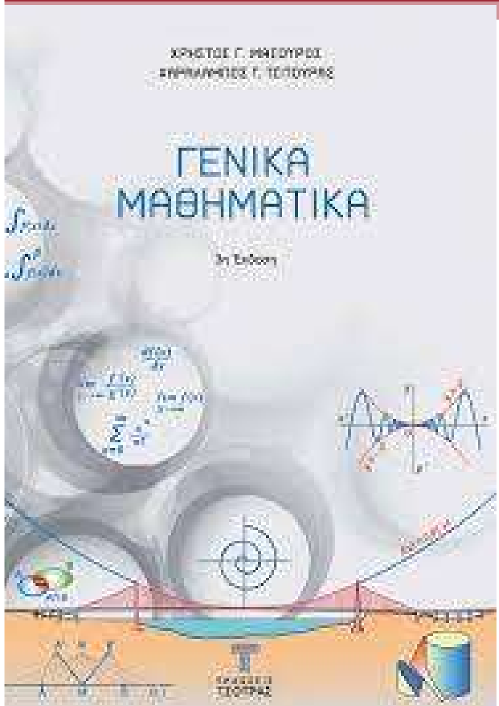
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Σύγκλιση Συναρτήσεων



Σταμάτης Βολιώτης
5ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

Όριο συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$$

- Τι συμβαίνει με τις τιμές της f όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές "κοντά" στο 2 ?

x	1.5	1.8	1.99	1.999	1.9999	1.99999
$f(x)$	3.5	4.4	4.97	4.997	4.9997	4.99997

x	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001
$f(x)$	6.5	5.3	5.03	5.003	5.0003	5.00003

Όριο συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$$

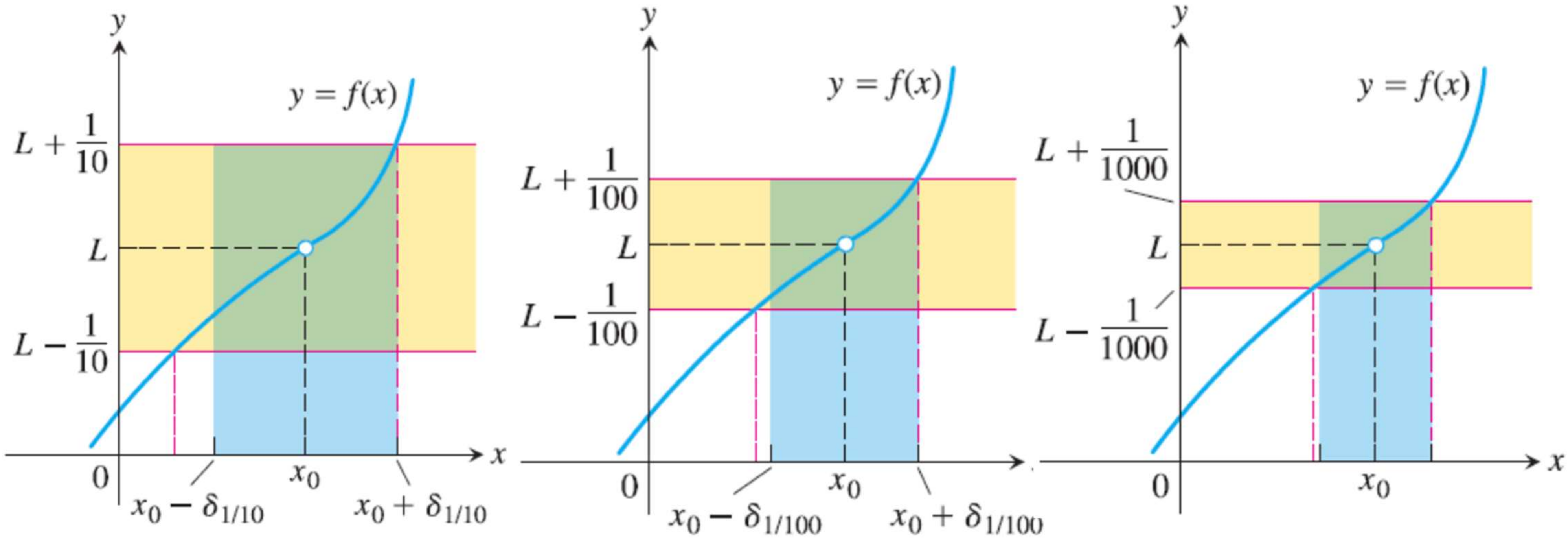
- Τι συμβαίνει με τις τιμές της f όταν η μεταβλητή x παίρνει τιμές "κοντά" στο 2 ?

x	1.5	1.8	1.99	1.999	1.9999	1.99999
$f(x)$	3.5	4.4	4.97	4.997	4.9997	4.99997

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

x	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001
$f(x)$	6.5	5.3	5.03	5.003	5.0003	5.00003

Όριο συνάρτησης



Εικόνες από https://www.csd.uoc.gr/~hy110/lectures/Lecture_3.pdf

Όριο συνάρτησης

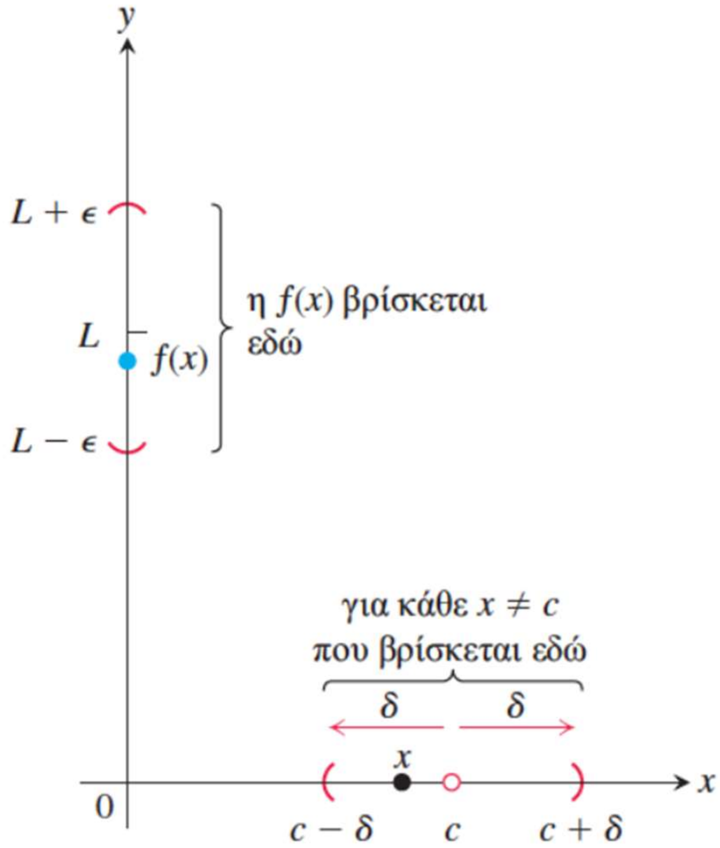
Ορισμός 2.1. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σε μια περιοχή του σημείου a. Λέμε ότι η $f(x)$ **έχει όριο το** b**, καθώς το** x **τείνει στο** a, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει κάποιος θετικός πραγματικός δ τέτοιος ώστε, για κάθε x διάφορο του a για το οποίο ισχύει η ανισότητα $|x-a|<\delta$, να ισχύει ότι

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

"το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο a είναι το b"

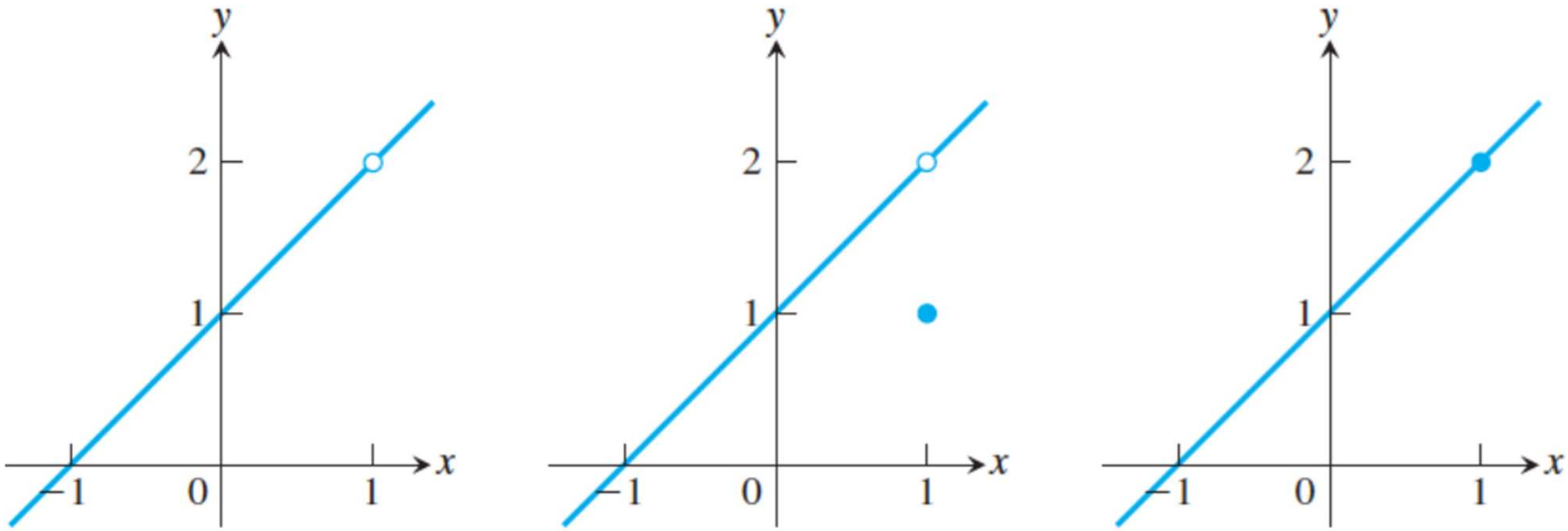
"η συνάρτηση $f(x)$ συγκλίνει στο b όταν το x τείνει στο a".



Εικόνες από https://www.csd.uoc.gr/~hy110/lectures/Lecture_3.pdf

Όριο συνάρτησης

- Για να έχει μια συνάρτηση όριο σε έναν αριθμό a, δεν είναι αναγκαίο η συνάρτηση να ορίζεται στο a



(α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(β) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(γ) $h(x) = x + 1$

Εικόνες από https://www.csd.uoc.gr/~hy110/lectures/Lecture_3.pdf

Όριο συνάρτησης

Θεώρημα 2.1. *Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σημείο x_o, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

- Είναι δυνατόν μια συνάρτηση f (x) να οδηγείται στο όριο b_1 καθώς η μεταβλητή προσεγγίζει τον αριθμό a λαμβάνοντας τιμές μόνον μικρότερες του a

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b_1$$

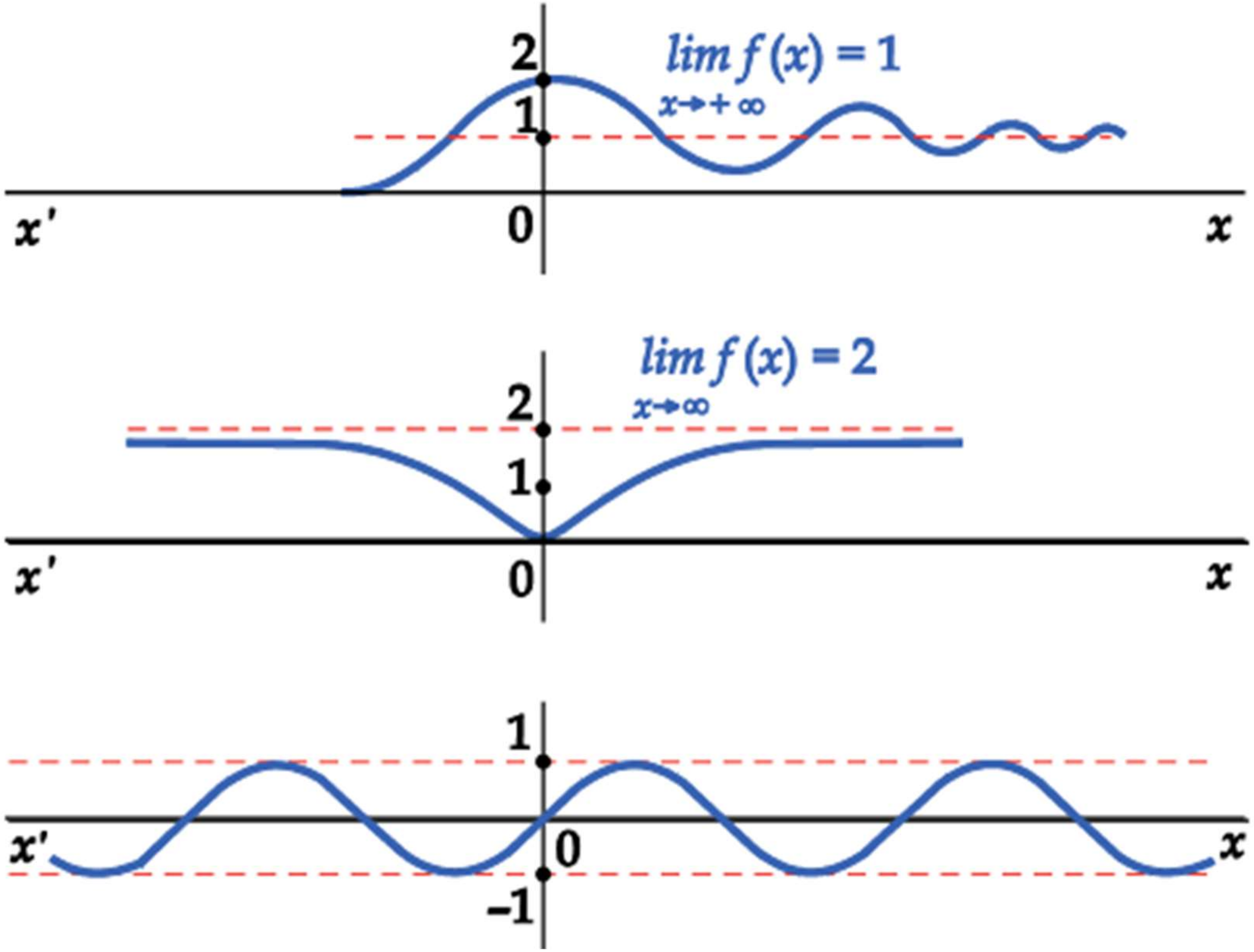
- Είναι δυνατόν μια συνάρτηση f (x) να οδηγείται στο όριο b_2 καθώς η μεταβλητή προσεγγίζει τον αριθμό a λαμβάνοντας τιμές μόνον μεγαλύτερες του a

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b_2$$

- Αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή αν $b_1 = b_2 = b$, τότε το b είναι το όριο της συνάρτησης στο a

Όριο συνάρτησης

- Είναι δυνατόν η μεταβλητή x να τείνει στο άπειρο



Όριο συνάρτησης

- Είναι δυνατόν η μεταβλητή x να τείνει στο άπειρο

Ορισμός 2.2. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει **όριο το b, καθώς το x τείνει στο άπειρο**, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε, όσο μικρός και αν είναι αυτός, υπάρχει θετικός πραγματικός N, έτσι ώστε για όλες τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x| > N$, να πληρούται η ανισοτική σχέση

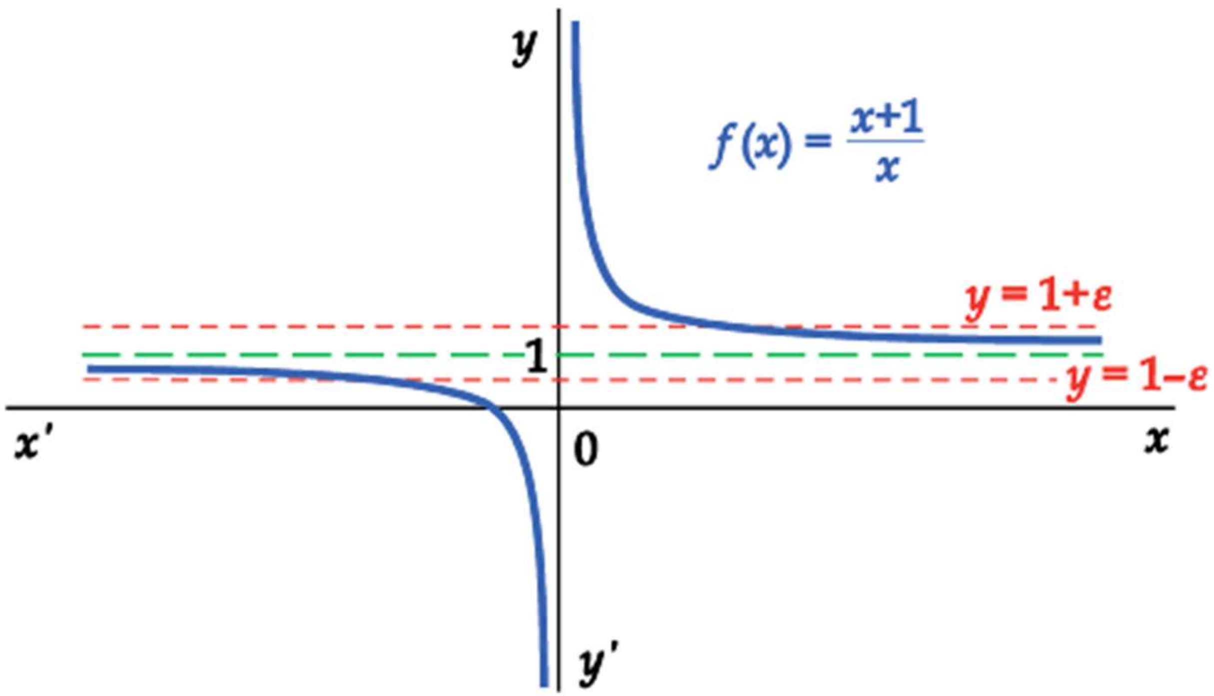
$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Όριο συνάρτησης

- Είναι δυνατόν η μεταβλητή x να τείνει στο άπειρο

Ορισμός 2.3. Μια ευθεία $y = b$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ αν

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad ή \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$



Ιδιότητες των ορίων

- Αν υπάρχουν τα όρια lim f(x) και lim g(x) στο ℝ, τότε:

1. *Όριο αθροίσματος:*

$$\lim\left[f(x)+g(x)\right]=\lim f(x)+\lim g(x)$$

Το όριο του αθροίσματος δύο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των ορίων τους.

2. *Όριο διαφοράς:*

$$\lim\left[f(x)-g(x)\right]=\lim f(x)-\lim g(x)$$

Το όριο της διαφοράς δύο συναρτήσεων ισούται με τη διαφορά των ορίων τους.

3. *Όριο γινομένου:*

$$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

Το όριο του γινομένου δύο συναρτήσεων ισούται με το γινόμενο των ορίων τους.

Ιδιότητες των ορίων

- Αν υπάρχουν τα όρια lim f(x) και lim g(x) στο ℝ, τότε:

4. *Όριο σταθερού πολλαπλασίου:*

$$\lim\left[k\cdot f(x)\right]=k\cdot\lim f(x),\quad k\in\mathbb{R}$$

Το όριο του γινομένου σταθεράς επί συνάρτηση ισούται με το γινόμενο της σταθεράς επί το όριο της συνάρτησης.

5. *Όριο πηλίκου:*

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)},\ \text{αν}\ \lim g(x)\neq 0$$

Το όριο του πηλίκου δύο συναρτήσεων ισούται με το πηλίκο των ορίων τους, υπό τον όρο ότι το όριο του παρονομαστή δεν είναι μηδέν.

Ιδιότητες των ορίων

- Αν υπάρχουν τα όρια lim f(x) και lim g(x) στο ℝ, τότε:

6. *Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης:*

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

και

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad \text{αν} \quad Q(a) \neq 0$$

Τα όρια των πολυωνυμικών συναρτήσεων και των ρητών συναρτήσεων σε έναν πραγματικό αριθμό α προκύπτουν με αντικατάσταση, υπό τον όρο ότι η τιμή του πολυωνύμου του παρονομαστή στις ρητές συναρτήσεις δεν είναι μηδέν.

Ιδιότητες των ορίων

- Αν υπάρχουν τα όρια lim f(x) και lim g(x) στο ℝ, τότε:

7. *Όριο ρητής δύναμης:*

$$\lim\left[f(x)\right]^{\frac{\mu}{\nu}} = \left[\lim f(x)\right]^{\frac{\mu}{\nu}},\ \ \mu,\nu \in \mathbb{Z},\ \ \nu \neq 0$$

εφόσον το $\left[\lim f(x)\right]^{\frac{\mu}{\nu}}$ *είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή το όριο ρητής δύναμης συνάρτησης ισούται με το όριο ισούται με το όριο της συνάρτησης, υψωμένο στη δύναμη αυτή αν* $\left[\lim f(x)\right]^{\frac{\mu}{\nu}} \in \mathbb{R}$. *Ειδικότερα*

$$\lim\left[f(x)\right]^{\mu} = \left[\lim f(x)\right]^{\mu},\ \ k \in \mathbb{N}$$

και

$$\lim \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim f(x)}$$

αν $f(x) \geq 0$ *στην περιοχή που τείνει η μεταβλητή* x .

Ιδιότητες των ορίων

► **Παράδειγμα 3.1.** Να υπολογισθούν τα όρια:

$$(\alpha)\ \lim_{x\to a}\left(x^5+2x^2+x+1\right),\quad (\beta)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2},\quad (\gamma)\ \lim_{x\to -2}\sqrt{x^2+1}$$

Ιδιότητες των ορίων

► **Παράδειγμα 3.1.** Να υπολογισθούν τα όρια:

$$\text{(α)}\ \lim_{x\to a}\left(x^5+2x^2+x+1\right),\quad \text{(β)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2},\quad \text{(γ)}\ \lim_{x\to -2}\sqrt{x^2+1}$$

Λύση. Η πρώτη είναι πολυωνυμική συνάρτηση, συνεπώς με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\lim_{x\to a}\left(x^5+2x^2+x+1\right)=a^5+2a^2+a+1$$

Η δεύτερη είναι ρητή συνάρτηση, και

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-2\right)=2^2-2=2\neq 0\,.$$

Συνεπώς με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2}=\frac{2^2-5\cdot 2+6}{2^2-2}=\frac{0}{2}=0$$

Τέλος για την τρίτη έχουμε:

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{x^2+1}=\sqrt{\lim_{x\to -2}\left(x^2+1\right)}=\sqrt{(-2)^2+1}=\sqrt{5}$$ ◄

Ιδιότητες των ορίων

► **Παράδειγμα 3.2.** Αν

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{2} \text{ και } \lim_{x\to a} g(x) = \frac{3}{2}$$

να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to a}\left[2f(x) - 4g(x)\right]$

(β) $\lim_{x\to a}\sqrt[4]{f(x)}$

(γ) $\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]^{\frac{2}{3}}$

(δ) $\lim_{x\to a}\dfrac{3+2f(x)}{f^2(x)-g^2(x)}$

Ιδιότητες των ορίων

► **Παράδειγμα 3.2.** Αν

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{2} \text{ και } \lim_{x\to a} g(x) = \frac{3}{2}$$

να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim_{x\to a}\left[2f(x)-4g(x)\right]$

(β) $\lim_{x\to a}\sqrt[4]{f(x)}$

(γ) $\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]^{\frac{2}{3}}$

(δ) $\lim_{x\to a}\dfrac{3+2f(x)}{f^2(x)-g^2(x)}$

(α) $\lim_{x\to a}\left[2f(x)-4g(x)\right] = 2\lim_{x\to a} f(x) - 4\lim_{x\to a} g(x) = 2\cdot\frac{1}{2} - 4\frac{3}{2} = -5$

(β) $\lim_{x\to a}\sqrt[4]{f(x)} = \sqrt[4]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

(γ) $\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]^{\frac{2}{3}} = \left[\lim_{x\to a} g(x)\right]^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{3}{2}\right]^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

(δ) Επειδή

$$\lim_{x\to a}\left[f^2(x)-g^2(x)\right] = \lim_{x\to a} f^2(x) - \lim_{x\to a} g^2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{8}{4} = -2 \neq 0$$

υπάρχει το όριο και είναι

$$\lim_{x\to a}\frac{3+2f(x)}{f^2(x)-g^2(x)} = \frac{\lim_{x\to a}\left[3+2f(x)\right]}{\lim_{x\to a}\left[f^2(x)-g^2(x)\right]} = \frac{\left[3+2\lim_{x\to a} f(x)\right]}{\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^2 - \left[\lim_{x\to a} g(x)\right]^2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Ιδιότητες των ορίων

- Αν υπάρχουν τα όρια lim f(x) και lim g(x) στο ℝ, τότε:

Θεώρημα 3.2. *Αν, σε μια περιοχή του a, για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύει ότι*

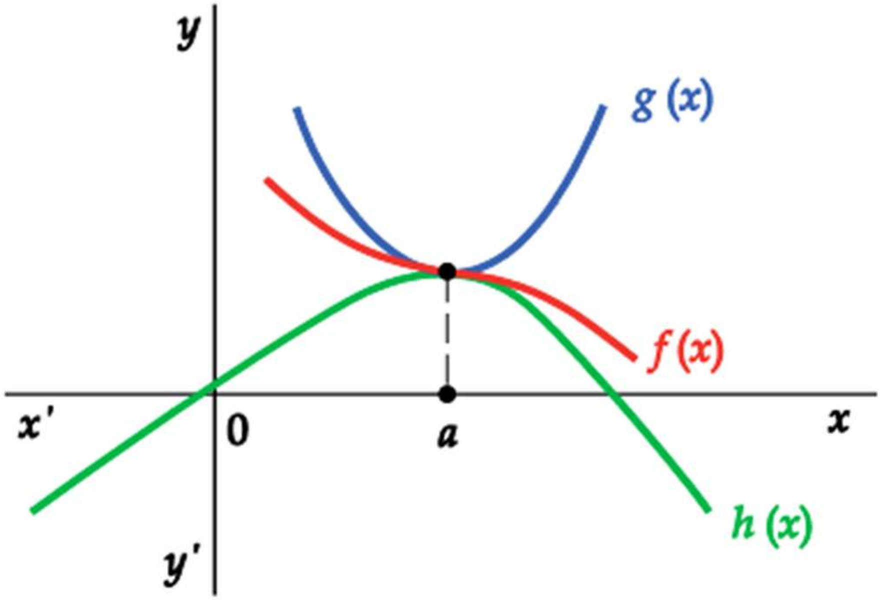
$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

και για τις h, g ισχύει ότι

$$\lim_{x \to a} h(x) = b = \lim_{x \to a} g(x)$$

τότε

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$



Μη πεπερασμένα όρια

- Συναρτήσεις των οποίων οι τιμές αυξάνονται ή ελαττώνονται "απεριόριστα"
  - η μεταβλητή x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό a
  - η μεταβλητή τείνει στο άπειρο (θετικό ή αρνητικό)

$$f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$$

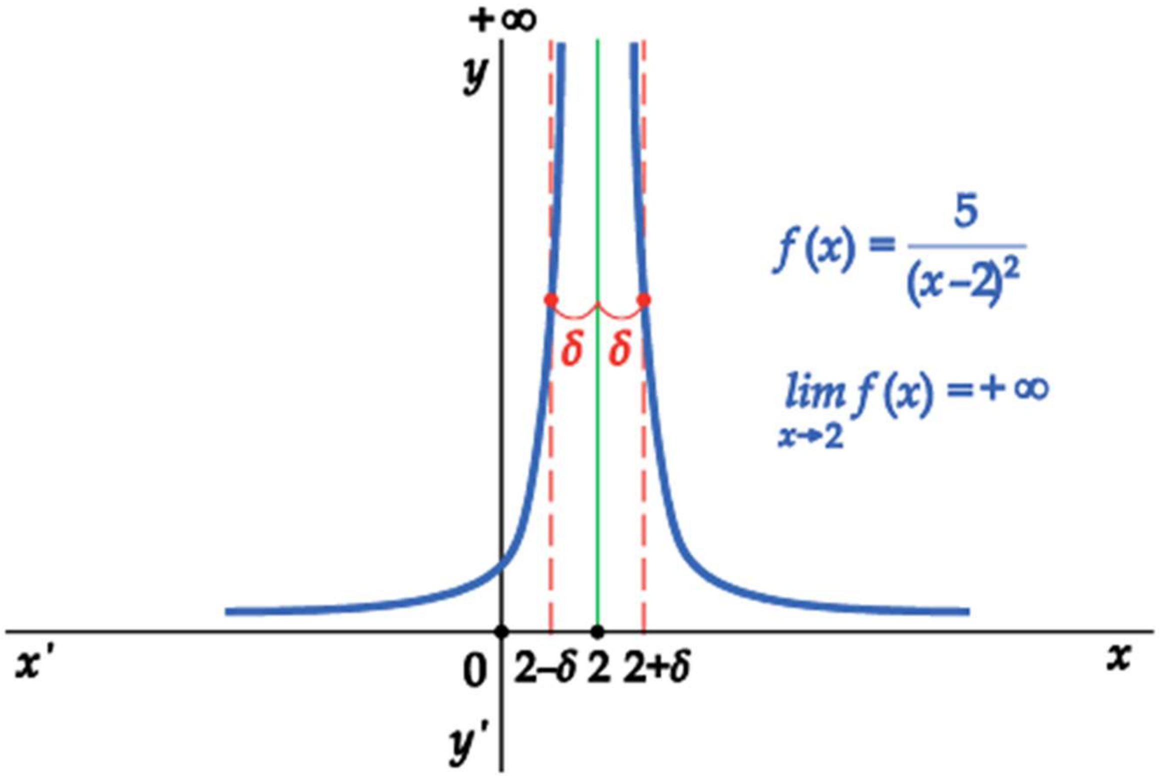
x	1	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	1.9999
$f(x)$	5	20	80	500	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^8$

x	3	2.5	2.25	2.1	2.01	2.001	2.0001
$f(x)$	5	20	80	500	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^8$

$$\lim_{x \to 2} \frac{5}{(x-2)^2} = +\infty$$

Μη πεπερασμένα όρια

- Συναρτήσεις των οποίων οι τιμές αυξάνονται ή ελαττώνονται “απεριόριστα”
    - η μεταβλητή x πλησιάζει έναν πραγματικό αριθμό a
    - η μεταβλητή τείνει στο άπειρο (θετικό ή αρνητικό)



Μη πεπερασμένα όρια

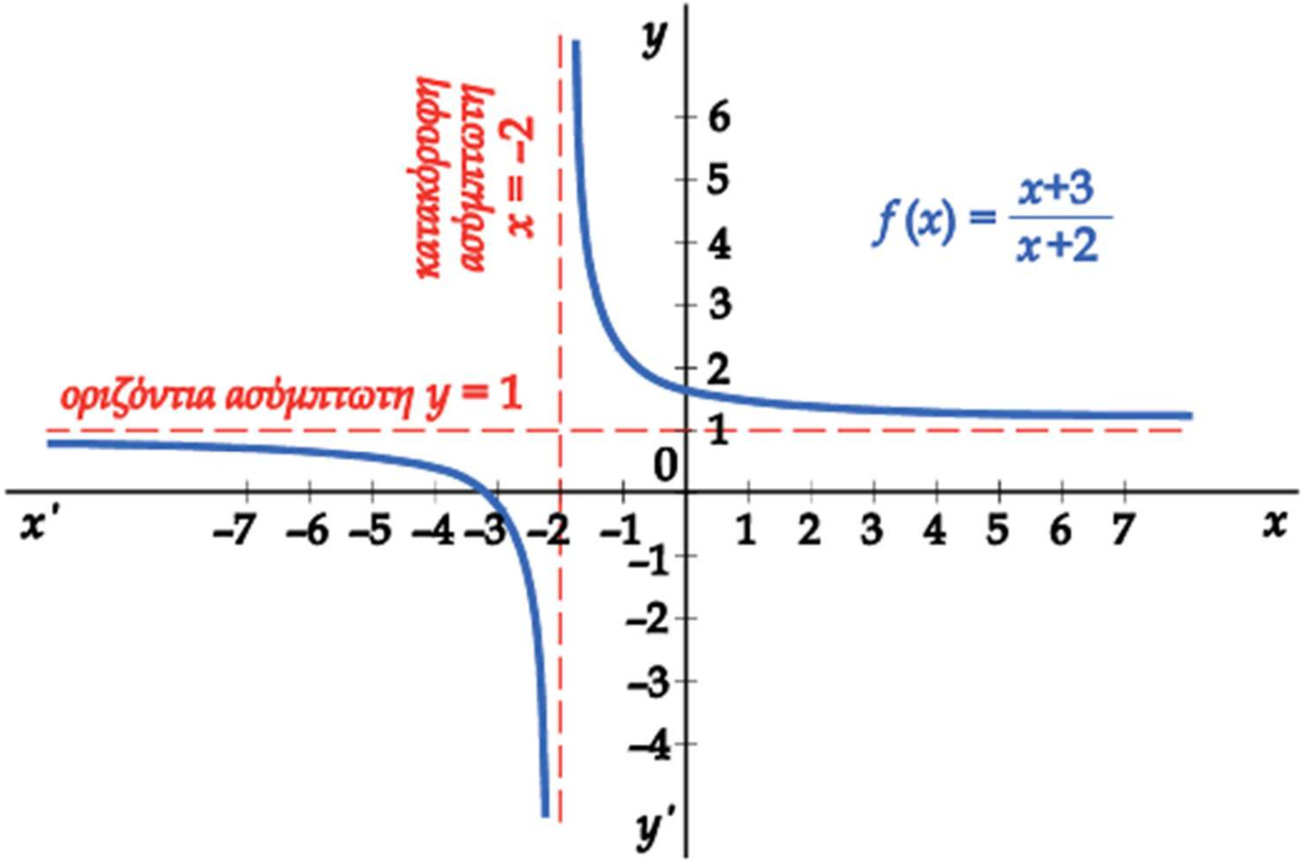
Ορισμός 4.1. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει **όριο το $+\infty$, όταν το x τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό a**, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M, όσο μεγάλος και αν είναι αυτός, υπάρχει θετικός πραγματικός δ, έτσι ώστε για κάθε x διάφορο του a για το οποίο ισχύει η ανισότητα $|x-a|<\delta$, να ισχύει ότι $f(x)>M$.

Ορισμός 4.2. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει **όριο το $-\infty$, όταν το x τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό a**, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M, όσο μεγάλος και αν είναι αυτός, υπάρχει θετικός πραγματικός δ, έτσι ώστε για κάθε x διάφορο του a για το οποίο ισχύει η ανισότητα $|x-a|<\delta$, να ισχύει ότι $f(x)<-M$.

Μη πεπερασμένα όρια

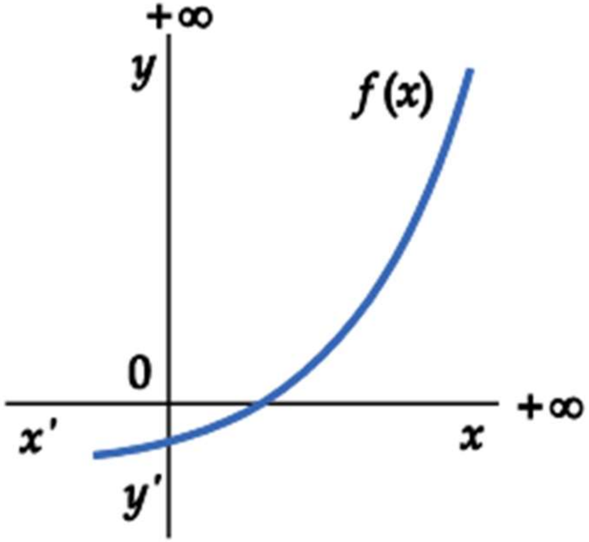
Ορισμός 4.4. Η ευθεία $x = a$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ αν

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ή \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

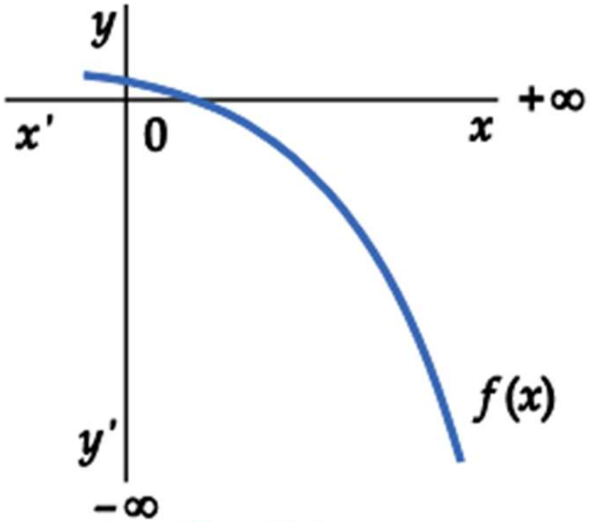


Μη πεπερασμένα όρια

Συναρτήσεις που έχουν όριο το άπειρο καθώς η μεταβλητή τους τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

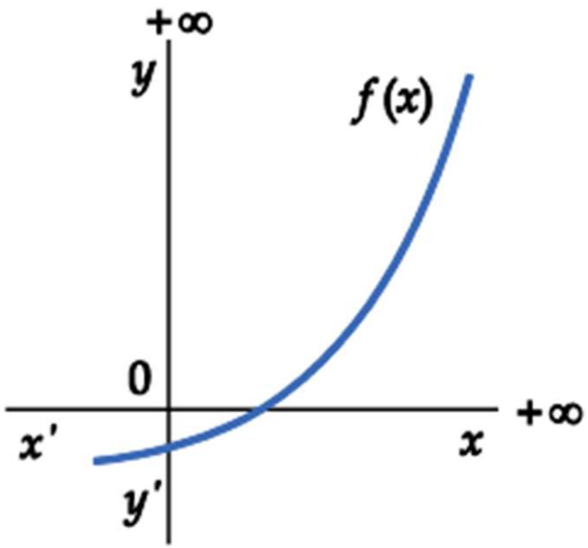
?

Καθώς η μεταβλητή x τείνει στο +∞, στο πρώτο η συνάρτηση “χάνεται” στο +∞ ενώ στο δεύτερο “εξαφανίζεται” στο −∞

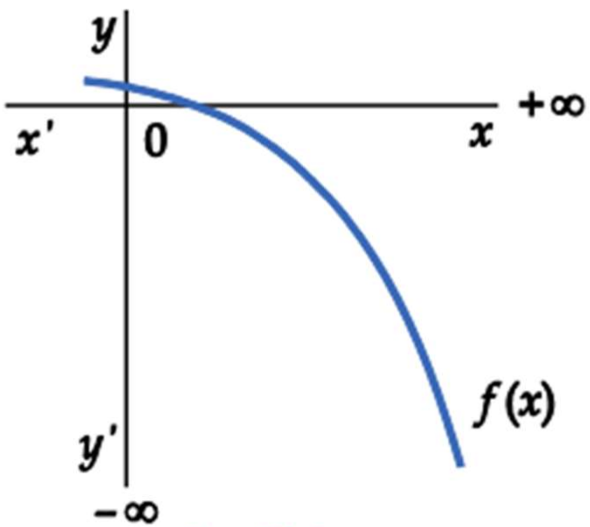
Μη πεπερασμένα όρια

Ορισμός 4.5. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει **όριο το $+\infty$, όταν το x τείνει στο $+\infty$**, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M, υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x με $x>K$, να ισχύει $f(x)>M$.

Ορισμός 4.6. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει **όριο το $-\infty$, όταν το x τείνει στο $+\infty$**, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M, υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x με $x>K$, να ισχύει $f(x)<-M$.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

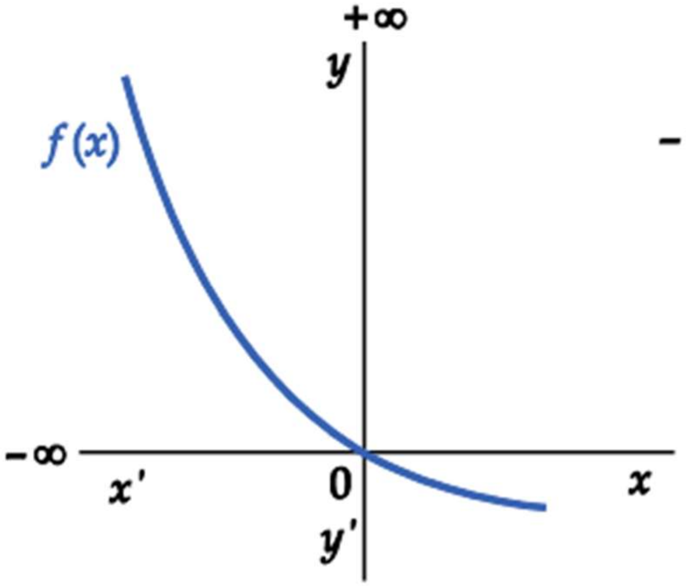


$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

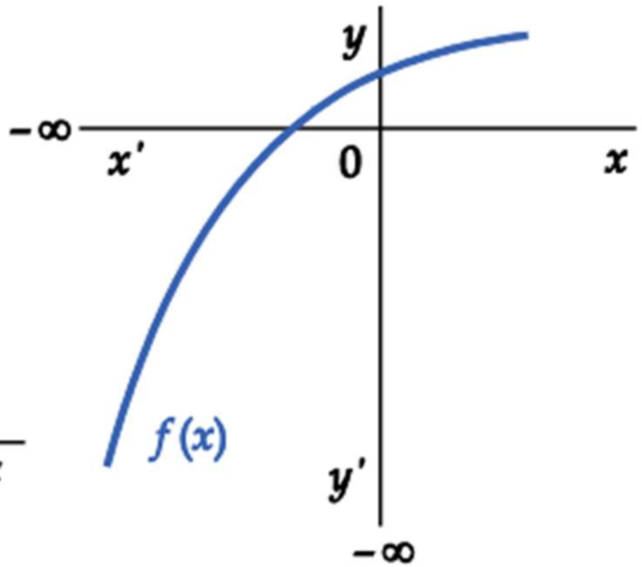
Μη πεπερασμένα όρια

Ορισμός 4.7. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει **όριο το $+\infty$, όταν το x τείνει στο $-\infty$**, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M, υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x με $x<-K$, να ισχύει $f(x)>M$.

Ορισμός 4.8. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει **όριο το $-\infty$, όταν το x τείνει στο $-\infty$**, αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M, υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x με $x<-K$, να ισχύει $f(x)<-M$.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Μη πεπερασμένα όρια

- Ιδιότητες μη πεπερασμένων ορίων

  - Αν $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to a} \left[-f(x) \right] = -\infty$
  - Αν $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \to a} \left[-f(x) \right] = +\infty$
  - Αν $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
  - Αν $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
  - Αν $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο a, τότε $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
  - Αν $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο a, τότε $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Μη πεπερασμένα όρια

- Ιδιότητες μη πεπερασμένων ορίων

Θεώρημα 5.2. *Όριο αθροίσματος*

$\lim_{x\to a} f(x)$	c	c	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	α. μ.	α. μ.

Μη πεπερασμένα όρια

- Ιδιότητες μη πεπερασμένων ορίων

Θεώρημα 5.3. *Όριο γινομένου*

$\lim_{x \to a} f(x)$	α>0	α>0	α<0	α<0	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	α.μ.	α.μ.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Διάφοροι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Απαλοιφή παραγόντων σε ρητές συναρτήσεις

▶ **Παράδειγμα 6.1.** Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2+x-2}$$

Λύση. Στην τιμή που αναζητούμε το όριο η συνάρτηση δεν ορίζεται καθώς μηδενίζεται ο παρονομαστής. Όμως για την τιμή αυτή μηδενίζεται και ο αριθμητής. Παραγοντοποιώντας λοιπόν τα δύο πολυώνυμα βρίσκουμε ότι

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$$

και

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

Επομένως

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας το απλοποιημένο κλάσμα βρίσκουμε το ζητούμενο όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)}=\frac{(1-2)(1-3)}{(1+2)}=\frac{2}{3}$$ ◀

Διάφοροι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Δημιουργία κλασμάτων που τείνουν στο 0, όταν το x τείνει στο άπειρο

▶ **Παράδειγμα 6.6.** Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+3x+1}{2x^4+1}$$

Λύση. Βγάζουμε το x^3 κοινό παράγοντα από τον αριθμητή και το x^4 από τον παρονομαστή και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+3x+1}{2x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-2\frac{1}{x}+3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(2+\frac{1}{x^4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\frac{1}{x}+3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^4}}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$ ◀

Πλάγιες ασύμπτωτοι

Ορισμός 7.1. Η ευθεία $kx+b$ ονομάζεται **πλάγια ασύμπτωτη** του γραφήματος της συνάρτησης $f(x)$ αν

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$$