

Θεωρία & Εφαρμογές Μεθόδων Αριστοποίησης

ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΡΓΑΝΙΣΜΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: ΜΑΓΚΟΥΤΑΣ Α., ΚΑΠΝΙΑΣ Γ.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Περιεχόμενα

1. Τετραγωνικές μορφές
2. Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες
3. Τετραγωνικές μορφές με γραμμικούς περιορισμούς

Τετραγωνικές μορφές - Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες

Τετραγωνικές μορφές

Οι τετραγωνικές μορφές είναι συναρτήσεις που απεικονίζουν ένα διάνυσμα σε έναν αριθμό και έχουν σημαντική εφαρμογή στην εξαγωγή κριτηρίων (δεύτερης τάξης) για τη βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Επίσης, μεταξύ άλλων, έχουν σημαντικές εφαρμογές στην οικονομετρία (εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου) και τη Στατιστική (έλεγχος υποθέσεων).

Στην απλή περίπτωση, που έχουμε δεδομένο έναν 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, ορίζουμε ως **τετραγωνική μορφή** τη συνάρτηση $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ορισμός Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $\mathbf{x}$ ένα $n \times 1$ διάνυσμα, τότε ορίζουμε ως **τετραγωνική μορφή** τη βαθμωτή συνάρτηση $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Αναλυτικά έχουμε ότι,

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα Έστω A ένας μη συμμετρικός πίνακας, τότε ο πίνακας $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ με στοιχεία της μορφής

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji})$$

είναι συμμετρικός και επιπλέον ο A και ο $\tilde{A}$ ορίζουν την ίδια τετραγωνική μορφή.

Σύμφωνα με το θεώρημα, μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι μια τετραγωνική μορφή ορίζεται από ένα συμμετρικό πίνακα. Κατά συνέπεια, για τα στοιχεία του πίνακα A , που ορίζει την τετραγωνική μορφή, θα υποθέτουμε πάντα ότι ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για $i, j = 1, 2, \dots, n$. Αναλυτικά έχουμε ότι,

$$q(\mathbf{x}) = q \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots +$$

$$2a_{2n}x_2x_n + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + \dots + 2a_{3n}x_3x_n + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

Θετικά και αρνητικά ορισμένοι πίνακες

Ορισμός Μια τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

- α) **θετικά ορισμένη**, αν η $q(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$.
- β) **αρνητικά ορισμένη**, αν η $q(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$, για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$.
- γ) **αόριστη**, αν είναι θετικά ορισμένη για κάποια $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, και αρνητικά ορισμένη για κάποια άλλη.
- δ) **θετικά ημιορισμένη**, αν η $q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$.
- ε) **αρνητικά ημιορισμένη**, αν η $q(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$, για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$.

Ορισμός Ένας συμμετρικός πίνακας A ονομάζεται **θετικά ορισμένος (ημιορισμένος)**, **αρνητικά ορισμένος (ημιορισμένος)** ή **αόριστος** αν η τετραγωνική μορφή που ορίζει είναι θετικά ορισμένη (ημιορισμένη), αρνητικά ορισμένη (ημιορισμένη) ή αόριστη, αντίστοιχα.

Ορισμός Έστω A $n \times n$ πίνακας και k ακέραιος με $1 \leq k \leq n$. Ορίζουμε ως **κύριο υποπίνακα του A τάξης k** κάθε υποπίνακα του A που προκύπτει αν διαγράψουμε $n - k$ γραμμές και στήλες του A .

Ορισμός Έστω A $n \times n$ πίνακας και k ακέραιος με $1 \leq k \leq n$. Ορίζουμε ως **ηγετικό κύριο υποπίνακα του A τάξης k** κάθε υποπίνακα του A που προκύπτει αν διαγράψουμε τις τελευταίες $n - k$ γραμμές και στήλες του A .

Ορισμός Έστω A $n \times n$ πίνακας και k ακέραιος με $1 \leq k \leq n$. Ορίζουμε ως **ελάσσονες υποορίζουσες** τις ορίζουσες των κύριων υποπινάκων του A .

Ορισμός Έστω A $n \times n$ πίνακας και k ακέραιος με $1 \leq k \leq n$. Ορίζουμε ως **ηγετικές κύριες ελάσσονες υποορίζουσες** τις ορίζουσες των ηγετικών κύριων υποπινάκων του A και συμβολίζουμε με Δ_k .

Παράδειγμα Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Για $1 \leq k \leq n$, να γράψετε όλες τις ηγετικές κύριες ελάσσονες υποορίζουσες Δ_k του A .

Λύση: Είναι

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \\ \Delta_k &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Θεώρημα (Κριτήριο ιδιοτιμών). Έστω A $n \times n$ συμμετρικός πίνακας και λ_i οι ιδιοτιμές του. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :

- Ο A είναι θετικά ορισμένος, αν και μόνο αν, $\lambda_i > 0$.
- Ο A είναι θετικά ημιορισμένος, αν και μόνο αν, $\lambda_i \geq 0$.
- Ο A είναι αρνητικά ορισμένος, αν και μόνο αν, $\lambda_i < 0$.
- Ο A είναι αρνητικά ημιορισμένος, αν και μόνο αν, $\lambda_i \leq 0$.

Θεώρημα (1ο Κριτήριο οριζουσών). Έστω A $n \times n$ συμμετρικός πίνακας. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :

- Ο A είναι θετικά ορισμένος, αν και μόνο αν, $\Delta_k > 0$, για $k = 1, 2, \dots, n$.
- Ο A είναι αρνητικά ορισμένος, αν και μόνο αν, $(-1)^k \Delta_k > 0$, για $k = 1, 2, \dots, n$.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο οριζουσών). Έστω A $n \times n$ συμμετρικός πίνακας και $k = 1, 2, \dots, n$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :

- Ο A είναι θετικά ημιορισμένος (και όχι θετικά ορισμένος), αν και μόνο αν, $\Delta_k = 0$, για κάποιες τιμές του k και $\Delta_k > 0$ για τις υπόλοιπες τιμές του k .
- Ο A είναι αρνητικά ημιορισμένος (και όχι αρνητικά ορισμένος), αν και μόνο αν, $\Delta_k = 0$, για κάποιες τιμές του k , ενώ για τις υπόλοιπες τιμές του k οι ορίζουσες Δ_k εναλλάσσουν πρόσημο, αρχίζοντας από αρνητικό πρόσημο.

Τετραγωνικές μορφές με γραμμικούς περιορισμούς

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή δύο μεταβλητών

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

και επιπλέον υποθέτουμε ότι οι δυο μεταβλητές x, y ικανοποιούν τη γραμμική συνθήκη

$$px + ry = 0, \quad r \neq 0.$$

Ορισμός Μια τετραγωνική μορφή $q(x, y)$, τις οποίας οι μεταβλητές x, y ικανοποιούν τη γραμμική συνθήκη $px + ry = 0, r \neq 0$ ονομάζεται **θετικά (αρνητικά) ορισμένη ως προς τη συνθήκη** $px + ry = 0$, αν $q(x, y) > 0 (< 0)$, για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $px + ry = 0$.

Λύνουμε τη συνθήκη ως προς y , δηλαδή

$$y = -\frac{p}{r}x,$$

και αντικαθιστούμε στην τετραγωνική μορφή q ,

$$q(x, y) = q(x) = ax^2 + 2bx \left(-\frac{p}{r}x\right) + c \left(-\frac{p}{r}x\right)^2 = \frac{1}{r^2} (ar^2 - 2bpr + cp^2) x^2.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$ar^2 - 2bpr + cp^2 = -\det \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ p & a & b \\ r & b & c \end{pmatrix}$$

Πρόταση Η τετραγωνική μορφή $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, ως οποίας οι μεταβλητές x, y ικανοποιούν τη γραμμική συνθήκη $px + ry = 0$, $r \neq 0$ είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν

$$\det \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ p & a & b \\ r & b & c \end{pmatrix} < 0 (> 0).$$