

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Άσκηση 1:

Έστω

$$f(x, y) = \sqrt[3]{y + 6} + \ln(x^2 - y).$$

Να βρείτε την τιμή $f(e, 0)$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική απεικόνιση του πεδίου ορισμού της f .

Άσκηση 2:

Έστω

$$f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και στη συνέχεια την τιμή $f(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Άσκηση 3:

Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$w = f(x, y, z) = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{3 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Άσκηση 4:

Βρείτε το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Μερική παράγωγος

Άσκηση 5:

Δίδεται ότι $f(x, y) = x^2y^3 - 2x^5 + 6y^2$. Βρείτε τις $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 2)$.

Άσκηση 6:

Δίδεται ότι $f(x, y, z, w) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$. Βρείτε τις παραγώγους f_x, f_y, f_z, f_w και δείξτε

$$f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + f_w^2 = 1.$$

Άσκηση 7:

Εάν $\varphi(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$, υπολογίστε τις παραγώγους: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

Άσκηση 8:

Δίδεται η συνάρτηση $f(x, y) = \ln(x^2y)$. Να βρεθούν όλες οι παράγωγοι δευτέρας τάξεως.

Άσκηση 9:

Δίδεται ότι: $w = \left(\frac{x - y + z}{x + y - z} \right)^n$. Δείξτε ότι:

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Οικονομικές εφαρμογές της μερικής παραγώγου

Άσκηση 10:

Δίδεται η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas $Q = \alpha K^\beta L^\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, όπου Q η παραγωγή, K το κεφάλαιο και L η εργασία. Βρείτε το οριακό προϊόν του κεφαλαίου και της εργασίας.

Άσκηση 11:

Η συνάρτηση ωφελιμότητας (χρησιμότητας) δυο αγαθών, που διατίθενται σε ποσότητες q_1, q_2 , δίδεται από τον τύπο $U = (q_1 + \alpha)^n (q_2 + \beta)^m$, $\alpha, \beta, n, m \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι οριακές χρησιμότητες των δυο αγαθών.

Άσκηση 12:

Να βρεθεί η σχέση των αγαθών στις κάτωθι περιπτώσεις, όπου D_1, D_2 οι συναρτήσεις ζήτησης :

(i) $D_1 = 5 - 6P_1 + 0.6P_2$, $D_2 = 2 + 2P_1 - P_2$,

(ii) $D_1 = 2 + P_1 - P_2$, $D_2 = 4 - 2P_1 - P_2$,

(iii) $D_1 = 7 + 6P_1$, $D_2 = 4 - 7P_2$.

Άσκηση 13:

Έστω x και y οι πληθυσμοί δύο πόλεων που απέχουν απόσταση d . Ο αριθμός των ταξιδιωτών T , από την μία πόλη στην άλλη, δίδεται από τη σχέση: $T = k \frac{xy}{d^n}$, k, n θετικές σταθερές. Υπολογίστε τα πρόσημα των μερικών παραγώγων πρώτης τάξεως και ερμηνεύστε τα.