

Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Περιεχόμενα

1. Παραγωγή σύνθετων πλειομεταβλητών συναρτήσεων
2. Ελαστικότητες
3. Ολικό διαφορικό

1. Παραγωγή σύνθετων πλειομεταβλητών συναρτήσεων

- Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Έστω $f = f(x, y)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και έστω ακόμα ότι οι μεταβλητές x, y δεν είναι ανεξάρτητες μεταβλητές αλλά είναι συναρτήσεις δύο άλλων μεταβλητών ω, φ , δηλαδή $x = x(\omega, \varphi), y = y(\omega, \varphi)$. Οι παράγωγοι της αρχικής συνάρτησης f , ως προς τις μεταβλητές ω και φ , δίδονται από τους τύπους:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

• Γενικότεροι τύποι

Εάν $f = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu)$ είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από ν μεταβλητές και κάθε μία από αυτές τις μεταβλητές είναι συνάρτηση δύο άλλων μεταβλητών p, t , δηλαδή: $x_1 = x_1(p, t), x_2 = x_2(p, t), \dots, x_\nu = x_\nu(p, t)$, τότε οι παράγωγοι της f ως προς τις μεταβλητές p, t δίδονται από τους τύπους:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial p}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial t}$$

Θα δώσουμε τώρα τον γενικό τύπο της σύνθετης παραγώγισης. Έστω f μια συνάρτηση n μεταβλητών, $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Έστω ότι κάθε μεταβλητή x_j είναι συνάρτηση m άλλων μεταβλητών, δηλαδή:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(z_1, z_2, \dots, z_m) \\ x_2 &= x_2(z_1, z_2, \dots, z_m) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(z_1, z_2, \dots, z_m) \end{aligned}$$

Οι παράγωγοι της f ως προς τις μεταβλητές $z_1, z_2, \dots, z_m$, δίδονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial z_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial z_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial z_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial z_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial z_m}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_m} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial z_1} & \frac{\partial x_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial z_m} \end{pmatrix}.$$

2. Ελαστικότητες

Μερική ελαστικότητα

Ορισμός Έστω συνάρτηση $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ορίζουμε ως **μερική ελαστικότητα της f ως προς την μεταβλητή x_φ την ποσότητα:**

$$\epsilon_f(x_\varphi) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_\varphi}}{\frac{f}{x_\varphi}} = \frac{\partial f}{\partial x_\varphi} \cdot \frac{x_\varphi}{f}$$

Η μερική ελαστικότητα της συνάρτησης f , ως προς την μεταβλητή x_φ , μετράει την επί τοις εκατό μεταβολή της συναρτήσεως, όταν η μεταβλητή x_φ αλλάζει κατά 1% και όλες οι άλλες παραμένουν σταθερές.

Ιδιότητες:

Ιδιότητα 1 Έστω $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μια συνάρτηση n μεταβλητών. Έστω ότι η μεταβλητή x_k αλλάζει 'λίγο', ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές, κατά $\rho_k\%$ και έστω $\Delta f\%$ η συνολική ποσοστιαία αλλαγή της f . Ισχύει ο τύπος:

$$\Delta f\% = \epsilon_f(x_k)\rho_k$$

Ιδιότητα 2 Έστω $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μια συνάρτηση n μεταβλητών. Έστω ότι κάθε μεταβλητή αλλάζει 'λίγο' κατά $\rho_i\%$, $i = 1, \dots, n$ και έστω $\Delta f\%$ η συνολική ποσοστιαία αλλαγή της f . Ισχύει ο τύπος:

$$\Delta f\% = \epsilon_f(x_1)\rho_1 + \epsilon_f(x_2)\rho_2 + \dots + \epsilon_f(x_n)\rho_n.$$

Ιδιότητα 3 Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μια συνάρτηση n μεταβλητών. Έστω ότι κάθε μεταβλητή $x_i, i = 1, \dots, n$, είναι συνάρτηση του χρόνου t . Ισχύει ο τύπος:

$$r_f = \epsilon_f(x_1)r_{x_1} + \epsilon_f(x_2)r_{x_2} + \dots + \epsilon_f(x_n)r_{x_n},$$

όπου $r_y = \frac{dy/dt}{y}$, ο στιγμιαίος ρυθμός μεγέθυνσης της ποσότητας y .

Ιδιότητα 4 (Ελαστικότητα συνθέτων συναρτήσεων) Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μια συνάρτηση n μεταβλητών. Έστω ότι κάθε μεταβλητή $x_i, i = 1, \dots, n$, εξαρτάται από m άσθλιες μεταβλητές: $x_i = g_i(w_1, w_2, \dots, w_m)$. Ισχύει ο τύπος:

$$\epsilon_f(w_j) = \sum_{i=1}^n \epsilon_f(x_i)\epsilon_{x_i}(w_j).$$

3. Ολικό διαφορικό

Έστωσαν x, y μεταβλητές που παίρνουν την τιμή x_0, y_0 , αντίστοιχα. Θα λέμε ότι οι μεταβλητές x, y μεταβάλλονται τοπικά, εάν μπορούν να πάρουν τιμές μέσα σε μια περιοχή των x_0, y_0 , αντίστοιχα.

Ορισμός (Συνάρτηση δύο μεταβλητών) Έστω $f(x, y)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και (x_0, y_0) ένα συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού της. Θεωρούμε ότι οι αριθμοί x_0, y_0 μεταβάλλονται τοπικά και παίρνουν τις τιμές x^*, y^* έτσι ώστε το σημείο (x^*, y^*) να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . **Ολικό διαφορικό** της f , στο σημείο (x_0, y_0) , ονομάζουμε την ποσότητα:

$$df(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} dy,$$

όπου $dx = x^* - x_0, dy = y^* - y_0$. Δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι πραγματικοί αριθμοί, έπεται ότι το διαφορικό $df(x_0, y_0)$ είναι πραγματικός αριθμός. Μετράει, κατά προσέγγιση, την αλληλαγή της $f(x, y)$ όταν οι τιμές των μεταβλητών της αλλιάζουν από το (x_0, y_0) στο (x^*, y^*) .

Ορισμός (Συνάρτηση πολλών μεταβλητών) Έστω $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μια συνάρτηση n μεταβλητών και $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ένα συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού της. Θεωρούμε ότι το εν λόγω σημείο μεταβάλλεται τοπικά και παίρνει τις τιμές $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, έτσι ώστε το νέο σημείο να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . **Ολικό διαφορικό** της f , στο σημείο $\vec{x}_0$, ονομάζουμε την ποσότητα :

$$df(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\vec{x}_0} dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\vec{x}_0} dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{\vec{x}_0} dx_n,$$

όπου $dx_1 = x_1^* - x_1^0, dx_2 = x_2^* - x_2^0, \dots, dx_n = x_n^* - x_n^0$. Δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες στο δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι πραγματικοί αριθμοί, έπεται ότι το διαφορικό $df(\vec{x}_0)$ είναι πραγματικός αριθμός. Μειράει, κατά προσέγγιση, την αλληλαγή της f , όταν οι τιμές των μεταβλητών της αλληιάζουν απο την θέση $\vec{x}_0$ τοπικά.

Ιδιότητες:

Ιδιότητα 1. Αν x είναι μια ποσότητα η οποία μεταβάλλεται τοπικά, τότε το διαφορικό dx μετράει την απόλυτη μεταβολή της x , το πηλίκο dx/x μετράει την σχετική μεταβολή και η έκφραση $dx \cdot 100/x$ την ποσοστιαία μεταβολή, συμβολιζόμενη $\Delta x\%$.

Ιδιότητα 2. Έστωσαν f, g δύο συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, ισχύουν οι κάτωθι τύποι για τα ολικά διαφορικά τους :

1. $d(C) = 0$, C μια σταθερή ποσότητα.

2. $d(f + g) = df + dg$,

3. $d(af) = a df$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

4. $d(fg) = f dg + g df$,

5. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$.

Ιδιότητα 3. Αν η f είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής και η g συνάρτηση πολλών μεταβλητών, ισχύει η σχέση :

$$d[f(g)] = \frac{df}{dg} dg.$$