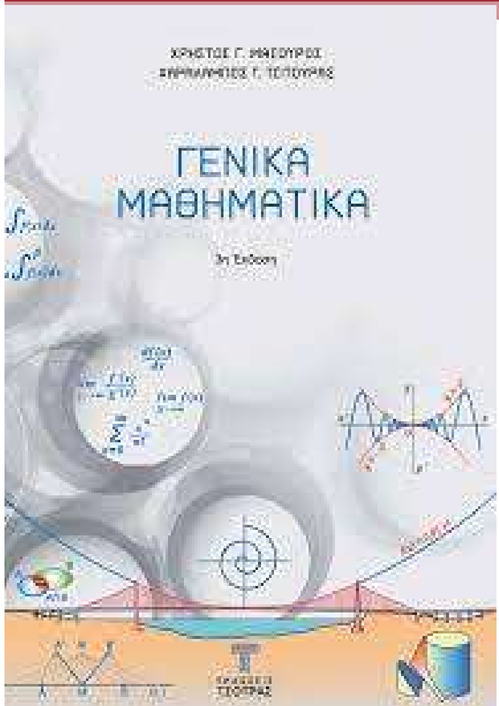
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων

Μάθημα: Μαθηματικά

Ενότητα: Μελέτη των συναρτήσεων



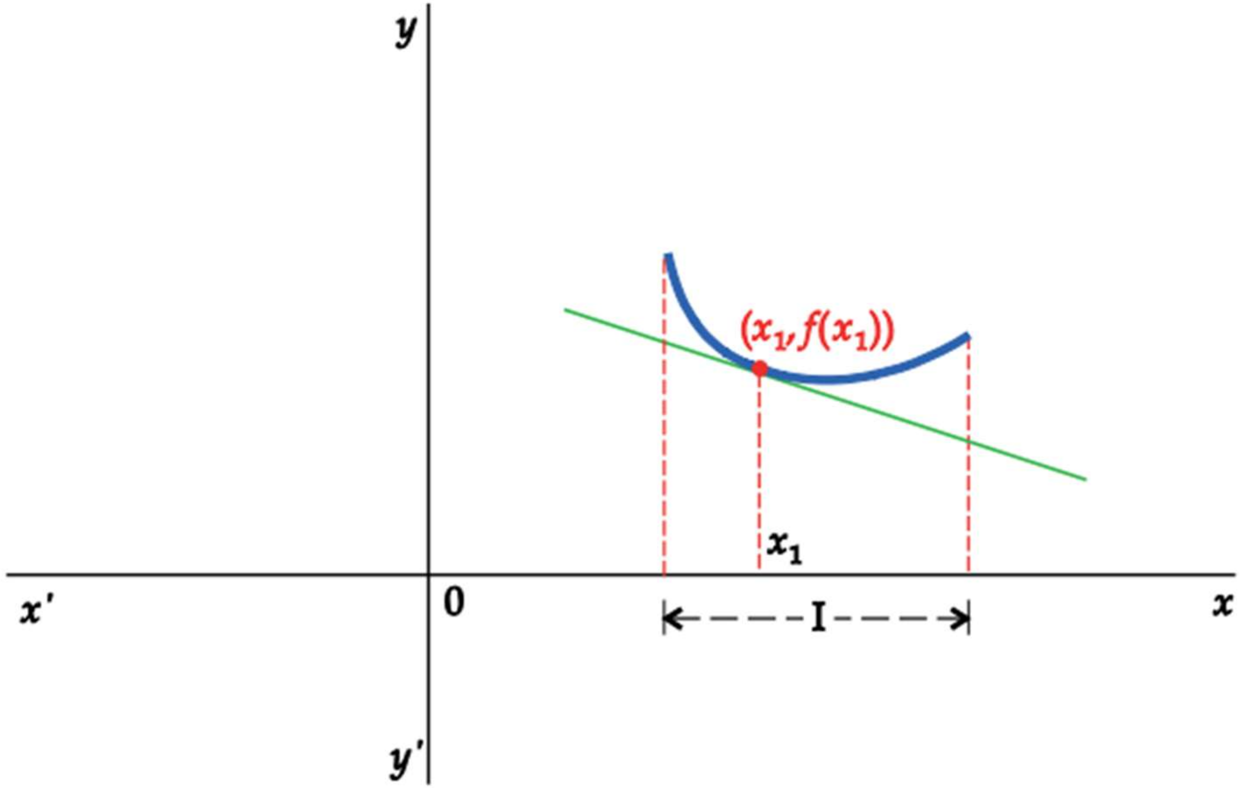
Σταμάτης Βολιώτης

8ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

Ορισμοί και Προτάσεις

- Μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I λέγεται κυρτή στο I αν η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της καμπύλης της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από αυτήν

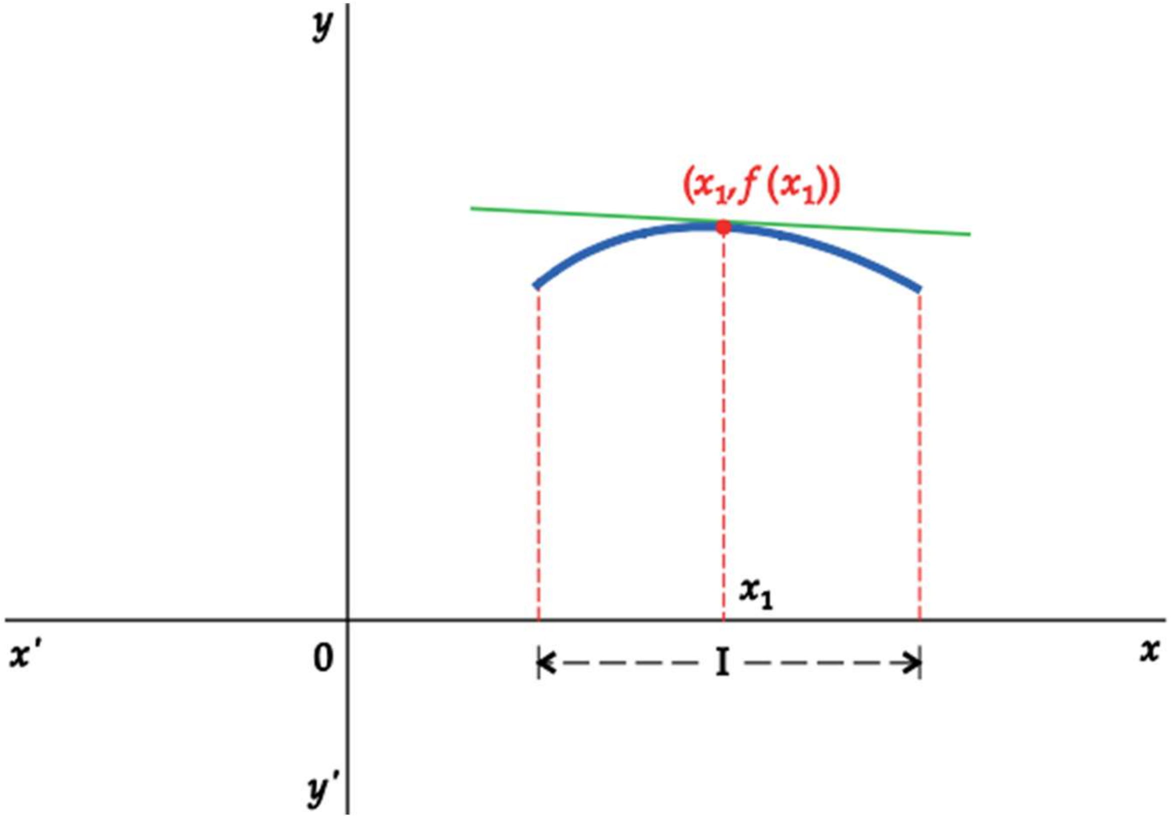


Ορισμός 1.1. Μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I λέγεται **κυρτή** στο I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 \neq x_2$, έπεται

$$f(x_2) - f(x_1) > f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Ορισμοί και Προτάσεις

- Μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I λέγεται κοίλη στο I αν η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της καμπύλης της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από αυτήν

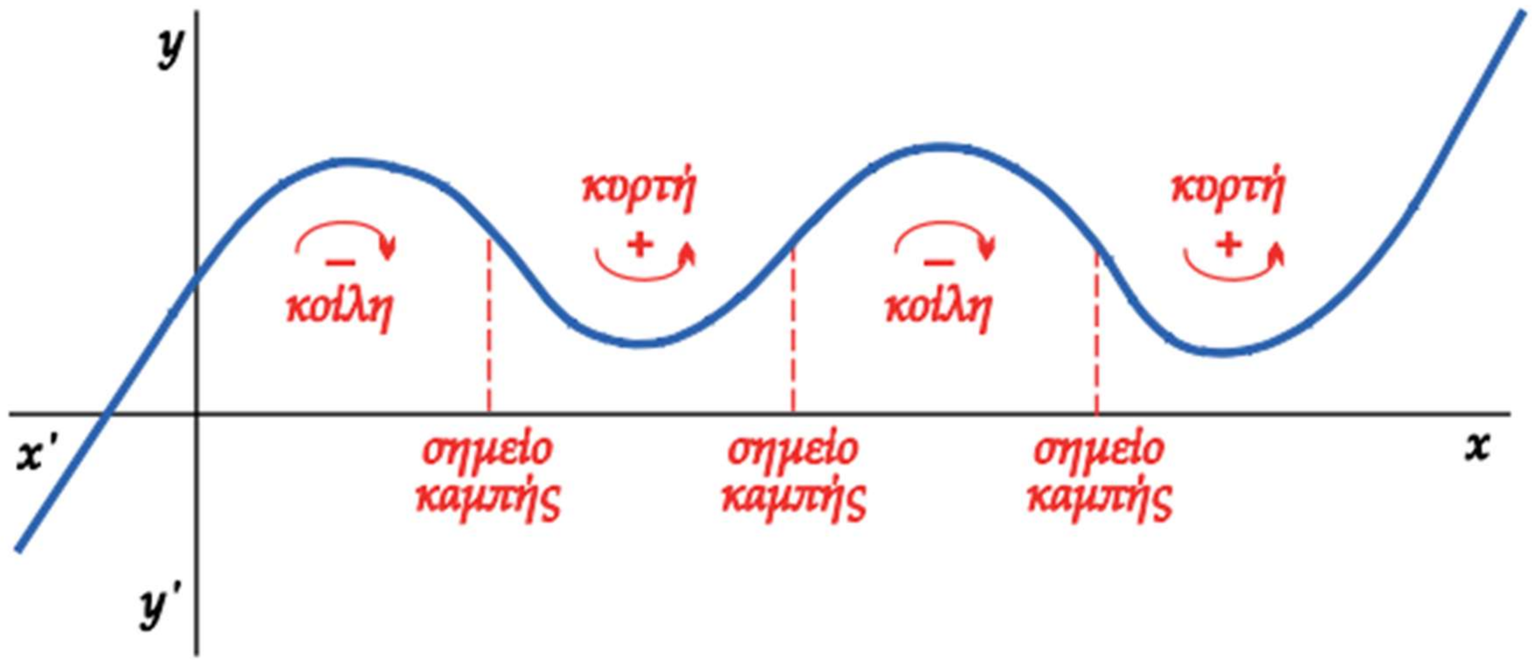


Ορισμός 1.2. Μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I λέγεται **κοίλη** στο I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 \neq x_2$, έπεται

$$f(x_2) - f(x_1) < f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Ορισμοί και Προτάσεις

Ορισμός 1.3. Για μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I θα λέμε ότι το σημείο x_o αποτελεί **σημείο καμπής**, αν υπάρχουν διαστήματα $(x_o - \delta, x_o)$, $(x_o, x_o + \delta)$ όπου η f είναι κυρτή στο $(x_o - \delta, x_o)$ και κοίλη στο $(x_o, x_o + \delta)$ ή το αντίστροφο, κοίλη στο $(x_o - \delta, x_o)$ και κυρτή στο $(x_o, x_o + \delta)$.



Ορισμοί και Προτάσεις

Πρόταση 1.1. *Αν μία συνάρτηση* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο σε κάθε σημείο του διαστήματος* (a,b)*, τότε ισχύουν:*

i. *αν* $f''(x)>0$ *για κάθε* $x\in(a,b)$ *η* f *είναι κυρτή στο* (a,b)

ii. *αν* $f''(x)<0$ *για κάθε* $x\in(a,b)$ *η* f *είναι κοίλη στο* (a,b)

Πόρισμα 1.1. *Αν μία συνάρτηση* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο συνεχή σε κάθε σημείο του διαστήματος* (a,b)*, και στο* $\xi\in(a,b)$ *παρουσιάζει σημείο καμπής, τότε* $f''(\xi)=0$.

Πρόταση 1.2. *Αν μία συνάρτηση* f *έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο στην περιοχή* $(\xi-h,\xi+h)$ *ενός σημείου* ξ *του πεδίου ορισμού της και* $f'(\xi)=0$*, τότε*

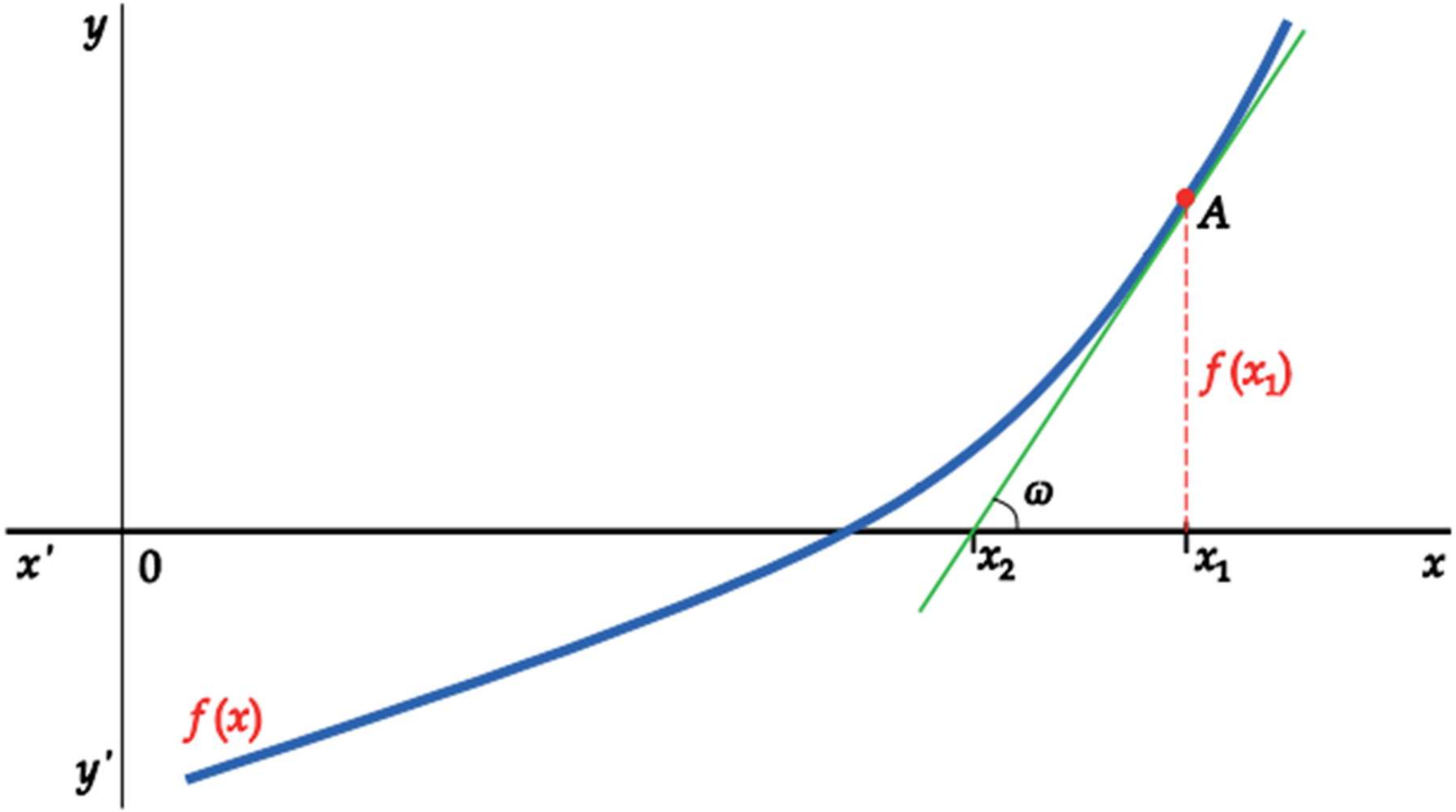
i. *αν* $f''(\xi)>0$ *η* f *παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο* ξ

ii. *αν* $f''(\xi)<0$ *η* f *παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο* ξ

Εύρεση ριζών συνάρτησης

- Μέθοδος Newton – Raphson

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

α) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης. Στα σημεία αυτά η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τετμημένων $x'x$.

γ) Βρίσκουμε την τιμή της συνάρτησης στο 0, δηλαδή το $f(0)$. Στο σημείο αυτό η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $y'y$.

δ) Βρίσκουμε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης μπορεί να σχεδιαστεί με αρκετή ακρίβεια με βάση τις πληροφορίες που μας παρέχει η πρώτη παράγωγος. Όμως κάποιες κρυφές λεπτομέρειες της καμπύλης, όπως για παράδειγμα τα σημεία καμπής, αποκαλύπτονται μόνον με τη μελέτη της δευτέρας παραγώγου.

ε) Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης, δηλαδή τις ρίζες και τα σημεία ασυνέχειας της πρώτης παραγώγου και εξετάζουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν αυτών. Στα κρίσιμα σημεία βρίσκονται τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης. Στα διαστήματα που $f'>0$ η συνάρτηση f είναι αύξουσα, ενώ στα διαστήματα που $f'<0$ η συνάρτηση f είναι φθίνουσα. Επιπλέον:

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

στ) Θέτουμε τις τιμές $\rho_1,\ldots,\rho_n$, στις οποίες η συνάρτηση παρουσιάζει τα ακρότατα, στην f, για να υπολογίσουμε τις ακρότατες τιμές $f(\rho_1),\ldots,f(\rho_n)$ της συνάρτησης.

ζ) Βρίσκουμε τις ρίζες της δευτέρας παραγώγου καθώς επίσης και τα σημεία στα οποία αυτή δεν ορίζεται. Στα σημεία αυτά η συνάρτηση f έχει τα πιθανά σημεία καμπής της. Αν η f'' έχει διαφορετικό πρόσημο δεξιά και αριστερά ενός τέτοιου σημείου, τότε αυτό είναι σημείο καμπής. Στα διαστήματα που $f''>0$ η συνάρτηση είναι κυρτή, ενώ στα διαστήματα που $f''<0$ η συνάρτηση είναι κοίλη.

η) Θέτουμε τις τιμές, στις οποίες η συνάρτηση παρουσιάζει σημεία καμπής στην f, για να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στα σημεία αυτά.

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

►**Άσκηση 1.** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

►**Άσκηση 1.** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

✓ *Σημεία τομής με τους άξονες:* Τα σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα των $x'x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0,$$

Απ' όπου

$$x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = -1, \text{και } x_3 = 2.$$

Η τεταγμένη του σημείου τομής της καμπύλης με τον άξονα των $y'y$ είναι: $y = f(0) = -6$

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

►**Άσκηση 1.** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

✓ *Ακρότατα σημεία*: Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι

$$f'(x) = \left(2x^3 + x^2 - 7x - 6\right)' = 6x^2 + 2x - 7$$

Η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ είναι

$$f''(x) = \left(6x^2 + 2x - 7\right)' = 12x + 2$$

Οι ρίζες της πρώτης παραγώγου είναι:

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-1-\sqrt{43}}{6} \approx -1,26 \\ \rho_2 = \dfrac{-1+\sqrt{43}}{6} \approx 0,93 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου έχουμε:

$$f''(\rho_1) = f''\left(\frac{-1-\sqrt{43}}{6}\right) = -2\sqrt{43} < 0$$

$$f''(\rho_2) = f''\left(\frac{-1+\sqrt{43}}{6}\right) = 2\sqrt{43} > 0$$

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

►Άσκηση 1. Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

Επομένως η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο ρ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ρ_2. Για να υπολογίσουμε το τοπικό μέγιστο θέτουμε την τιμή $\rho_1 = \dfrac{-1-\sqrt{43}}{6}$ στην συνάρτηση $f(x)$ και έχουμε:

$$y_\mu = f\left(\frac{-1-\sqrt{43}}{6}\right) = \frac{1}{54}\left(-260 + 43\sqrt{43}\right)$$

Όμοια για να υπολογίσουμε το τοπικό ελάχιστο θέτουμε την τιμή $\rho_2 = \dfrac{-1+\sqrt{43}}{6}$ στην συνάρτηση $f(x)$ και έχουμε:

$$y_\varepsilon = f\left(\frac{-1+\sqrt{43}}{6}\right) = \frac{1}{54}\left(-260 - 43\sqrt{43}\right)$$

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

► **Άσκηση 1.** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

✓ *Η μονοτονία της καμπύλης*: Η $f'(x)$ είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα θετική $\left(\Delta = 2\sqrt{43} > 0\right)$ και συντελεστή του δευτεροβαθμίου όρου θετικό αριθμό $(a = 6 > 0)$

Άρα:

- Για κάθε x εντός του διαστήματος των ριζών (ρ_1, ρ_2) είναι $f'(x) < 0$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα

$$\left(\frac{-1-\sqrt{43}}{6}, \frac{-1+\sqrt{43}}{6}\right)$$

- Για κάθε x εκτός του διαστήματος των ριζών (ρ_1, ρ_2) είναι $f'(x) > 0$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι αύξουσα στην ένωση των διαστημάτων:

$$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{43}}{6}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{43}}{6}, +\infty\right)$$

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

►**Άσκηση 1.** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

✓ *Σημεία καμπής*: Η καμπύλη έχει σημείο καμπής για τιμές για τις οποίες ισχύει: $f''(x) = 0$ και $f'''(x) \neq 0$. Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$f''(x) = 12x + 2$$

Επομένως:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$$

Εξάλλου $f'''(x) = (12x+2)' = 12 \neq 0$. Επομένως η καμπύλη στο σημείο $x = -\frac{1}{6}$ παρουσιάζει σημείο καμπής. Η τιμή της συνάρτησης στο σημείο καμπής είναι

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{130}{27} \approx -4{,}81$$

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

►**Άσκηση 1.** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

Επιπλέον

$$12x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{6}$$

Επομένως η δεύτερη παράγωγος είναι θετική στο διάστημα $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$ και αρνητική στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$. Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$.

Ολοκληρώθηκε πλέον η μελέτη της συνάρτησής μας και είμαστε τώρα έτοιμοι να χαράξουμε την καμπύλη της:

Κατανόηση συμπεριφοράς συνάρτησης

►**Άσκηση 1.** Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$