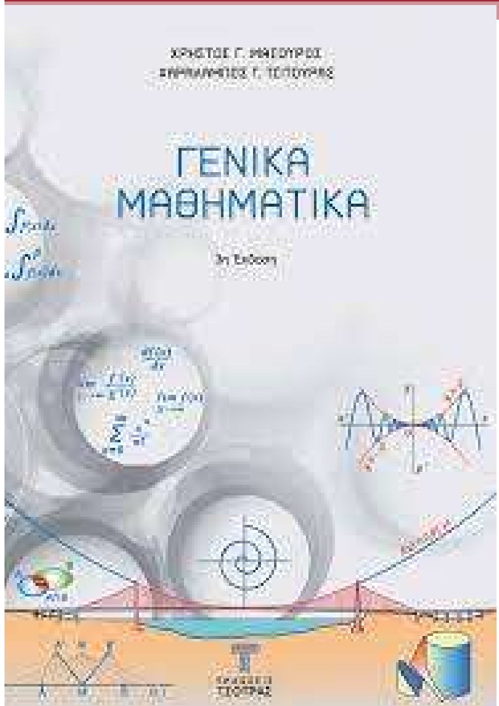
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Συνέχεια Συναρτήσεων

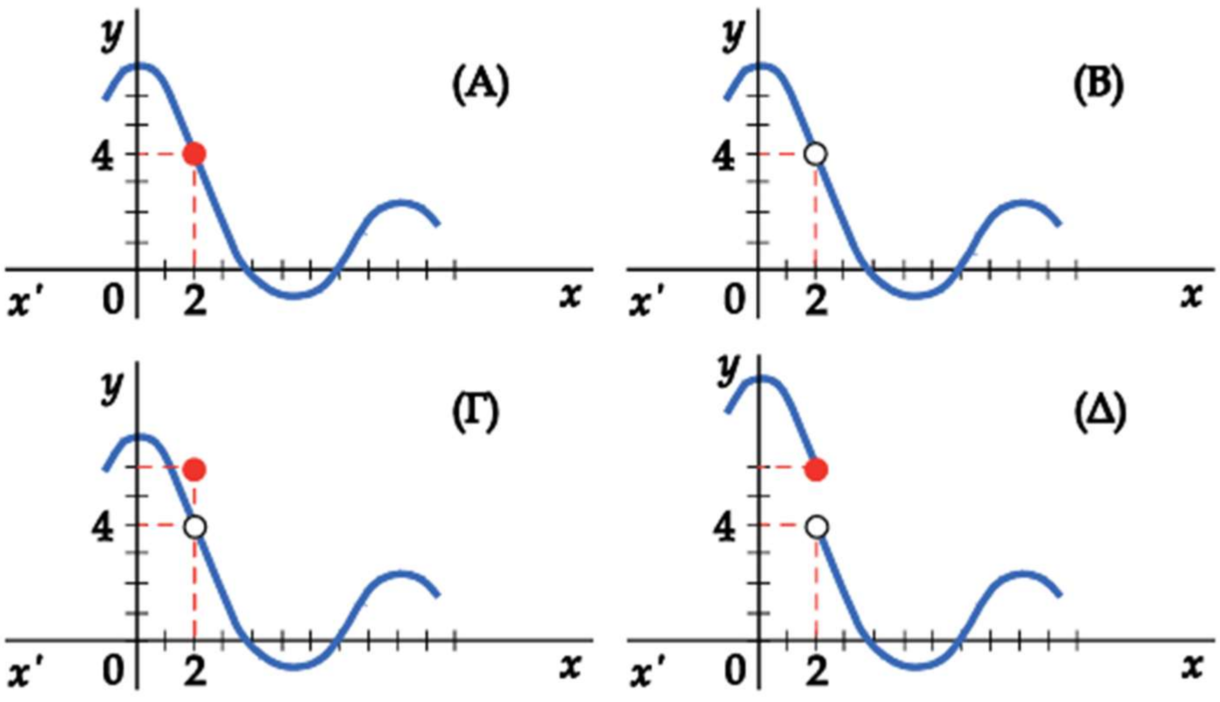


Σταμάτης Βολιώτης
6ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

Η έννοια της συνέχειας

- μια συνάρτηση είναι συνεχής όταν μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημά της χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί



- Για να ορίσουμε με μαθηματική αυστηρότητα τη συνέχεια πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του ορίου

Η έννοια της συνέχειας

Ορισμός 1.1. (*Σημειακή συνέχεια*) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο** x_o του πεδίου ορισμού της αν

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

Ορισμός 1.2. (*Σημειακή συνέχεια*) Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f(x)$ είναι **συνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο** x_o του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x με $|x - x_o| < \delta$ να ισχύει

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

Η έννοια της συνέχειας

Ορισμός 1.3. (*Συνέχεια σε διάστημα*) Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός διαστήματος (α,β) τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **συνεχής στο διάστημα** αυτό. Αν επιπλέον η συνάρτηση f ορίζεται στο α και

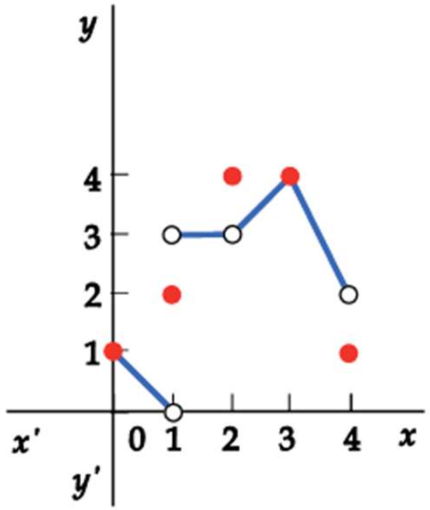
$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$$

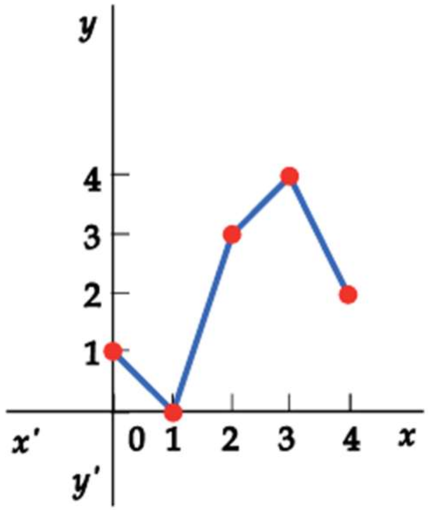
τότε θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο αριστερό άκρο** του πεδίου ορισμού της. Ακόμη αν η f ορίζεται στο β και

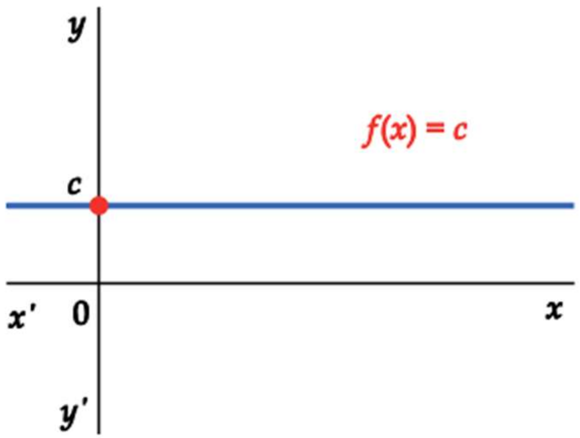
$$\lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$$

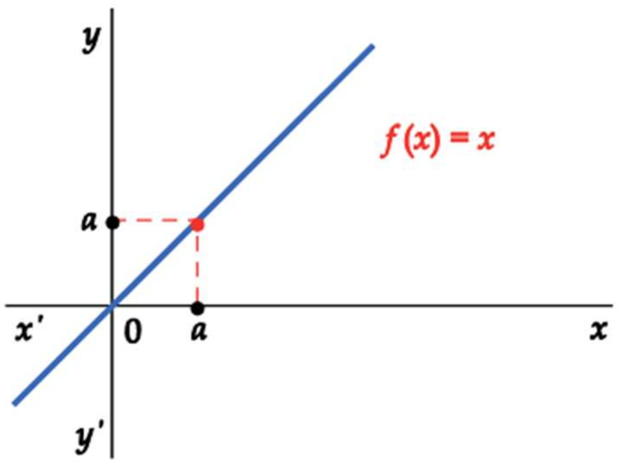
τότε θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο δεξιό άκρο** του πεδίου ορισμού της. Αν f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός διαστήματος (α,β) και επίσης στα άκρα του, θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$. Τέλος μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία $(-\infty,+\infty)$ θα λέμε ότι είναι **παντού συνεχής**.

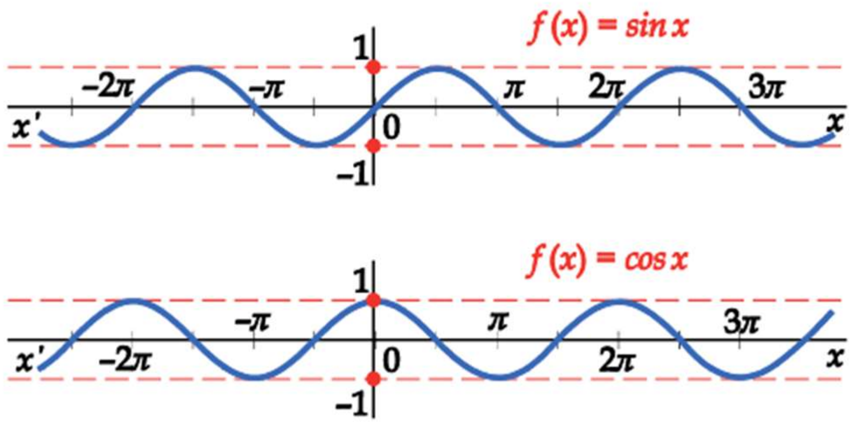
Η έννοια της συνέχειας











Η έννοια της συνέχειας

►Παράδειγμα 1.2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{αν } x<3\\ 4x-6, & \text{αν } x\geq 3\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_o=3$.

Η έννοια της συνέχειας

►Παράδειγμα 1.2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{αν } x<3\\ 4x-6, & \text{αν } x\geq 3\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_o=3$.

Λύση. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται με διαφορετικούς τύπους δεξιά και αριστερά από το σημείο $x_o=3$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(x+3)=6$$

και $$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(4x-6)=6$$

Άρα υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο $x_o=3$ και είναι

$$\lim_{x\to 3} f(x)=6.$$

Επειδή και $f(3)=4\cdot 3-6=6$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$. Αυτό σημαίνει ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_o=3$. ◄

Η έννοια της συνέχειας

▶ **Παράδειγμα 1.2.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{αν} \quad x<3 \\ 4x-6, & \text{αν} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x_o = 3$.

Η έννοια της συνέχειας

▶ **Παράδειγμα 1.3.** Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 8x^2 - 23\beta + \alpha^3, & \text{αν } x < 0 \\ 4, & \text{αν } x = 0 \\ \dfrac{(2\alpha + 3)x^2 - 5\sin^2 x}{x^2}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

Η έννοια της συνέχειας

► **Παράδειγμα 1.3.** Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 8x^2 - 23\beta + \alpha^3, & \text{αν } x < 0 \\ 4, & \text{αν } x = 0 \\ \dfrac{(2\alpha+3)x^2 - 5\sin^2 x}{x^2}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

Λύση. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται με διαφορετικούς τύπους δεξιά και αριστερά από το σημείο $x_o = 0$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(8x^2 - 23\beta + \alpha^3\right) = 0 - 23\beta + \alpha^3 = \alpha^3 - 23\beta$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{(2\alpha+3)x^2 - 5\sin^2 x}{x^2} = (2\alpha+3) - 5\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 =$$

$$= (2\alpha+3) - 5 = 2\alpha - 2$$

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x_o = 0$, θα πρέπει τα πλευρικά όρια στο 0, να ταυτίζονται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Έχουμε συνεπώς το σύστημα:

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \alpha^3 - 23\beta = 4 \\ 2\alpha - 2 = 4 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 27 - 23\beta = 4 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

και τελικά

$$\beta = 1, \quad \alpha = 3. \ \blacktriangleleft$$

Η έννοια της συνέχειας

► Παράδειγμα 1.3. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

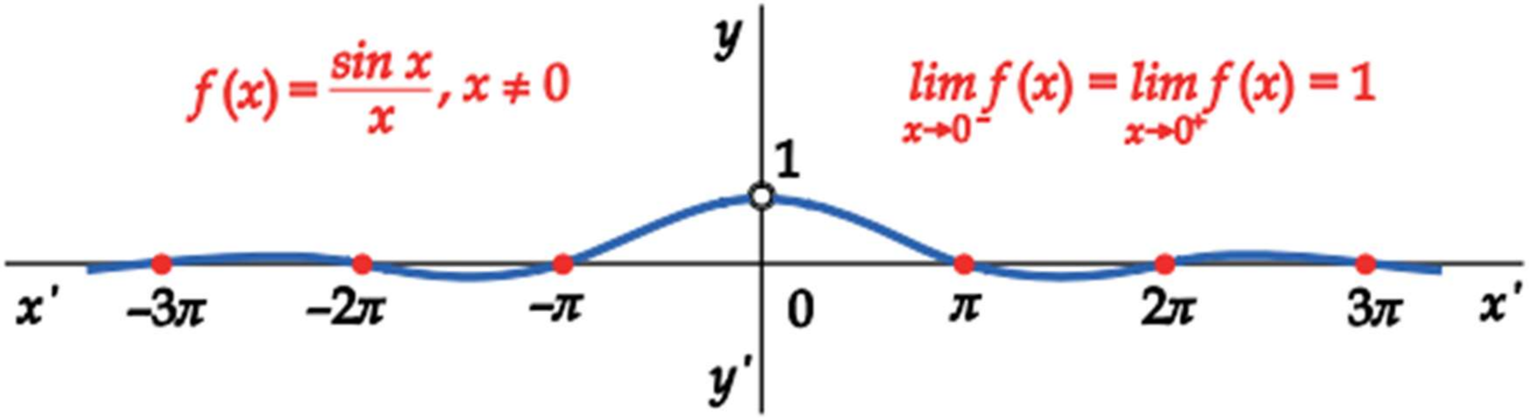
$$f(x) = \begin{cases} 8x^2 - 23\beta + \alpha^3, & \text{αν } x < 0 \\ 4, & \text{αν } x = 0 \\ \dfrac{(2\alpha+3)x^2 - 5\sin^2 x}{x^2}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

αν $a \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$$



Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 3.1. *Αν οι συναρτήσεις* $f_1(x)$ *και* $f_2(x)$ *είναι συνεχείς σε ένα σημείο* x_o, *τότε και η*

$$u(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

είναι επίσης μια συνάρτηση συνεχής στο x_o.

Θεώρημα 3.2. *Αν οι συναρτήσεις* $f_1(x)$ *και* $f_2(x)$ *είναι συνεχείς σε ένα σημείο* x_o, *τότε και το γινόμενό τους*

$$\upsilon(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

είναι επίσης μια συνάρτηση συνεχής στο x_o.

Πόρισμα 3.1. *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι συνεχής σε ένα σημείο* x_o, *τότε η* $f^k(x)$ *επίσης μια συνάρτηση συνεχής στο* x_o.

Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 3.3. *Αν οι συναρτήσεις* $f_1(x)$ *και* $f_2(x)$ *είναι συνεχείς σε ένα σημείο* x_o, *και* $f_2(x_o) \neq 0$, *τότε το πηλίκο τους*

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

είναι επίσης μια συνάρτηση συνεχής στο x_o.

Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων

Πόρισμα 3.2. *Αν οι συναρτήσεις* $f_1(x)$ *και* $f_2(x)$ *είναι συνεχείς σε ένα κοινό διάστημα* I *των πραγματικών αριθμών, τότε οι συναρτήσεις*

$$u(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και

$$\upsilon(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

είναι επίσης συνεχείς στο I. *Αν επιπλέον ισχύει* $f_2(x) \neq 0$ *για κάθε σημείο* x *του* I, *τότε και η συνάρτηση*

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

είναι συνεχής στο I.

Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 3.4. *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι συνεχής στο σημείο* x_o *και η* $g(x)$ *είναι συνεχής στο σημείο* $f(x_o)$, *τότε η σύνθεσή τους* $g \circ f$ *είναι συνεχής στο σημείο* x_o.

Θεώρημα 3.5. *i. η συνάρτηση μονώνυμο* $f(x) = ax^k, \quad k \in \mathbb{N}$ *είναι συνεχής*

ii. κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής

iii. κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής

Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων

►**Παράδειγμα 3.1.** Να εξετάσετε αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a^2 - 1, & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \\ 1, & \text{αν } x = -1 \\ 5x^2 + 3ax + a^2 - 2, & \text{αν } x \in (-1, +\infty) \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων

►Παράδειγμα 3.1. Να εξετάσετε αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a^2-1, & \text{αν } x\in(-\infty,-1) \\ 1, & \text{αν } x=-1 \\ 5x^2+3ax+a^2-2, & \text{αν } x\in(-1,+\infty) \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Λύση. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο σύνολο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου a. Θα εξετάσουμε συνεπώς, αν υπάρχει τιμή για την παράμετρο a που να κάνει την συνάρτηση συνεχή στο -1. Επειδή η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικούς τύπους εκατέρωθεν του -1, θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(x^2+3x+a^2-1\right) = 1-3+a^2-1 = a^2-3$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(5x^2+3ax+a^2-2\right) = 5-3a+a^2-2 = a^2-3a+3$$

Εξάλλου $f(-1)=1$. Επομένως, πρέπει να εξετασθεί αν υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$a^2-3=1 \quad \text{και} \quad a^2-3a+3=1.$$

Οπότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

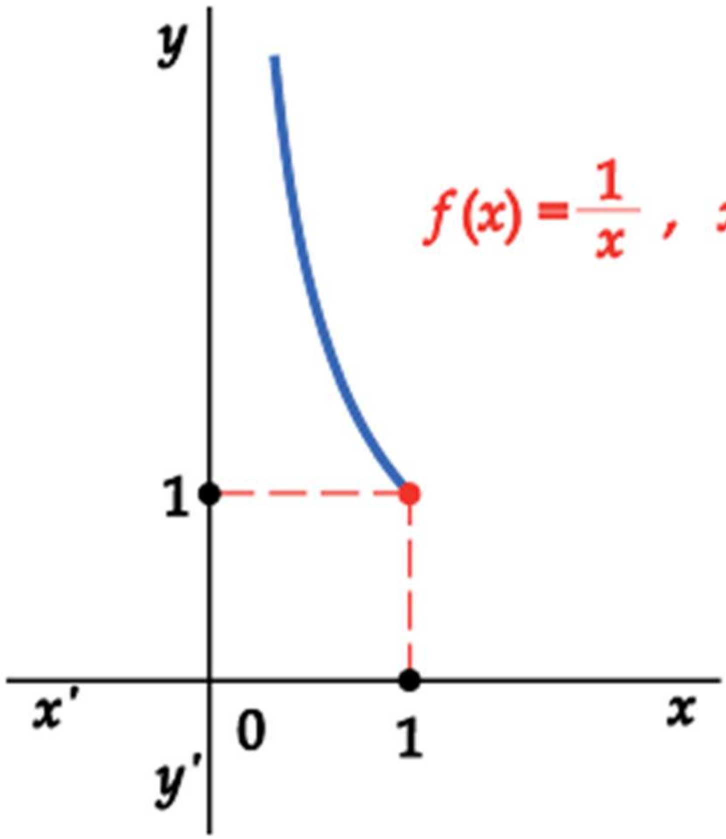
$$\begin{array}{r} a^2-3=1 \\ a^2-3a+3=1 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{r} a^2-4=0 \\ a^2-3a+2=0 \end{array} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{r} (a-2)(a+2)=0 \\ (a-2)(a-1)=0 \end{array}$$

Συνεπώς η $f(x)$ είναι παντού συνεχής αν το a λάβει την τιμή 2. ◄

Θεμελιώδη Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων

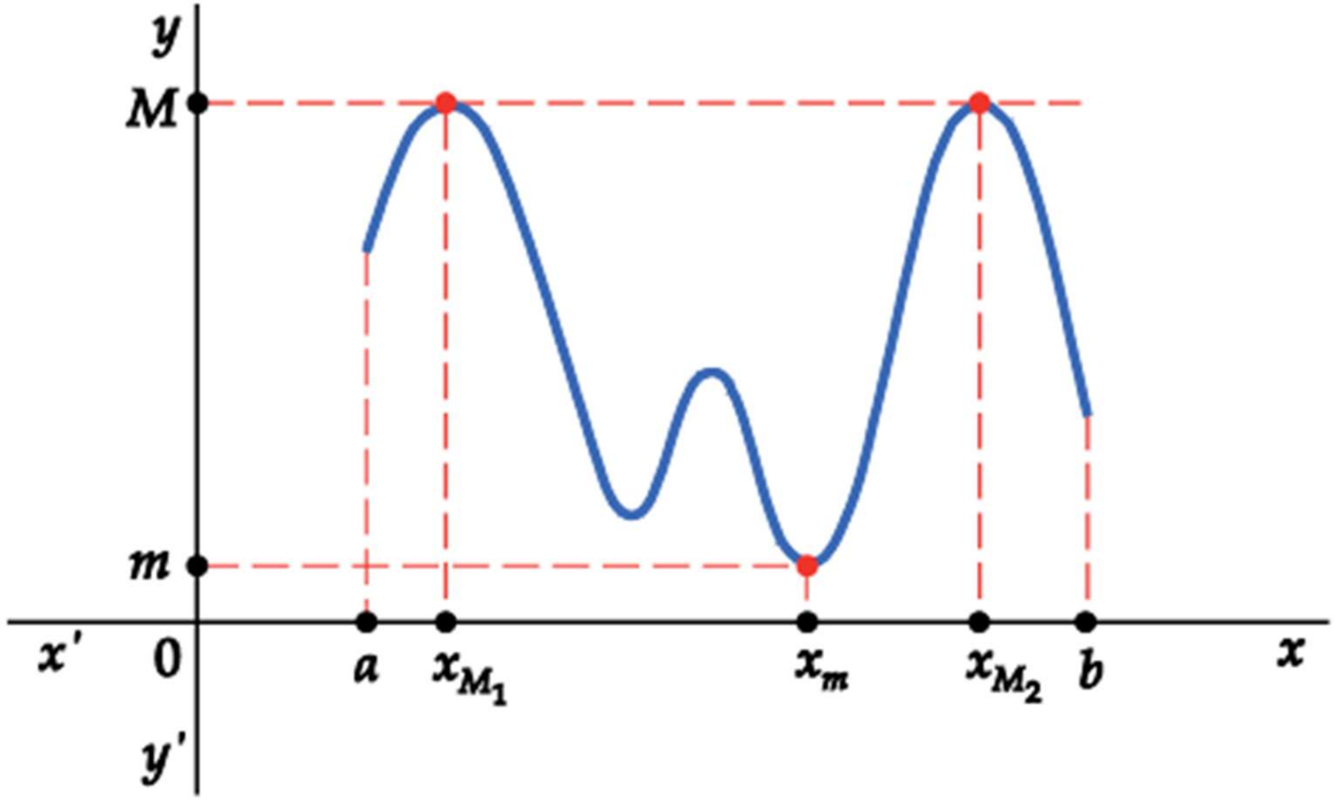
Θεώρημα 4.1. *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε είναι φραγμένη.*

αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a,b) ή σε ένα ημι-ανοικτό διάστημα [a,b) ή (a,b] τότε η f(x) δεν είναι κατ' ανάγκη φραγμένη στο διάστημα αυτό



Θεμελιώδη Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων

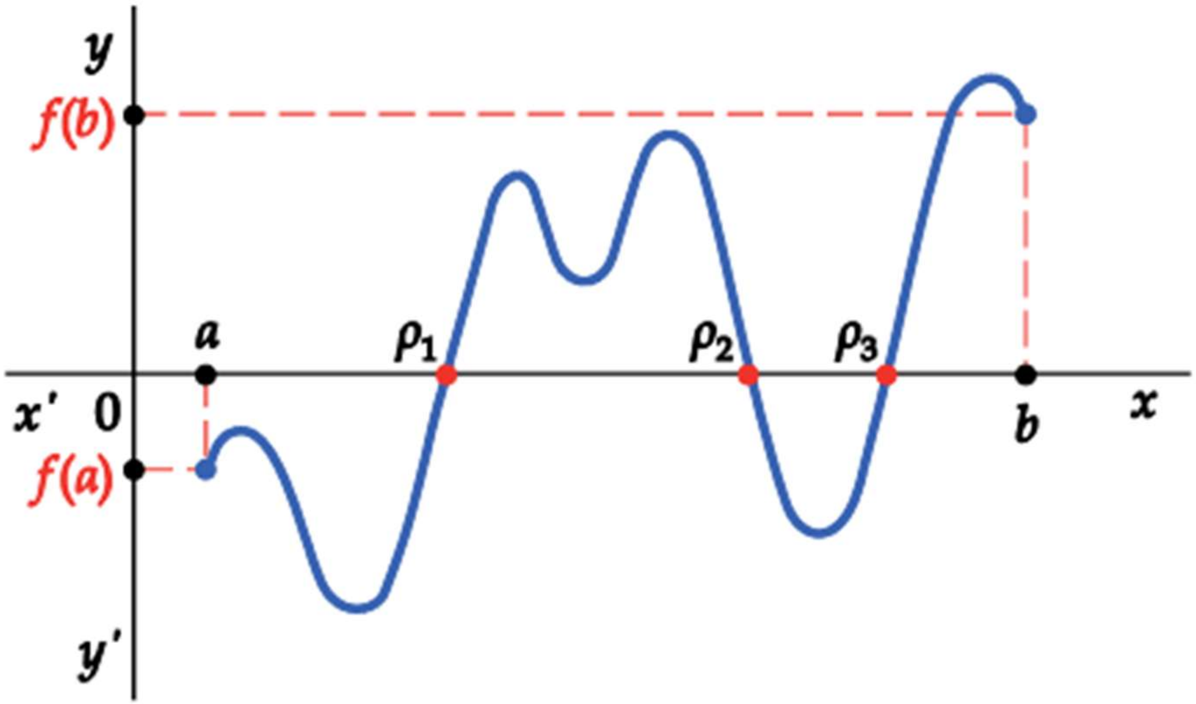
Θεώρημα 4.2. (Θεώρημα του Weierstrass) *Αν η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε λαμβάνει τουλάχιστον μια φορά μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m στο διάστημα αυτό. Δηλαδή υπάρχουν σημεία x_M και x_m στο διάστημα $[a,b]$ τέτοια ώστε $f(x_M)=M$ και $f(x_m)=m$ και για κάθε άλλο $x\in[a,b]$ ισχύει ότι $m\le f(x)\le M$.*



Θεμελιώδη Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων

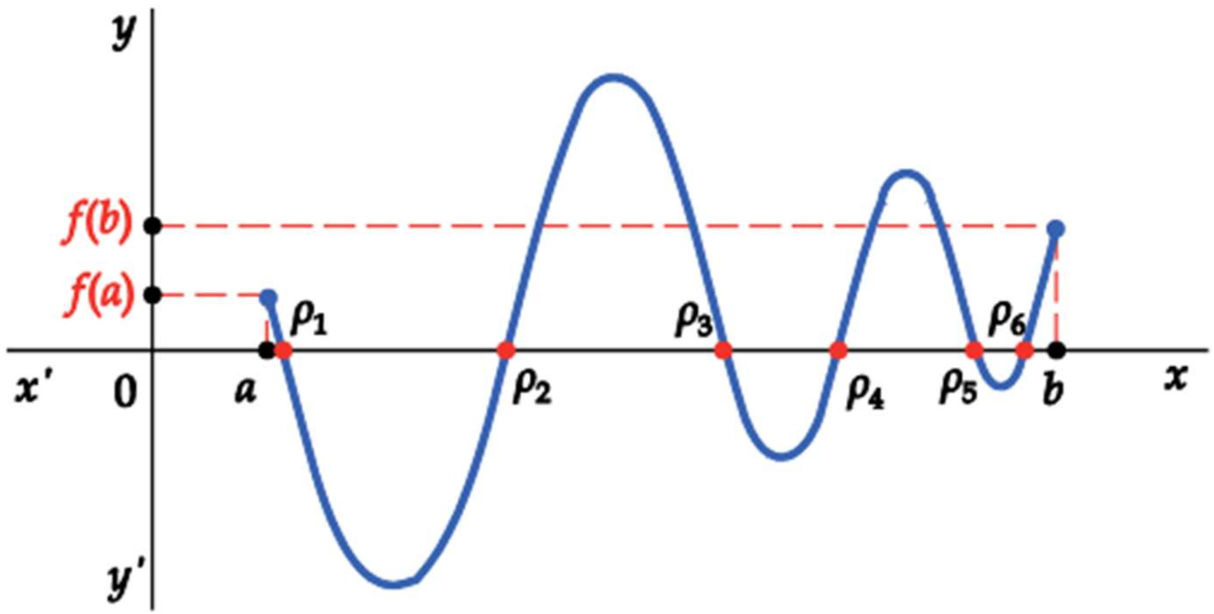
Θεώρημα 4.3. (Θεώρημα του Bolzano) *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι συνεχής στο* $[a,b]$ *και* $f(a)f(b)<0$, *τότε μεταξύ των* a *και* b *υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο* $x=\xi$ *στο οποίο η συνάρτηση μηδενίζεται:*

$$f(\xi)=0,\ a<\xi<b$$



Θεμελιώδη Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων

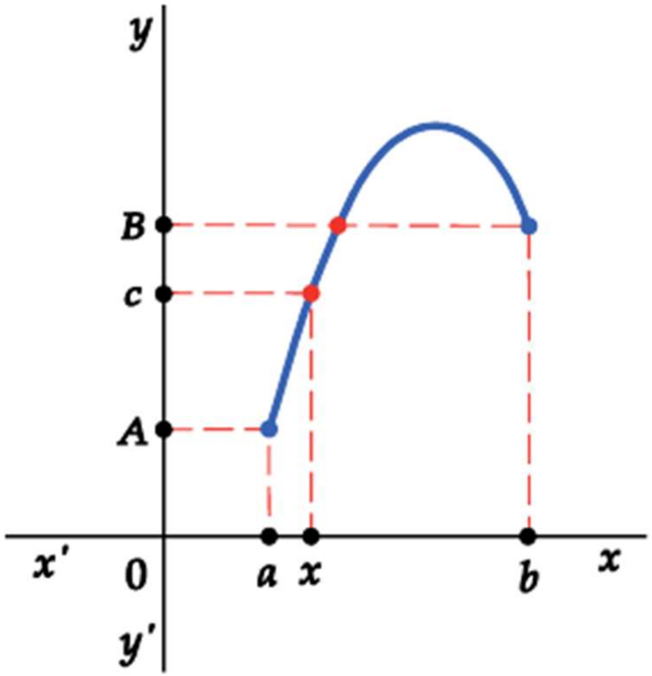
- κάθε λύση της εξίσωσης f(x)= 0 καλείται ρίζα της εξίσωσης ή σημείο μηδενισμού της συναρτήσεως f
- η υπόθεση του Θεωρήματος ότι για την f πρέπει να ισχύει f(a) f(b) <0 , δεν είναι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ριζών.
- σε κάθε διάστημα [a,b] στο οποίο μια συνεχής συνάρτηση f αλλάζει πρόσημο, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα

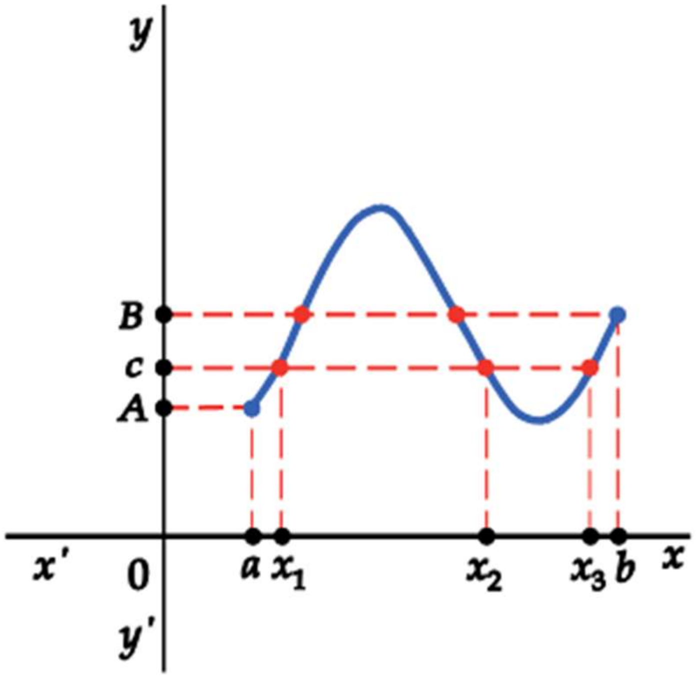


Θεμελιώδη Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων

Θεώρημα 4.4. (Θεώριμα ενδιάμεσης τιμής) *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \neq f(b)$, τότε για κάθε αριθμό c μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$, υπάρχει κάποιο x στο $[a,b]$, τέτοιο ώστε*

$$f(x) = c$$





Θεμελιώδη Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων

Πρόταση 4.1. *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και μη σταθερά σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$, τότε το πεδίο τιμών της f είναι επίσης ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ που έχει άκρα την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της f.*

Θεώρημα 4.5. **(Θεώρημα σταθερού σημείου)** *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, και $f([a,b]) \subseteq [a,b]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ στο $[a,b]$ τέτοιο ώστε*

$$\mathbf{f(\xi) = \xi}$$

Θεώρημα 4.6. *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και αμφιμονοσήμαντη στο $[a,b]$, τότε είναι γνησίως μονότονη.*