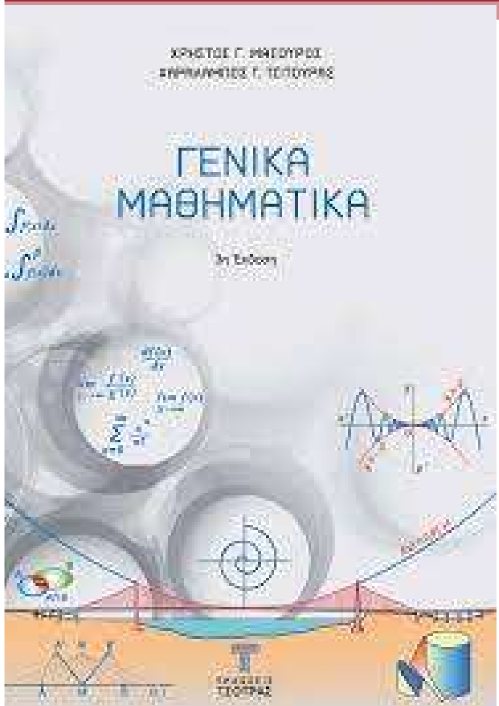
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τμήμα: Αγροτικής Ανάπτυξης, Αγροδιατροφής και Διαχείρισης Φυσικών Πόρων
Μάθημα: Μαθηματικά
Ενότητα: Εισαγωγή στον Ολοκληρωτικό Λογισμό

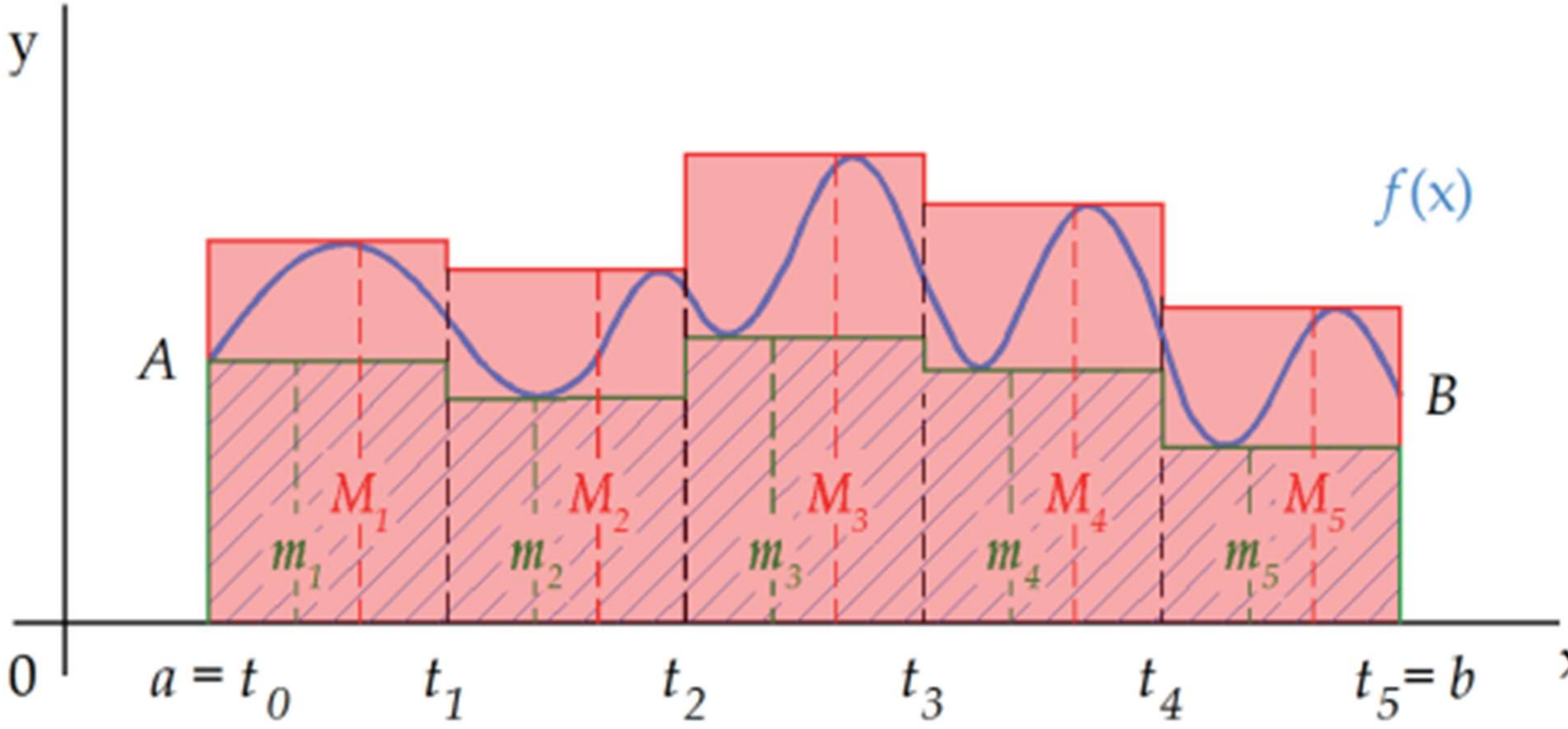


Σταμάτης Βολιώτης
9ο μάθημα

Οι διαφάνειες έχουν βασισθεί στο βιβλίο:
Γενικά Μαθηματικά, Μασούρος, Τσίτουρας

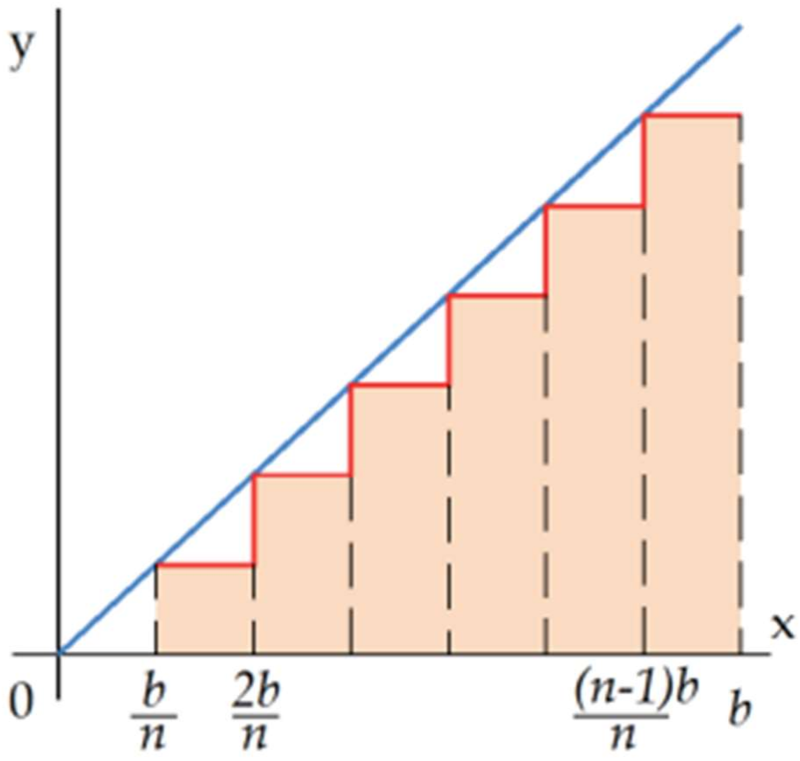
Η έννοια του ολοκληρώματος

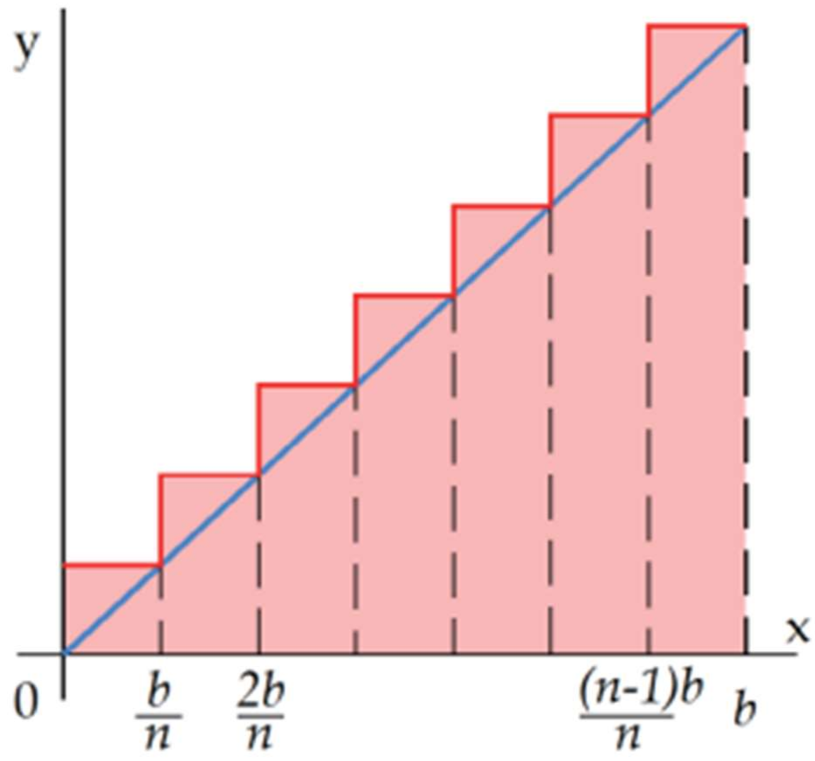
- Ας προσπαθήσουμε να βρούμε το εμβαδόν…



Η έννοια του ολοκληρώματος

- Ας προσπαθήσουμε να βρούμε το εμβαδόν…





Ορισμός του ολοκληρώματος

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και $P=\{t_o,t_1,\ldots,t_n\}$ μια διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$. Αν

$$m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[t_{i-1},t_i]\}$$

και
$$M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[t_{i-1},t_i]\}$$

για $i=1,2,\ldots,n$, τότε:

- το κάτω άθροισμα της f ως προς την διαμέριση P είναι ο αριθμός:

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$

- το άνω άθροισμα της f ως προς την διαμέριση P είναι ο αριθμός:

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1})$$

Εύκολα συνάγετε ότι αφού $m_i\le M_i$, ισχύει ότι $L(f,P)\le U(f,P)$.

Αν τώρα

$$\sup_P L(f,P)=\sup\{L(f,P)\mid P\ \textit{διαμέριση του}\ [\alpha,\beta]\}$$

και
$$\inf_P U(f,P)=\inf\{U(f,P)\mid P\ \textit{διαμέριση του}\ [\alpha,\beta]\}$$

Ορισμός του ολοκληρώματος

Ορισμός 3.1. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Η f θα λέγεται **ολοκληρώσιμη** αν:

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$$

Στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη, ο κοινός αριθμός της παραπάνω ισότητας λέγεται **ολοκλήρωμα** της f επί του $[a,b]$.

$$\int_a^b f \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

Ορισμός του ολοκληρώματος

- Να βρούμε το ολοκλήρωμα

▶**Παράδειγμα 2.1.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$ ορισμένη στο διάστημα $[0, b]$, με $b > 0$

Ορισμός του ολοκληρώματος

- Να βρούμε το ολοκλήρωμα

▶**Παράδειγμα 2.1.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$ ορισμένη στο διάστημα $[0,b]$, με $b>0$

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$$

Ορισμός του ολοκληρώματος

- Να βρούμε το ολοκλήρωμα

συνάρτησης $f(x):[0,3]\to\mathbb{R}$ με

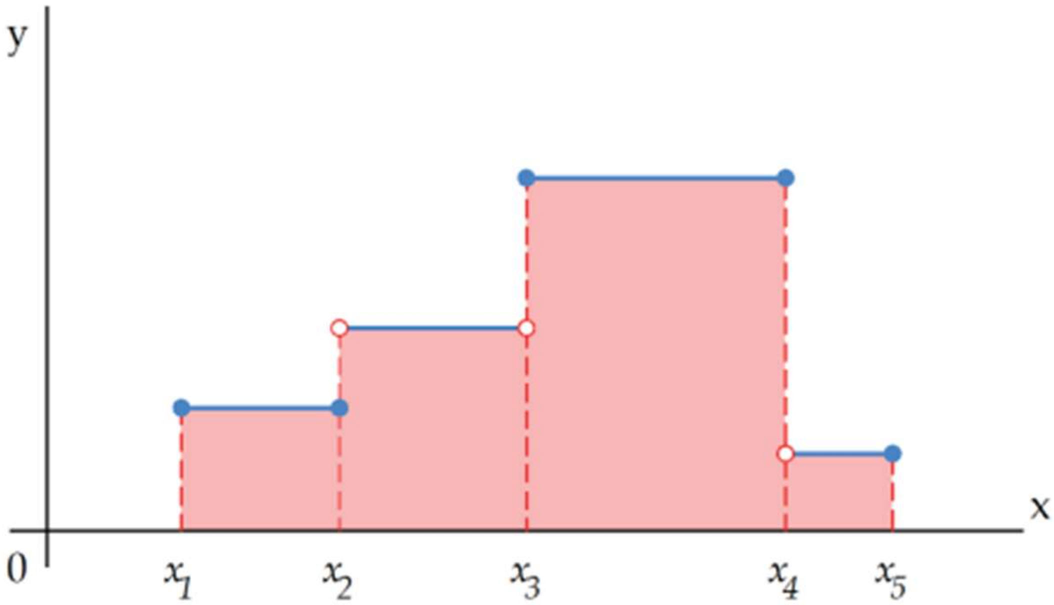
$$f(x)=\begin{cases}1, & \alpha\nu\ x\in[0,1)\\ 2, & \alpha\nu\ x\in[1,2]\\ 3, & \alpha\nu\ x\in(2,3]\end{cases}$$

Ορισμός του ολοκληρώματος

- Να βρούμε το ολοκλήρωμα

συνάρτησης $f(x):[0,3]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}1, & αν\ x\in[0,1)\\ 2, & αν\ x\in[1,2]\\ 3, & αν\ x\in(2,3]\end{cases}$$



Ορισμός του ολοκληρώματος

Θεώρημα 3.2. *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του $[a,b]$.*

Ορισμός 3.2. Έστω f τυχούσα συνάρτηση η οποία είναι ορισμένη τουλάχιστον σε ένα σημείο a. Τότε ορίζουμε

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ορισμός 3.3. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση της οποίας υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$. Τότε ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Ορισμός 3.4. Έστω f μια συνάρτηση που ορίζεται στο διάστημα $[a,b]$. Ένα **άθροισμα Riemann** της f στο $[a,b]$ είναι κάθε άθροισμα της μορφής

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i, \qquad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

όπου $P = \{t_o, t_1, \ldots, t_n\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ και ξ_i ένα στοιχείο του $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Θεώρημα 3.3. *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

για όλα τα αθροίσματα Riemann R_n τα οποία αντιστοιχούν σε διαμερίσεις P_n για τις οποίες $\|P_n\| \to 0$, καθώς $n \to \infty$.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 4.1. (γραμμική ιδιότητα) *Αν οι συναρτήσεις* f *και* g *είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες επί του* $[a,b]$, *τότε και η συνάρτηση* $c_1 f + c_2 g$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *είναι επίσης ολοκληρώσιμη και:*

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

►**Παράδειγμα 4.1.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \left(2x+3x^2\right)dx$$

Βοήθεια:

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

►**Παράδειγμα 4.1.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \left(2x+3x^2\right)dx$$

Λύση. Από τα παράδειγμα 3.1 και 3.2 γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^2 xdx = \frac{2^2}{2} \quad \text{και} \quad \int_0^2 x^2dx = \frac{2^3}{3}$$

Επομένως

$$\int_0^2 \left(2x+3x^2\right)dx = 2\int_0^2 xdx + 3\int_0^2 x^2dx = 2\frac{2^2}{2} + 3\frac{2^3}{3} = 12$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 4.2. *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες επί του $[a,b]$, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη.*

Θεώρημα 4.3. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η συνάρτηση $|f|$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη.*

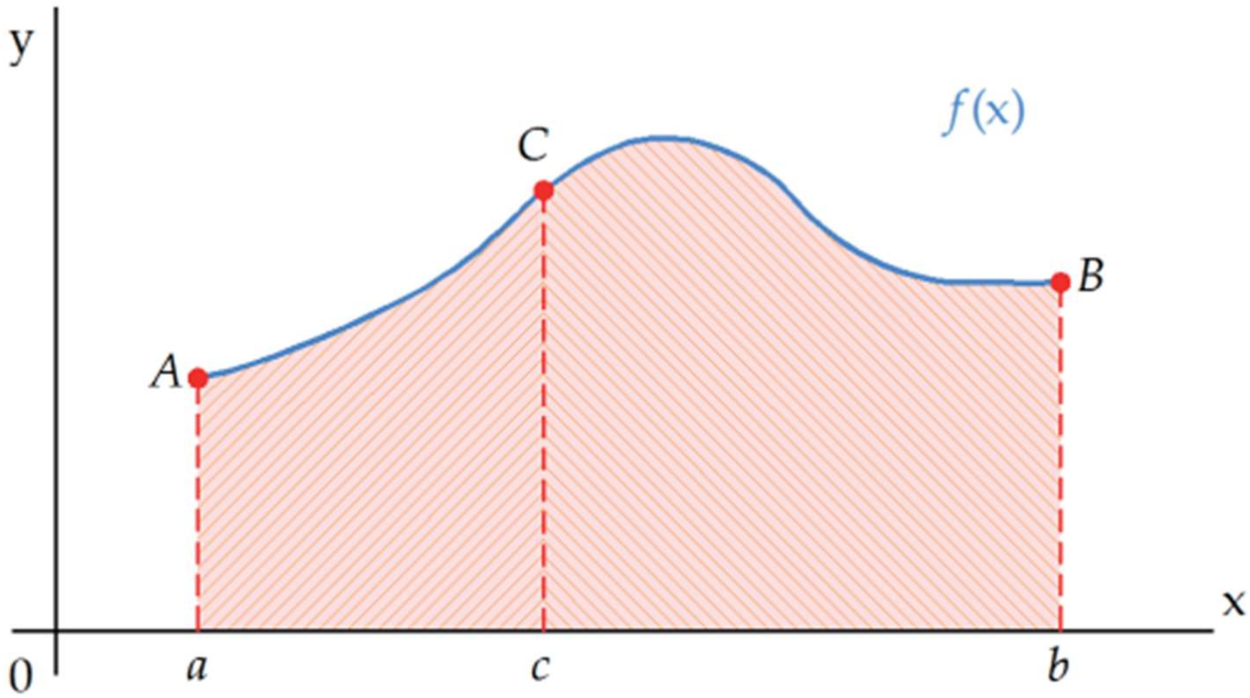
Θεώρημα 4.4. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 4.5. (η προσθετικότητα στο διάστημα ολοκλήρωσης) *Έστω* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *μία φραγμένη συνάρτηση και* $a\le c\le b$. *Αν η* f *είναι ολοκληρώσιμη επί των διαστημάτων* $[a,c]$ *και* $[c,b]$, *τότε είναι ολοκληρώσιμη και επί του διαστήματος* $[a,b]$, *και*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$



Ιδιότητες του ολοκληρώματος

►**Παράδειγμα 4.2.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_a^b x\,dx \quad \text{και} \quad \int_a^b x^2 dx$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

▶**Παράδειγμα 4.2.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_a^b x dx \quad \text{και} \quad \int_a^b x^2 dx$$

Λύση. Λόγω του θεωρήματος 4.5, αν $0 < a < b$ ισχύει ότι

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

και επομένως

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx$$

Στα Παραδείγματα 2.1 και 3.2 υπολογίσαμε ότι

$$\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2} \quad \text{και} \quad \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

Άρα

$$\int_a^b x dx = \int_0^b x dx - \int_0^a x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

και

$$\int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 4.6. (το αναλλοίωτο κατά τη μεταφορά) *Αν η συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη επί του διαστήματος* $[a,b]$, *τότε, για κάθε* $c \in \mathbb{R}$, *ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

Θεώρημα 4.7. (το αναλλοίωτο κατά την αυξομείωση του διαστήματος ολοκλήρωσης) *Αν η συνάρτηση* f *είναι ολοκληρώσιμη επί του διαστήματος* $[a,b]$, *τότε, για κάθε* $c \in \mathbb{R}$, *με* $c \neq 0$, *ισχύει:*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right)dx$$

Θεώρημα 4.8. *Αν οι συναρτήσεις* f *και* g *είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες επί του* $[a,b]$, *και είναι* $g(x) \leq f(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b]$, *τότε*

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 1.1. *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, τότε η συνάρτηση*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad x\in[a,b]$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 1.2. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και έστω η συνάρτηση F που ορίζεται από τον τύπο*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \quad x\in[a,b]$$

Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο c του $[a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο c και

$$F'(c)=f(c)$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 2.1. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και έστω ότι $f = g'$ για κάποια συνάρτηση g. Τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Μια συνάρτηση από το $\int f(x)dx$, δηλαδή μια παράγουσα της f, την ονομάζουμε **αόριστο ολοκλήρωμα** της f, ενώ το $\int_a^b f(x)dx$ λέγεται, σε αντιδιαστολή, **ορισμένο ολοκλήρωμα**.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

$$\int_a^b e^x dx =$$

$y = e^x$	$y' = e^x$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

$$\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

$$\int_0^{2\pi} \sin x \; dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x \; dx =$$

$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x \; dx = -\cos x\Big|_{0}^{2\pi} = -\left(\cos 2\pi - \cos 0\right) = 0$$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos x \; dx = \sin x\Big|_{0}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ όπου } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

i. $\int_{0}^{1} x^{\mu+3} dx$

ii. $\int_{-1/2}^{3/4} x^{\mu+3} dx$

iii. $\int_{0}^{\pi/4} \cos\left((\mu+3)x\right) dx$

iv. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin\left((\mu+3)x\right) dx$

v. $\int_{1}^{e} (1+\ln x) dx$