

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Παραγωγή συνθέτων πλειομεταβλητών συναρτήσεων

Άσκηση 1:

Έστω ότι $z = x\psi$ και $x = \rho \cos \theta$, $\psi = \rho \sin \theta$. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ και $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

Άσκηση 2:

Εάν $f(x, y) = \ln(y^2 - x^2)$ με $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$. Υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial t}$ για $t = \frac{\pi}{8}$.

Άσκηση 3:

Έχουμε τη συνάρτηση $z = z(u, \nu)$ με $u = x + y$, $\nu = xy$. Δείξτε ότι:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{1}{x-y} \right) \left(x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = \left(\frac{1}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Άσκηση 4:

Η παραγωγή ενός προϊόντος δίδεται από τον τύπο: $Q = 2K^2 + 2L^2 + 40KL$, όπου K το κεφάλαιο και L η εργασία. Ακόμα, $K = I^2 + T^2$, $L = 2I^2 + 3T^3$, όπου I είναι οι επενδύσεις και T οι φόροι. Βρείτε την οριακή αλλαγή του Q , όταν αλλάζουν τα I και T , ταυτόχρονα.

Ελαστικότητες

Άσκηση 5:

Να αποδειχθεί ο τύπος: $\epsilon_f(x_\varphi) = \frac{\partial (\ln f)}{\partial (\ln x_\varphi)}$.

Άσκηση 6:

Υπολογίστε την μερική ελαστικότητα της $f = xye^{x+y}$, ως προς την μεταβλητή x .

Άσκηση 7:

Δίδεται η συνάρτηση Cobb-Douglas $Q = \alpha K^\beta L^\gamma$. Υπολογίστε τις ελαστικότητες $\epsilon_Q(K)$, $\epsilon_Q(L)$.

Ολικό διαφορικό

Άσκηση 8:

Να βρεθεί ο τύπος του ολικού διαφορικού της $f(x, y, z) = \ln(xy^2z)$.

Άσκηση 9:

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των διαφορικών βρείτε το διαφορικό της συνάρτησης: $z = e^{x^2+y^2}$.

Άσκηση 10:

Υπολογίσατε κατά προσέγγιση την ποσότητα: $\sqrt{4.02} + \sqrt{9.03}$.

Άσκηση 11:

Σε ένα αγρόκτημα η παραγωγή δίδεται από τον τύπο :

$$Q = 200 - 4(5 - A)^2 - \frac{1}{5}(15 - L)^2 - 5(5 - K)^2$$

όπου A η γή ($A \leq 5$), L η εργασία ($L \leq 15$) και K το κεφάλαιο ($K \leq 5$). Το κόστος της γής είναι 500.000 ανά μονάδα, της εργασίας 100.000 ανά μονάδα και του κεφαλαίου 1.200.000 ανά μονάδα. Στην παρούσα φάση έχουμε $A = 3$, $L = 10$, $K = 2$. Να βρείτε :

- (i) ποιος είναι ο φθηνότερος τρόπος για την αύξηση της παραγωγής;
- (ii) ποια είναι η οριακή ολική αλλαγή όταν αλλάζουν όλα ταυτόχρονα;

Άσκηση 12:

Σε μια επιχείρηση ισχύει η εξής συνάρτηση παραγωγής: $Q = (t_1^2 + t_2^2)^2 + \sqrt{t_1 t_2} + L$, όπου t_1 οι ώρες εργασίας ανά ημέρα της μηχανής A, t_2 οι ώρες εργασίας ανά ημέρα της μηχανής B και L ο αριθμός των εργαζομένων ανά ημέρα. Αυτή τη στιγμή $t_1 = 7$, $t_2 = 6$ και $L = 50$.

- (i) Αν $t_1 = 7.1$, $t_2 = 6.2$ και $L = 52$, να βρείτε την παραγωγή;
- (ii) Αν το κόστος είναι 20.000 για τον ελάχιστο αριθμό ωρών λειτουργίας της μηχανής A, 90.000 για τον ελάχιστο αριθμό ωρών λειτουργίας της μηχανής B και 30.000 για κάθε νέο εργαζόμενο, ποιος είναι ο φθηνότερος τρόπος αύξησης της παραγωγής;

Άσκηση 13:

Η παραγωγή ενός προϊόντος δίνεται από τον τύπο : $Q = 2K^2 + 2L^2 + 40KL$, όπου K κεφάλαιο και L εργασία. Ακόμα $K = I^2 + T^2$, $L = 2I^2 + 3T^3$, όπου I οι επενδύσεις και T οι φόροι. Βρείτε την οριακή ολική αλλαγή του Q , όταν αλλάζουν τα I και T , ταυτόχρονα.