

Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Πίνακες

- **Πίνακας** (matrix) ονομάζεται μια ορθογώνια διάταξη από στοιχεία ταξινομημένα σε οριζόντιες γραμμές και κατακόρυφες στήλες μέσα σε αγκύλες.
- Τα στοιχεία ενός πίνακα θα είναι συνήθως πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί (βαθμωτά) ή πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Ένας πίνακας ονομάζεται πραγματικός πίνακας (ή αλλιώς πραγματικός) αν όλα τα στοιχεία του είναι πραγματικοί αριθμοί ή πραγματικές συναρτήσεις.
- Αν ένα τουλάχιστον από τα στοιχεία ενός πίνακα είναι μιγαδικός αριθμός, τότε ο πίνακας ονομάζεται μιγαδικός πίνακας (ή απλά μιγαδικός).
- Αν όλα τα στοιχεία ενός πίνακα είναι μηδενικά, τότε ο πίνακας ονομάζεται **μηδενικός**.

Συμβολισμός

- Τους πίνακες θα τους συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα ενώ τα στοιχεία τους με τα αντίστοιχα μικρά συνοδευμένα από έναν διπλό δείκτη.
- Έτσι, ένας πίνακας A με m γραμμές και n στήλες γράφεται με τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Οι φυσικοί αριθμοί m, n , οι οποίοι εκφράζουν τον αριθμό των γραμμών και τον αριθμό των στηλών, αντίστοιχα, σε έναν πίνακα ονομάζονται διαστάσεις ή διάσταση του πίνακα. Με $A_{m \times n}$ θα συμβολίζουμε έναν πίνακα που έχει m γραμμές και n στήλες.
- Ο διπλός δείκτης στα στοιχεία του πίνακα προσδιορίζει τη θέση του αντίστοιχου στοιχείου στον πίνακα. Γενικά, με a_{ij} ή (i, j) (συμβολίζουμε το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή i και τη στήλη j του πίνακα A).
- Σε κάποιες περιπτώσεις, όπου απαιτείται συμπίεση του συμβολισμού ενός πίνακα, ο πίνακας A μπορεί να γράφεται ως:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \text{ ή } A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \text{ ή } A = [a_{ij}].$$

- Ο πρώτος και ο δεύτερος συμβολισμός θα χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου η γνώση της διάστασης είναι σημαντική για την ανάπτυξη του κειμένου, ενώ ο τρίτος σε περιπτώσεις όπου δεν είναι απαραίτητο να δοθεί έμφαση στη διάσταση του πίνακα.

-
- a) Ένας πίνακας που έχει μόνο μία γραμμή ονομάζεται **πίνακας γραμμή** (ή διάνυσμα γραμμή), ενώ ένας πίνακας που έχει μόνο μία στήλη ονομάζεται **πίνακας στήλη** (ή πίνακας κολόνα ή διάνυσμα στήλη).
- b) Ένας πίνακας που έχει μόνο μία γραμμή και μόνο μία στήλη, δηλαδή περιέχει μόνο ένα στοιχείο, ονομάζεται **πίνακας στοιχείο**.
- c) Ένας πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν ονομάζεται **μηδενικός πίνακας** και συμβολίζεται με $\mathbb{O}$.
- d) Ένας πίνακας με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, έστω n , ονομάζεται **τετραγωνικός πίνακας** και αντί για τον συμβολισμό $A_{n \times n}$ χρησιμοποιούμε τον πιο εύχρηστο A_n .
- e) Η **κύρια διαγώνιος** του πίνακα A αποτελείται από τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Ένας πίνακας που έχει στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιο (και όλα τα υπόλοιπα είναι μηδέν) ονομάζεται **διαγώνιος πίνακας**.
- f) Ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με 1 ονομάζεται **μοναδιαίος (ή ταυτοτικός) πίνακας**.

Ένας τέτοιος πίνακας διάστασης $n \times n$ συμβολίζεται με I_n ή απλά I .

- **Σημείωση:**

- (α) Ένας πίνακας στοιχείο μπορεί να θεωρηθεί ταυτόχρονα πίνακας γραμμή και πίνακας στήλη. Προφανώς, κάθε πίνακας στοιχείο έχει διάσταση 1×1 .
- (β) Ο μοναδιαίος πίνακας $n \times n$ έχει τη μορφή:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι λοιπόν αν $I_n = [d_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, τότε

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } i = j \\ 0, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$$

Πράξεις μεταξύ πινάκων

- **Ορισμός:**

Δύο πίνακες ορίζονται ως ίσοι αν έχουν την ίδια διάσταση και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Ειδικότερα, αν

- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ τότε

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ για κάθε } i, j.$$

- **Πρόσθεση πινάκων**

Δύο πίνακες μπορούν να προστεθούν, αν και μόνο αν έχουν την ίδια διάσταση. Η πρόσθεση των $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ ορίζεται ως η πρόσθεση κάθε ζεύγους των αντίστοιχων στοιχείων (με την έννοια της αντίστοιχης ij -θέσης τους στους πίνακες A, B).

Δηλαδή,

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}], \quad \text{όπου } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

- Ο πίνακας αθροίσματος $C = [c_{ij}]$ πρέπει να έχει την ίδια διάσταση με τους πίνακες $[a_{ij}]$ και $[b_{ij}]$.
- Αντίστοιχα, η πράξη της αφαίρεσης $A - B$ μπορεί να οριστεί, αν και μόνο αν, οι A και B έχουν την ίδια διάσταση.

$$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [d_{ij}], \quad \text{όπου } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Ιδιότητες

Για κάθε $m \times n$ πίνακες A, B και C , ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ο $A + B$ είναι πάλι πίνακας διάστασης $m \times n$ (**Ιδιότητα της κλειστότητας**).
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (**Προσεταιριστική ιδιότητα**).
3. $A + B = B + A$ (**Αντιμεταθετική Ιδιότητα**).
4. Ο $m \times n$ μηδενικός πίνακας $\mathbb{O}$, έχει την ιδιότητα $A + \mathbb{O} = A$ (**Ουδέτερο στοιχείο**).
5. Ο $m \times n$ πίνακας $(-A)$ έχει την ιδιότητα $A + (-A) = \mathbb{O}$ (**Ιδιότητα του προσθετικού αντιστρόφου ή προσθετικός αντίθετος**).

Πολλαπλασιασμός πινάκων

- Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ δύο πινάκων, σε αντίθεση με τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό, μπορεί να γίνει μόνο αν πληρείται μια συνθήκη συμβατότητας σχετικά με τη διάσταση των δύο πινάκων.
- Με δεδομένους δύο πίνακες A και B , η συνθήκη συμβατότητας για τον πολλαπλασιασμό AB είναι ότι η διάσταση (αριθμός) των στηλών του A θα πρέπει να είναι ίση με τη διάσταση (αριθμό) των γραμμών του δεύτερου πίνακα B .
- Γενικά, αν ο A είναι διάστασης $m \times n$ και ο B είναι διάστασης $p \times q$, το γινόμενο AB ορίζεται, αν και μόνο αν $n = p$.
- Όταν αυτό ορίζεται, ο πίνακας γινόμενο AB θα έχει διάσταση $m \times q$, δηλαδή τον ίδιο αριθμό γραμμών όπως και ο A και τον ίδιο αριθμό στηλών όπως και ο B .
- Το (i,j) στοιχείο του πίνακα γινόμενο AB ορίζεται ως εκείνο το στοιχείο του $m \times q$ πίνακα AB που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο της i -γραμμής του πίνακα A με τη j -στήλη του πίνακα B . Δηλαδή:

$$AB = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p=n} a_{ik}b_{kj}.$$

Ιδιότητες

- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός, δηλαδή δεν ισχύει κατά ανάγκη $AB = BA$.
- Υπό την προϋπόθεση ότι τα παρακάτω γινόμενα πινάκων ορίζονται, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
 1. $(AB)C = A(BC) = ABC$ (Προσεταιριστική ιδιότητα).
 2. $A(B + C) = AB + AC$ (Επιμεριστική Ιδιότητα).
 3. $(B + C)A = BA + CA$ (Επιμεριστική Ιδιότητα).

Σημείωση:

Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε ισχύει $AIn = A$ και $ImA = A$.

Δύναμη πίνακα

- Έστω A τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας.
- Οι δυνάμεις A του πίνακα A ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$A^0 = I_n, A^1 = A \text{ και } A^n = A^{n-1} \cdot A, n \geq 2.$$

Ανάστροφος ενός πίνακα

- Ο ανάστροφος ενός πίνακα A , τον οποίο θα συμβολίζουμε με A^T ορίζεται ως ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον A , αν εναλλάξουμε τις γραμμές του με τις αντίστοιχες στήλες του. Αν ο A είναι πίνακας διάστασης $m \times n$ τότε ο ανάστροφος του, A^T , είναι πίνακας διάστασης $n \times m$.

Ιδιότητες:

Ιδιότητα 1.1. $(A + B)^T = A^T + B^T$, A, B $m \times n$ πίνακες

Ιδιότητα 1.2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$, A $m \times n$ πίνακας

Ιδιότητα 1.3. $(AB)^T = B^T A^T$, A $m \times n$ πίνακας και B $n \times k$ πίνακας

Ιδιότητα 1.4. $(A^T)^T = A$, A $m \times n$ πίνακας.

Τριγωνικοί, συμμετρικοί πίνακες

Τριγωνικοί, συμμετρικοί πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ με στοιχεία μηδέν πάνω από την κύρια διαγώνιο (δηλ. $a_{ij} = 0$ με $i < j$) ονομάζεται **κάτω τριγωνικός (lower triangular)**.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ με στοιχεία μηδέν κάτω από την κύρια διαγώνιο (δηλ. $a_{ij} = 0$ με $i > j$) ονομάζεται **τριγωνικός άνω (upper triangular)**.

Πολλές φορές, ένας πίνακας ο οποίος είναι άνω ή κάτω τριγωνικός, ονομάζεται απλά **τριγωνικός (triangular)**.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}]$ για τον οποίο ισχύει $A^T = A$ ονομάζεται **συμμετρικός (symmetric)**.