

Θεωρία και Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

Σχολή Οικονομικών και Πολιτικών Επιστημών
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων και Οργανισμών

Διδάσκοντες: Μαγκούτας Α.

Καπνιάς Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Γιατί είναι Χρήσιμες οι Μέθοδοι Αριστοποίησης

- ◆ 1. Λήψη Βέλτιστων Οικονομικών Αποφάσεων
 - ▶ Μεγιστοποίηση κέρδους
 - ▶ Ελαχιστοποίηση κόστους
 - ▶ Βέλτιστη κατανομή πόρων
- ◆ 2. Ανάλυση & Μοντελοποίηση Δεδομένων
 - ▶ Πρόβλεψη πωλήσεων
 - ▶ Εκτίμηση παραμέτρων
 - ▶ Οικονομετρικά μοντέλα

Γιατί είναι Χρήσιμες οι Μέθοδοι Αριστοποίησης

◆ 3. Στρατηγικός Σχεδιασμός

- ▶ Επιλογή επενδύσεων
- ▶ Διαχείριση παραγωγής
- ▶ Βελτιστοποίηση εφοδιαστικής αλυσίδας

◆ 4. Βάση για Σύγχρονα Πεδία

- ▶ Data Analytics
- ▶ Machine Learning
- ▶ Επιχειρησιακή Έρευνα

Διοικητική διάσταση και αριστοποίηση αποφάσεων

- ▶ Πώς μεγιστοποιούμε κέρδος;
- ▶ Πώς ελαχιστοποιούμε κόστος;
- ▶ Πώς κατανέμουμε σωστά πόρους;
- ▶ Πώς επιλέγουμε τη βέλτιστη στρατηγική;

Παράδειγμα 1: Μεγιστοποίηση Κέρδους

- ▶ Μια επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα A και B.
- ▶ Κέρδος A: 20€
- ▶ Κέρδος B: 30€
- ▶ Περιορισμός: περιορισμένοι εργατοώρες
- ▶ Ερώτημα: Πόσες μονάδες από κάθε προϊόν πρέπει να παραχθούν;

Παράδειγμα 2: Ελαχιστοποίηση Κόστους

- ▶ Μια επιχείρηση θέλει να παράγει 1000 μονάδες προϊόντος.

Υπάρχουν:

- ▶ 2 πρώτες ύλες
 - ▶ διαφορετικές τιμές
 - ▶ διαφορετική παραγωγικότητα
-
- ▶ Ερώτημα: Ποιος είναι ο φθηνότερος συνδυασμός;

Παράδειγμα 3: Πρόβλεψη Πωλήσεων & Διαφήμιση

- ▶ Φανταστείτε ότι είστε οικονομικοί αναλυτές σε μια εταιρεία.
Έχετε ιστορικά δεδομένα αναφορικά με τα:
- ▶ Ποσά που δαπανήθηκαν σε διαφήμιση και πωλήσεις που απέφεραν.

Η διοίκηση θέλει να γνωρίζει :

- ▶ “Αν αυξήσουμε τη διαφήμιση κατά 1.000€, πόσο θα αυξηθούν οι πωλήσεις;”

Παράδειγμα 3: Πρόβλεψη Πωλήσεων & Διαφήμιση

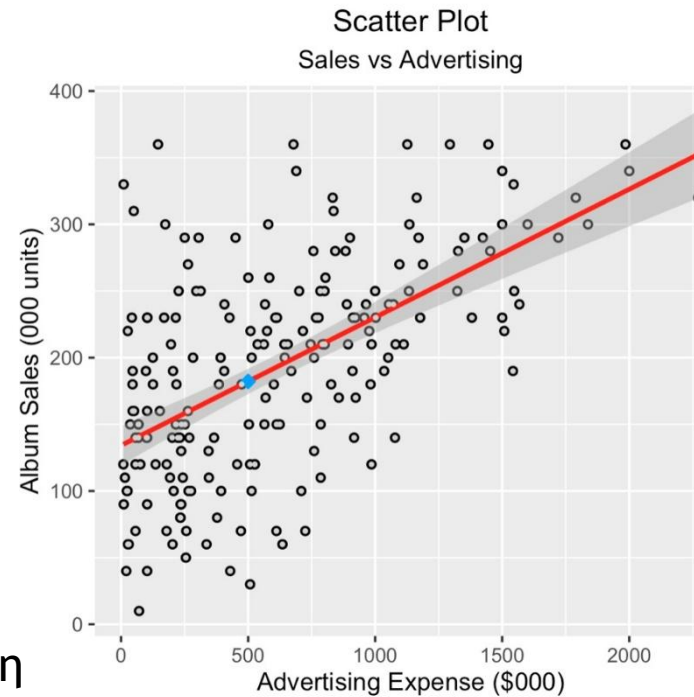
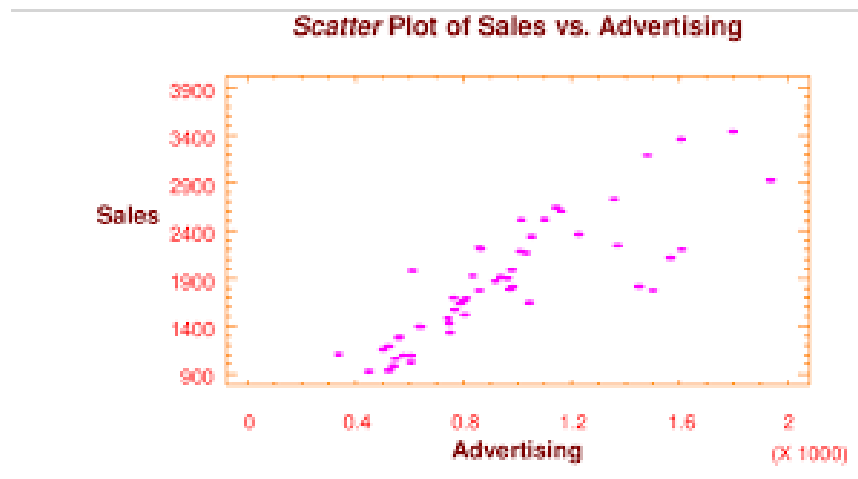
Παρακάτω δίνονται τα δεδομένα για την εν λόγω επιχείρηση:

Ερώτημα:

Ποια είναι η καλύτερη μαθηματική σχέση που συνδέει τη διαφήμιση με τις πωλήσεις;

Διαφήμιση (€ χιλ.)	Πωλήσεις (€ χιλ.)
1	8
2	11
3	15
4	18
5	21

Πρόβλεψη Πωλήσεων & Διαφήμιση



- ✓ Κάθε σημείο αντιστοιχεί σε μία παρατήρηση (μήνα/περίοδο).
- ✓ Ο οριζόντιος άξονας: Διαφήμιση (€ χιλ.)
- ✓ Ο κάθετος άξονας: Πωλήσεις (€ χιλ.)
- ✓ Παρατηρούμε θετική συσχέτιση.
- ✓ Τα σημεία δεν βρίσκονται σε τέλεια ευθεία.

Ερμηνεία

- ▶ Η Ιδέα της Βέλτιστης Ευθείας
- ▶ Ποια είναι η “καλύτερη” ευθεία;
- ▶ Θέλουμε μια ευθεία:

$$y=ax+b$$

που να ελαχιστοποιεί το συνολικό σφάλμα.

- ▶ Αν πάρω μια τυχαία ευθεία, κάποια σημεία θα είναι πάνω, κάποια κάτω.
- ▶ Η διαφορά αυτή είναι το σφάλμα.
- ▶ Θέλουμε την ευθεία που κάνει το συνολικό σφάλμα όσο το δυνατόν μικρότερο.

Ερμηνεία

$$\text{δηλ. } \min \sum (y_i - (ax_i + b))^2$$

- ▶ Αυτό ανάγεται πλέον σε καθαρά μαθηματικό πρόβλημα.
- ▶ Βρίσκουμε τις τιμές των a και b που ελαχιστοποιούν το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα.
- ▶ Και για να το λύσουμε... θα χρειαστούμε τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία, όπως πίνακες.

Τι είναι Μαθηματικά η Αριστοποίηση;

- ▶ Βρίσκουμε:

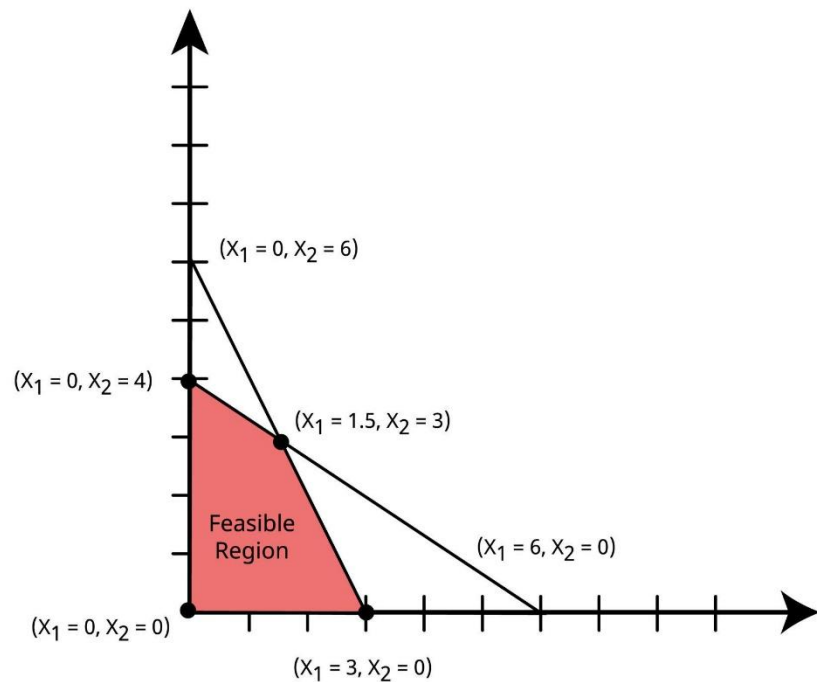
$$\max f(x) \text{ ή } \min f(x)$$

- ▶ Με Περιορισμούς
υπό τους περιορισμούς:

$$g_1(x)=0, \quad g_2(x) \leq 0$$

- ✓ $f(x)$: αντικειμενική συνάρτηση (στόχος)
- ✓ x : μεταβλητές απόφασης
- ✓ $g(x)$: περιορισμοί (πόροι, τεχνολογία, προϋπολογισμός)

Η έννοια του περιορισμού



- ❑ Οι περιορισμοί δημιουργούν εφικτή περιοχή
- ❑ Δεν επιτρέπονται όλες οι τιμές των μεταβλητών
- ❑ Η βέλτιστη λύση πρέπει να ανήκει στην εφικτή περιοχή
- ❑ Το μέγιστο επιτυγχάνεται συχνά στο σύνορο

Δομή Μαθήματος

- ▶ Πίνακες & Γραμμική Άλγεβρα
- ▶ Συστήματα $Ax = b$
- ▶ Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών
- ▶ Ακρότατα
- ▶ Lagrange
- ▶ Least Squares

Γιατί Χρειαζόμαστε Πίνακες;

- ▶ Περιγράφουν οικονομικά συστήματα
- ▶ Περιγράφουν ισορροπίες
- ▶ Περιγράφουν παραγωγικές σχέσεις
- ▶ Περιγράφουν μοντέλα εισροών-εκροών

$$Ax=b$$

- ✓ Αυτή η μορφή εμφανίζεται παντού:

π.χ. ισορροπία αγοράς, παραγωγικά μοντέλα, οικονομετρικά μοντέλα.

- ✓ Δεν αρκεί η διαισθητική/ λογική λήψη απόφασης... Χρειαζόμαστε μαθηματική απόδειξη βελτιστότητας!

Εισαγωγή στους Πίνακες

Περιεχόμενο:

- ▶ Πολλά προϊόντα
- ▶ Πολλοί πόροι
- ▶ Πολλοί περιορισμοί
- ▶ Πολλά δεδομένα

👉 Δεν μπορούμε να γράφουμε 10 εξισώσεις κάθε φορά.

→ Εκεί χρειαζόμαστε δομή. Τη δομή αυτή προσφέρουν οι πίνακες!

Οικονομικό Παράδειγμα

- ▶ Παραγωγικό Μοντέλο
- ▶ Μια επιχείρηση παράγει 2 προϊόντα.

	Εργασία	Πρώτη Ύλη
Προϊόν Α	2	1
Προϊόν Β	1	3
Διαθεσιμότητα πόρων	100 μονάδες	90 μονάδες

Κάθε προϊόν αναλώνει διαφορετικούς πόρους.

Αν παράγω x μονάδες Α και y μονάδες Β, πόσους πόρους θα καταναλώσω;

Οικονομικό Παράδειγμα

- ▶ Σύστημα Εξισώσεων

$$2x+y=100$$

$$x+3y=90$$

- ▶ Αυτό είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων.
- ▶ Όσο μεγαλώνει η επιχείρηση, τόσο μεγαλώνει το σύστημα.
- ▶ Μετάπτωση δεδομένων σε Πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Τι είναι Πίνακας;

- ▶ **Ορισμός:** Ορθογώνια διάταξη αριθμών σε γραμμές και στήλες, υπό τη γενική μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- ▶ Ο πίνακας απλώς οργανώνει πληροφορία.
- ▶ Κάθε γραμμή μπορεί να είναι ένας πόρος.
- ▶ Κάθε στήλη μπορεί να είναι ένα προϊόν.