

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Αντιστροφή πινάκων

Άσκηση 1:

Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A, B είναι $n \times n$ και ο B είναι αντιστρέψιμος. Να δείξετε ότι αν ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος τότε είναι αντιστρέψιμος και ο A .

Άσκηση 2:

Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) τον αντίστροφο του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3:

Να τεθεί σε μορφή εξίσωσης πινάκων το παρακάτω γραμμικό σύστημα και στην συνέχεια να κατασκευάσετε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος αυτού.

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ -x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 12 \end{array} \right\}.$$

Άσκηση 4:

Να λύσετε, με τη βοήθεια του αντιστρόφου πίνακα, το παρακάτω γραμμικό σύστημα :

$$\begin{array}{rcl} 8x_1 & +6x_2 & = 2 \\ 5x_1 & -5x_2 & = 11. \end{array}$$

Ορίζουσες

Άσκηση 5:

Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες με ανάπτυγμα :

- α) ως προς τη 1η γραμμή
- β) ως προς τη 2η στήλη

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 6:

Να υπολογίσετε την ορίζουσα :

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 7:

Να δείξετε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Άσκηση 8:

Έστω A πίνακας διάστασης $n \times n$. Να βρείτε έναν τύπο για την ορίζουσα $\det(rA)$, όπου $r \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 9:

Έστω A, P τετραγωνικοί πίνακες, ίδιας διάστασης, με P αντιστρέψιμο πίνακα. Να δείξετε ότι $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Άσκηση 10:

Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\lambda = 2$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 11:

Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $x = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Αν είναι, να βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Άσκηση 12:

Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$