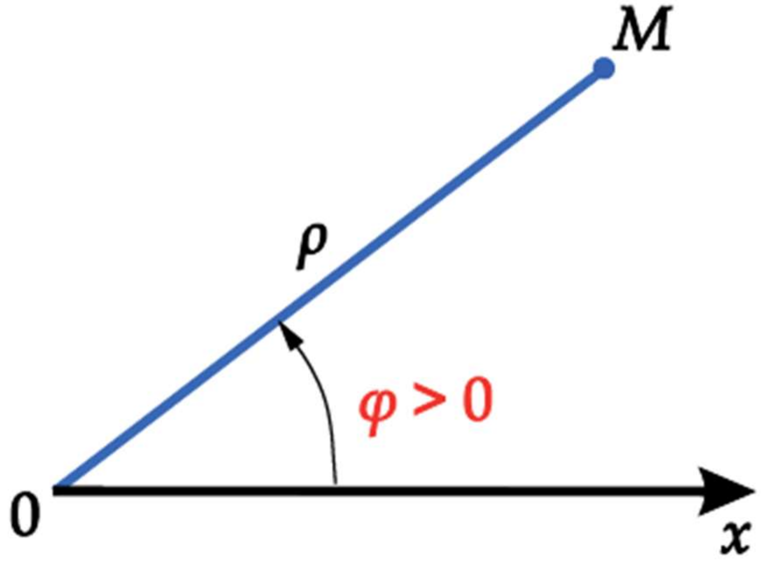


Πραγματικές συναρτήσεις

- Πολικό σύστημα συντεταγμένων
  - τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο μπορούμε να την καθορίσουμε, δημιουργώντας αυτό που ονομάζουμε πολικό σύστημα συντεταγμένων
  - Επιλέγουμε ένα σημείο Ο του επιπέδου, το οποίο ονομάζουμε πόλο.
  - Στη συνέχεια θεωρούμε μια ημιευθεία με αρχή το Ο . Την ημιευθεία αυτή την ονομάζουμε πολικό άξονα.
  - Η θέση ενός σημείου Μ του επιπέδου μπορεί σαφώς να καθορισθεί από τα ακόλουθα δύο μεγέθη:
    - i. την απόσταση ρ του Μ από τον πόλο,
    - ii. την γωνία φ που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ με τον πολικό άξονα.
  - Η θετική φορά της γωνίας φ, είναι αυτή που δημιουργείται από κίνηση αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου.
  - Οι αριθμοί ρ και φ ονομάζονται πολικές συντεταγμένες του σημείου Μ

Πραγματικές συναρτήσεις

- Πολικό σύστημα συντεταγμένων



- Το ρ, ως αριθμός που μετρά απόσταση, είναι πάντοτε μη αρνητικός.
- Αν η γωνία φ λαμβάνει τιμές στο διάστημα [0, 2π) , τότε κάθε σημείο του επιπέδου, εκτός από τον πόλο, προσδιορίζεται πλήρως από ένα ζεύγος αριθμών, που είναι οι τιμές των μεγεθών ρ και φ.
- Ο πόλος: κάθε ζεύγος αριθμών με ρ = 0 και φ τυχούσα τιμή

Πραγματικές συναρτήσεις

- Πολικό σύστημα συντεταγμένων