

(εἰς ὁρισμένες περιπτώσεις διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκεῖ ἡ ἀνάπτυξις τῶν ἰακωβιανῶν εἰς τὰς ἀντιστοίχους δριζούσας). Οὕτω :

$$\frac{\partial(y_i \cdot y_j)}{\partial(x_1, x_2)} = - \frac{\partial(y_j, y_i)}{\partial(x_1, x_2)} \quad (\text{Π. 1.19})$$

$$\frac{\partial(y_i, y_i)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(y_i, k)}{\partial(x_1, x_2)} = 0 \quad (k = \text{σταθ.}) \quad (\text{Π. 1.20})$$

*Ἐὰν $x_1 = f_1(z_1, z_2)$ καὶ $x_2 = f_2(z_1, z_2)$ ἔχομεν :

$$\frac{\partial(y_i, y_j)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(y_i, y_j)}{\partial(z_1, z_2)} \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(x_1, x_2)} \quad (\text{Π. 1.21})$$

(πολλαπλασιαστικὴ ιδιότης).

*Ἐπίσης :

$$\frac{\partial(y_i, y_j)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{1}{\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_i, y_j)}} \quad (\text{Π. 1.22})$$

(ἀνάλογον τῶν ἀπλῶν παραγῶγων).

Εἰδικώτερον :

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \right)_{x_2} = \frac{\partial(y_i, x_2)}{\partial(x_1, x_2)} = - \frac{\partial(x_2, y_i)}{\partial(x_1, x_2)} \quad (\text{Π. 1.23})$$

$$\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_2} \right)_{x_1} = \frac{\partial(x_1, y_j)}{\partial(x_1, x_2)} = - \frac{\partial(y_j, x_1)}{\partial(x_1, x_2)} \quad (\text{Π. 1.24})$$

*Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν, διὰ τῶν ἰακωβιανῶν, τὴν παραγῶγον

$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \right)_{y_j}$ ἐξ ἄλλων παραγῶγων ὡς πρὸς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τὰς x_1, x_2 .

*Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (23) καὶ (21 - 22) ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \right)_{y_j} &= \frac{\partial(y_i, y_j)}{\partial(x_1, y_j)} = \frac{\partial(y_i, y_j)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1, y_j)} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \right)_{x_2} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_2} \right)_{x_1} - \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2} \right)_{x_1} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_1} \right)_{x_2}}{\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_2} \right)_{x_1}} \quad (\text{Π. 1.24a}) \end{aligned}$$

Τὸ ἀποτέλεσμα συμφωνεῖ πρὸς τὸ ἤδη ἐπιτευχθὲν (ἐξίσωσις 15).

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς παραγώγου $\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right)_{y_k}$ γράφομεν :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right)_{y_k} &= \frac{\partial(y_i, y_k)}{\partial(y_j, y_k)} = \frac{\partial(y_i, y_k)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_j, y_k)} \\ &= \frac{\partial(y_i, y_k)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{1}{\frac{\partial(y_j, y_k)}{\partial(x_1, x_2)}} = \frac{\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{\partial y_k}{\partial x_2} - \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \frac{\partial y_k}{\partial x_1}}{\frac{\partial y_j}{\partial x_1} \frac{\partial y_k}{\partial x_2} - \frac{\partial y_j}{\partial x_2} \frac{\partial y_k}{\partial x_1}} \quad (\text{Π. 1.24β}) \end{aligned}$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ προηγουμένως ἐπιτευχθέν, (ἔξισωσις 17), εἶναι ὅμως προφανῆς ἡ ὑπεροχὴ τῆς μεθόδου τῶν ἰακωβιανῶν εἰς ἀπλότητα καὶ ταχύτητα.

Ἐποθέσωμεν τέλος ὅτι $y_1 = f_1(y_2)$ καὶ $y_2 = f_2(x_1, x_2)$.

Ἔχομεν ἐπομένως :

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{x_2} = \frac{dy_1}{dy_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{x_2} \quad (\text{Π. 1.25})$$

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)_{x_1} = \frac{dy_1}{dy_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)_{x_1} \quad (\text{Π. 1.26})$$

Ἀπαλείφοντες τὴν $\frac{dy_1}{dy_2}$, μεταξὺ τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων, λαμβάνομεν :

$$J \left(\frac{y_1, y_2}{x_1, x_2} \right) = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{x_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)_{x_1} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)_{x_1} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{x_2} = 0 \quad (\text{Π. 1.27})$$

Ἡ ἐξίσωσις (27) ἀποτελεῖ τὴν ἰκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἡ y_1 εἶναι συνάρτησις μόνον τῆς y_2 . Ἐφαρμογὴν τῆς συνθήκης (27) ἔχομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4.3.49).

Δίδομεν κατωτέρω δύο παραδείγματα ἐκ τῆς θερμοδυναμικῆς.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1ον. Ἐστω ὅτι ζητεῖται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς παραγώγου $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_V$, ἐκ παραγῶγων ἀναφερομένων εἰς μεταβλητὰς P, T . Ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (24α) ἔχομεν :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_V = \frac{\partial(H, V)}{\partial(P, V)} = \frac{\partial(H, V)}{\partial(P, T)} \frac{\partial(P, T)}{\partial(P, V)} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \right] \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T + C_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

Αἱ παράγωγοι $\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T$ καὶ $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$ ὑπολογίζονται ἐκ τῆς καταστατικῆς ἔξισώσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἰδανικοῦ ἀερίου $\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = 0$ καὶ ἐπομένως $\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_V = C_P \frac{V}{R}$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2ον. Ὑπολογισμὸς τῆς παραγώγου $\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$. Ὁμοίως

$$\text{ἐκ τῆς (24α) ἔχομεν: } \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \frac{\partial(V, S)}{\partial(P, S)} = \frac{\partial(V, S)}{\partial(P, T)} \frac{\partial(P, T)}{\partial(P, S)}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \right] \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_P$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_P. \text{ Δεδομένου ὅτι}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \text{ καὶ } \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{C_P}{T} \text{ λαμβάνομεν:}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P^2 \frac{T}{C_P} = -V \left(k_T - \frac{TV\alpha^2}{C_P} \right)$$

Εἰς περίπτωσιν ἰδανικοῦ ἀερίου ἡ ἔξισωσις αὕτη ἀπλοποιεῖται εἰς τὴν:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = - \frac{1}{\gamma} \frac{V}{P}$$

Διὰ λεπτομερείας ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἰακωβιανῶν παραπέμπομεν εἰς H. Margenau and G. Murphy, «The Mathematics of Physics and Chemistry», van Nostrand, 1956.

§ Π.2. Τέλεια καὶ μη τέλεια διαφορικά

Εἰς τὴν θερμοδυναμικὴν εἶναι συνήθης ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορὰ τῆς τιμῆς μιᾶς συναρτήσεως $z = f(x, y)$ εἰς δύο σημεῖα x_1, y_1 καὶ x_2, y_2 δι' ὀλοκληρώσεως τῆς ἔξισώσεως:

$$dz(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad (\text{Π.2.1})$$

Ἐν τούτοις τὸ ὀλοκλήρωμα $\int_1^2 M(x, y) dx$ δὲν ἔχει ἔννοιαν, ἐὰν δὲν δύναται νὰ ἀπαλειφθῇ ἡ y τῆ βοηθεία σχέσεως $y = f(x)$, δηλαδή ἂν δὲν καθορισθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον x, y ὁ δρόμος κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου θὰ διεξαχθῇ ἡ ὀλοκλήρωσις. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι δρόμοι, κατὰ μῆκος ἐκάστου τῶν ὁποίων ὁμοίως ἡ τιμὴ τοῦ ὠρισμένου ὀλοκληρώματος εἶναι διάφορος. Ἐν τούτοις ἡ ὀλοκλήρωσις τῆς ἐξίσωσεως (1) εἶναι δυνατὴ καὶ ἂν ἀκόμη ἡ σχέσις $y = f(x)$ δὲν δίδεται, ἐφ' ὅσον τὸ διαφορικὸν dz εἶναι τέλειον ἢ πλήρες διαφορικόν, ἐὰν δηλαδή $M = \frac{\partial z}{\partial x}$, $N = \frac{\partial z}{\partial y}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (\text{Π. 2.2})$$

Γενικώτερον, ἐὰν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι περισσότεραι τῶν δύο, δηλαδή ἀντὶ τῆς (1) δίδεται ἡ ἐξίσωσις :

$$dz(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \dots + M_n dx_n$$

πρέπει νὰ ἰσχύη :

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_j} = \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (\text{Π. 2.3})$$

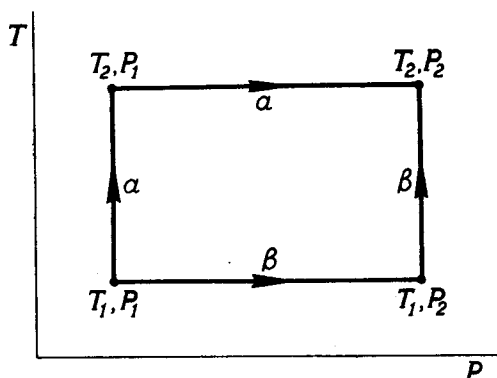
Αἱ ἐξισώσεις (2) ἢ (3) ἀποτελοῦν τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἰκανὴν συνθήκην ἵνα τὸ διαφορικὸν dz εἶναι τέλειον, χρησιμοποιοῦνται δὲ εὐρύτατα εἰς τὴν θερμοδυναμικὴν πρὸς συσχετίσιν παραγῶγων, π.χ. εἰς τὴν παραγωγὴν τῶν σχέσεων Maxwell. Διαφορικὰ μὴ πληροῦντα τὴν συνθήκην (2) ἢ γενικώτερον τὴν (3) (ὡς π.χ. τὰ διαφορικὰ dq καὶ dw) δνομάζονται μὴ τέλεια (ἢ μὴ πλήρη) διαφορικὰ. Ἡ συνθήκη (3) εἶναι γνωστὴ ὡς κριτήριον Euler.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις : $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἰδανικοῦ ἀερίου καὶ δι' ἓν γραμμομόριον αὕτη γράφεται :

$$dV = \frac{R}{P} dT - \frac{RT}{P^2} dP \quad (\text{Π. 2.4})$$

Ὀλοκληρώνοντες κατὰ μῆκος τῶν δρόμων α καὶ β (σχ. 1) ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$(\Delta V)_\alpha = \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{P_1} dT - \int_{P_1}^{P_2} \frac{RT_2}{P^2} dP = \frac{RT_2}{P_2} - \frac{RT_1}{P_1}$$



Σχήμα Π. 2.1. Ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς ἐξίσωσης (4) εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ δρόμου κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου ἡ ὁλοκλήρωσις διεξάγεται.

$$(\Delta V)_\beta = - \int_{P_1}^{P_2} RT_1 \frac{dP}{P^2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{R}{P_2} dT = \frac{RT_2}{P_2} - \frac{RT_1}{P_1}$$

Ἐξ ἄλλου ἐφαρμόζοντας τὴν συνθήκην (2) εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) ἔχομεν :

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{R}{P} \right)}{\partial P} \right]_T = - \left[\frac{\partial \left(\frac{RT}{P^2} \right)}{\partial T} \right]_P = - \frac{R}{P^2}$$

Ἀποδεικνύεται οὕτω ὅτι τὸ διαφορικὸν dV εἶναι τέλειον διαφορικόν.

Διαφορικὰ ἀνωτέρας τάξεως. Ἐστω ἡ z συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν x, y . Τὸ διαφορικὸν dz τῆς z εἶναι ἡ συνάρτησις $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

Ἡ συνάρτησις αὕτη dz θεωρουμένη ὡς συνάρτησις τῶν x, y , θὰ ἔχη διαφορικὸν σημειούμενον ὡς d^2z καὶ ὀνομαζόμενον διαφορικὸν δευτέρας τάξεως τῆς z . Ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τοῦ διαφορικοῦ ἔχομεν :

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial}{\partial x} (dz)dx + \frac{\partial}{\partial y} (dz)dy \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 \end{aligned}$$

(Ὅροι περιέχοντες διαφορικὰ d^2x, d^2y μηδενίζονται, καθ' ὅσον τὰ dx καὶ dy

είναι ανεξάρτητα τῶν μεταβλητῶν x, y . Τὰ διαφορικά dx καὶ dy δύνανται νὰ λάβουν οἰασδήποτε τιμὰς ανεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y).

Διὰ τὸ διαφορικὸν τρίτης τάξεως d^3z ἔχομεν κατ' ἀναλογίαν :

$$d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} (dy)^3$$

*Ανάλογοι σχέσεις προκύπτουν διὰ τὰ ἀνωτέρας τάξεως διαφορικά ὡς καὶ διὰ συναρτήσεις μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ ανεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς, Δz , μιᾶς συναρτήσεως z διὰ δεδομένην αὔξησιν τῶν τιμῶν τῶν ανεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἢ παρεχομένη δι' ἀναπτύξεως κατὰ Taylor δύναται νὰ γραφῆ ὑπὸ τὴν μορφήν διαφορικῶν ὡς :

$$\Delta z = dz + (1/2!)d^2z + \dots + (1/n!)d^n z + \dots \quad (\text{Π.2.5})$$

Τὰ διαφορικά dz, d^2z, \dots ὑπολογιζόμενα ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη καὶ εἰσαγόμενα εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) δίδουν τὴν συνήθη μορφήν τῆς σειρᾶς.

§ Π.3. Ὁμοιογενεῖς συναρτήσεις

Ἡ προσθετικότητα τῶν ἑκτατικῶν ιδιοτήτων τῆς θερμοδυναμικῆς, ἀναφερομένη ἐπὶ φυσικῶν ὁμοιογενῶν συστημάτων, μαθηματικῶς ὑποδηλοῖ ὅτι αἱ ἑκτατικαὶ ιδιότητες εἶναι ὁμοιογενεῖς συναρτήσεις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ἐκ τῶν ανεξαρτήτων μεταβλητῶν ἑκτατικὰς τοιαύτας.

Μία συνάρτησις $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ λέγεται ὁμοιογενῆς βαθμοῦ n ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς x_1, \dots, x_m ἔάν :

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1, \dots, x_m) \quad (\text{Π. 3.1})$$

Π.χ. αἱ συναρτήσεις $x^2 + y^2 + z^2, \frac{x+y}{x^4+y^4}, \frac{y}{x}$ εἶναι ὁμοιογενεῖς 2, -3 καὶ 0 βαθμοῦ ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς x, y, z . Κατωτέρω θὰ δεიχθῆ ὅτι ἔάν ἡ z εἶναι ὁμοιογενῆς συνάρτησις βαθμοῦ n ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς x_1, \dots, x_m , τότε ἰσχύει (Θεώρημα Euler) :

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + x_m \frac{\partial z}{\partial x_m} = nz \quad (\text{Π. 3.2})$$

$$\text{Ἔστω:} \quad x_1 = \alpha_1 \lambda, \quad x_2 = \alpha_2 \lambda, \dots, \quad x_m = \alpha_m \lambda \quad (\text{Π.3.3})$$

καὶ ἐπομένως :

$$z = f(x_1, \dots, x_m) = f(\alpha_1 \lambda, \dots, \alpha_m \lambda) = \lambda^n f(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

Ἡ συνάρτησις z εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς λ καὶ διὰ διαφορίσεως τῶν δύο ἰσοδυνάμων μορφῶν $f(\alpha_1 \lambda, \dots, \alpha_m \lambda)$ καὶ $\lambda^n f(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ὡς πρὸς λ λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\lambda} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_m} \frac{dx_m}{d\lambda} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x_1} \alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \alpha_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_m} \alpha_m \end{aligned} \quad (\text{Π. 3.4})$$

λόγω τῆς (3).

$$\text{Ἐπίσης:} \quad \frac{dz}{d\lambda} = n \lambda^{n-1} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad (\text{Π. 3.5})$$

Ἐξισώνοντες τὰς (4) καὶ (5) καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ λ ἔχομεν :

$$\alpha_1 \lambda \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + \alpha_m \lambda \frac{\partial z}{\partial x_m} = n \lambda^n f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἐξισώσεις (3) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + x_m \frac{\partial z}{\partial x_m} = n f(x_1, x_2, \dots, x_m) = n z$$

δηλαδή τὴν ἐξίσωσιν (2).

Ἡ ἐξίσωσις (2) διὰ $n = 1$ χρησιμοποιεῖται πρὸς σύνδεσιν τῶν ἔκτατικῶν ἰδιοτήτων συστήματος ἐκ περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς συστατικῶν πρὸς τὰς μερικὰς γραμμομοριακὰς ἰδιότητας αὐτοῦ (§ 7.9).

§ Π.4. Μετασχηματισμός Legendre

Εἰς τὴν θερμοδυναμικὴν, ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῆς φυσικῆς, ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τοῦ συστήματος, δηλαδή ἡ συνάρτησις ἐκείνη μὲ τὸ μέγιστον φυσικὸν καὶ μαθηματικὸν περιεχόμενον, δίδεται εἰς μεταβλητάς, αἱ ὁποῖαι ἀπὸ πρακτικῆς πλευρᾶς ὑστεροῦν. Ἡ ἔσωτερικὴ ἐνέργεια π.χ., εἶναι μία θεμελιώδης συνάρτησις μὲ ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς τὴν ἔντροπιαν, τὸν ὄγκον καὶ τοὺς ἀριθμοὺς γραμμομορίων τῶν συστατικῶν ὁμοιογενοῦς ἰσοτρόπου φάσεως. Εἶναι ὁμως φανερόν ὅτι ἡ ἔντροπια, ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ, δὲν προσφέρεται ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, δεδομένου ὅτι οὔτε δύναται ἀμέσως νὰ μετρηθῇ, οὔτε νὰ ἐλεγχθῇ, ὡς τοῦτο εἶναι εὐχερὲς διὰ τὴν θερμοκρασίαν καὶ τὴν πίεσιν. Αἱ τελευταῖαι ὁμως αὗται εἶναι πα-

ράγωγοι τῆς συναρτήσεως τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας ὡς πρὸς τὰς ἀναφερομένης ἑκτατικὰς μεταβλητὰς (S, V, π_1). Βεβαίως αἱ παράγωγοι δύνανται νὰ ὑποκαταστήσουν τὰς ἑκτατικὰς μεταβλητὰς εἰς τὴν θεμελιώδη συνάρτησιν. Γεννᾶται ὁμως τὸ ἐρώτημα ἐὰν ἢ οὕτω προκύπτουσα συνάρτησις διατηρῆ ἀναλλοίωτον τὸ φυσικὸν καὶ μαθηματικὸν περιεχόμενον τῆς ἀρχικῆς. Τὸ πρόβλημα τοῦτο καθίσταται σαφέστερον ἐξεταζόμενον εἰς ἀπλᾶς μαθηματικὰς συναρτήσεις.

*Ἐστω συνάρτησις y μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τῆς x , δηλαδή ἡ ἐξίσωσις :

$$y = f(x) \quad (\text{Π. 4.1})$$

Ἡ παράγωγος αὐτῆς p^ εἶναι :

$$p^* = \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (\text{Π. 4.2})$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $p^ = f'(x)$ δύναται νὰ λυθῆ ὡς πρὸς x , πράγμα τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὸν ἐὰν :

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0 \quad (\text{Π. 4.3})$$

(συνθήκη ἡ ὁποία πάντοτε ἰσχύει εἰς τὰς θερμοδυναμικὰς συναρτήσεις).

Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ :

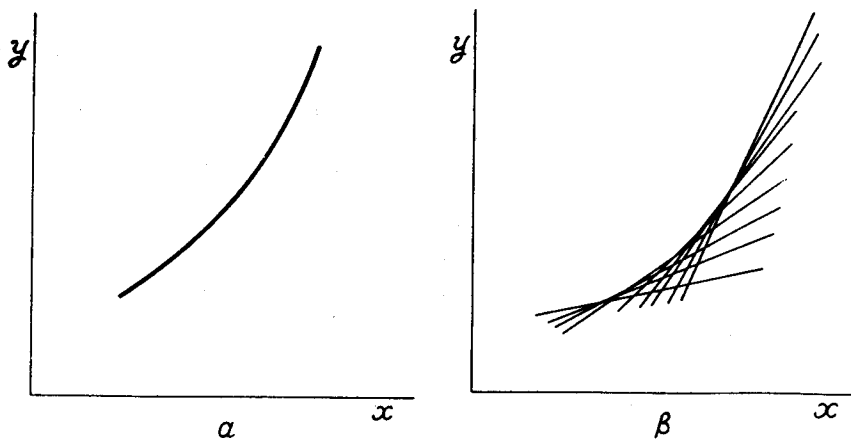
$$y = f_1(p^*) \quad (\text{Π. 4.4})$$

Ἐκ πρώτης ὄψεως τὸ πρόβλημα φαίνεται λελυμένον, ἐφ' ὅσον ἐπετεύχθη ἡ ἀντικατάστασις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x εἰς τὴν (1) διὰ τῆς παραγωγῆς p^ (ἐξίσωσις 4). Ἀλλὰ αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (4) δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐνῶ ἡ (4) προέκυψε κατὰ τὸν προαναφερθέντα τρόπον ἐκ τῆς (1), τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει, καθ' ὅσον δὲν δύναται νὰ προκύψῃ μονοσημάντως ἡ (1) ἐκ τῆς (4). Πράγματι ἡ (4) εἶναι μία διαφορικὴ ἐξίσωσις $\left[y = f_1 \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]$ καὶ ἐπομένως λύσις αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ $f(y, x) = c$. Ἡ τελευταία γεωμετρικῶς παριστᾷ οἰκογένειαν καμπυλῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀσφαλῶς καὶ ἡ καμπύλη ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν (1).

Ἡ λύσις τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνέυρεσιν ἑνὸς καταλλήλου μετασχηματισμοῦ διὰ τοῦ ὁποίου θὰ ἦτο δυνατὴ ἡ μετάβασις ἐκ τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$, εἰς τὴν συνάρτησιν $\psi = \varphi(p^)$, μέσῳ δὲ τοῦ ὁποίου θὰ ἦτο δυνατὴ καὶ ἡ ἀντίστροφος πορεία, δηλαδή ἡ μειάβασις ἐκ τῆς $\psi = \varphi(p^*)$ εἰς τὴν $y = f(x)$.

*Ὁ ζητούμενος μετασχηματισμὸς κατανοεῖται εὐχερῶς ἐκ τῆς γεωμετρικῆς του ἐρμηνείας. Μία ὁμαλὴ καμπύλη δύναται ἐξ ἴσου καλῶς νὰ παρα-

σταθῆ εἶτε ὡς ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι πληροῦν μίαν δεδομένην ἔξισωσιν, π.χ. τὴν (1), εἶτε ὡς ἡ περιβάλλουσα μιᾶς οἰκογενείας ἑφαπτομένων ἢ κλίσις τῶν ὁποίων ὑπακούει εἰς δεδομένην σχέσιν. Εἰς τὸ σχῆμα (1), (α καὶ β), παρίσταται ἡ αὐτὴ καμπύλη κατὰ τοὺς ὡς ἄνω δύο τρόπους.



Σχῆμα Π. 4.1. Καμπύλη (α) ὡς ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων· (β) ὡς περιβάλλουσα οἰκογενείας ἑφαπτομένων.

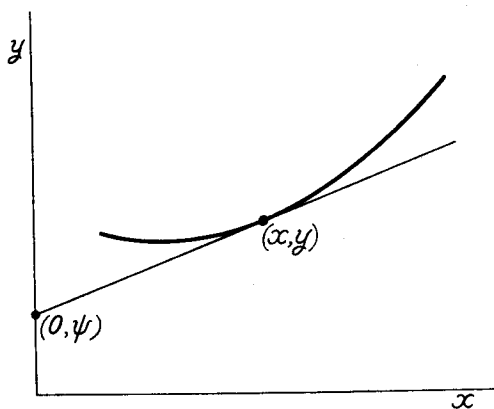
Τὸ πρόβλημα ἐπομένως ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνεύρεσιν τῆς ἔξισώσεως ἣ ὁποία θὰ ἐπέτρεπε τὴν κατασκευὴν τῆς οἰκογενείας τῶν ἑφαπτομένων.

*Ἄς θεωρήσωμεν εἰς τὸ σχῆμα (2) τὴν καμπύλην τοῦ (1α) εἰς σημεῖον τῆς ὁποίας ἔχαράχθη ἡ ἑφαπτομένη, ἡ ὁποία ἔστω ὅτι τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς ψ .

Ἐκ τοῦ σχήματος (2) προκύπτει ὅτι ἡ κλίσις p^ εἰς τι σημεῖον τῆς καμπύλης καὶ ἡ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ψ συνδέονται διὰ τῆς ἔξισώσεως:

$$p^* = \frac{y - \psi}{x} \quad (\text{Π. 4.5})$$

$$\text{εἶτε: } \psi = y - p^*x \quad (\text{Π. 4.6})$$



Σχῆμα Π. 4.2. Γεωμετρικὴ κατασκευὴ πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς ἔξισώσεως οἰκογενείας ἑφαπτομένων τοῦ σχήματος (1β).

Ἡ ἐξίσωσις (6) δίδει τὴν αἰτουμένην ἐξάρτησιν μεταξὺ τῆς τεταγμένης ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ψ καὶ τῆς κλίσεως p^* , διὰ τῆς ὁποίας ἡ οἰκογένεια ἐφαπτομένων δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ἄρα καὶ ἡ αἰτουμένη καμπύλη, ὡς ἡ περιβάλλουσα τούτων. Ἡ ἐξίσωσις (6) εἶναι ὁ κατάλληλος πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος μετασχηματισμός, γνωστὸς ὡς μετασχηματισμὸς Legendre.

Ἀπαλοιφὴ τῶν x καὶ y εἰς τὴν (6), μέσῳ τῶν (1) καὶ (2) δίδει:

$$\psi = \varphi(p^*) \quad (\text{Π.4.7})$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἐξίσωσιν (7) δύναται νὰ εὑρεθῇ ἡ (1). Οὕτω τὸ διαφορικὸν τῆς ἐξισώσεως (6) γράφεται:

$$d\psi = dy - p^*dx - xdp^* \quad (\text{Π.4.8})$$

Δεδομένου ὅτι ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) ἔχομεν $dy = p^*dx$, ἡ (8) γράφεται:

$$d\psi = -x dp^* \quad (\text{Π.4.9})$$

εἴτε:

$$\frac{d\psi}{dp^*} = -x = \varphi'(p^*) \quad (\text{Π.4.10})$$

Εἰς τὸν μετασχηματισμὸν (6) ἀπαλείφοντες τὰς ψ καὶ p^* , μέσῳ τῶν (7) καὶ (10), λαμβάνομεν τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν (1).

Συνοψίζοντες τὴν περιγραφεῖσαν μέθοδον γράφομεν:

$$\begin{aligned} y &= f(x) & \psi &= \varphi(p^*) \\ p^* &= \frac{dy}{dx} & -x &= \frac{d\psi}{dp^*} \end{aligned} \quad (\text{Π.4.11})$$

$$\psi = -p^*x + y \quad y = xp^* + \psi$$

Ἀπαλοιφὴ τῶν x καὶ y δίδει:

$$\psi = \varphi(p^*)$$

Ἀπαλοιφὴ τῶν p^* καὶ ψ δίδει:

$$y = f(x)$$

Ἐὰν ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν $y = f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ (α), διὰ μετασχηματισμὸν k ἐκ τῶν n μεταβλητῶν ($k \leq n$) θὰ χρησιμοποιηθῇ, ἀντὶ τοῦ (6), ὁ μετασχηματισμὸς:

$$\psi_k = y - \sum_1^k p_i^* x_i \quad (\text{Π.4.12})$$

Δεδομένου ὅτι $p_i^* = \frac{\partial y}{\partial x_i} = f'(x)$ (β), ἀντικατάστασις εἰς τὴν (12) τῆς y ἐκ τῆς (α) καὶ ἀκολούθως τῶν x ἐκ τῶν (β), δίδει τὴν:

$$\psi = \varphi(p_1^*, \dots, p_k^*, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (\gamma)$$

Ἀντιστρόφως ἐκ τῆς (γ) μέσῳ τοῦ μετασχηματισμοῦ (12), δεδομένου ὅτι:

$$-x_i = \frac{\partial \psi}{\partial p_i^*} = \varphi'(p^*), \text{ λαμβάνεται ἡ (α).}$$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

- Ἄδιαβατικά διεργασίαι 16
 ἀδιαβατικὸν τοίχωμα 15
 ἀέριον ἰδανικὸν 64
 ἀδιαβατικὴ ἐξίσωσις 66
 ἀερίου πραγματικοῦ συμπεριφορὰ διὰ
 $P \rightarrow 0$ 58
 ἀερίων καθαρῶν θερμοδυναμικαὶ συναρ-
 τήσεις 232
 μίγματα 298
 πραγματικῶν καταστατικαὶ ἐξισώσεις
 213
 σταθερὰ 61
 ἀζεotropicὰ μίγματα 363
 ἄλλοτροπικαὶ μορφαὶ 261
 ἀντιδράσεις ἀδιαβατικαὶ 406
 διαλυμάτων ἠλεκτρολυτῶν 444
 μεταξὺ ἀερίων καὶ στερεῶν 411
 μεταξὺ καθαρῶν στερεῶν ἢ ὑγρῶν 412
 ὁμοιογενεῖς διαλυμάτων 408
 ὕδρολύσεως 445
 ἀντιδράσεως βαθμὸς διαστάσεως 180
 βαθμὸς προόδου 402
 ιδιότης διαφορικὴ 384
 ιδιότης ὀλοκληρωτικὴ 384
 ιδιοτήτων σχέσεις 393
 μεγίστη ἀπόδοσις 404
 μεταβλητὴ προόδου 179
 συνθήκη εὐσταθείας 186
 ἀντιστοιχῶν καταστάσεων ἀρχὴ 231
 ἀντιστρεπτὴ διεργασία, βλέπε διεργασία
 Antoine ἐξίσωσις 281
 ἀποθήκη θερμότητος 47
 ἀρχὴ ἀνεφίκτου ἀπολύτου μηδενός 207
 ἀλληλεπιδράσεως ἰόντων 442
 ἀντιστοιχῶν καταστάσεων 231, 281
 αὐξήσεως ἔντροπιᾶς 97
 ἐλαχίστου συναρτήσεων H, F, G 141-
 - 143, 165
 ἐνεργειακοῦ ἐλαχίστου 138, 164
 ἐντροπικοῦ μεγίστου 137, 164
 Clausius 73
 Καραθεοδωρῆ 90
 Kelvin 72
 Le Chatelier - Brown 398
 Thomsen - Berthelot 206
 ἀτμὸς 220
 Βαθμὸς διαστάσεως 180
 βαρομετρικὸς τύπος 520
 Berthelot ἐξίσωσις 218
 Boyle θερμοκρασία 215, 254
 νόμος 59
 σημεῖον 215
 Γαλβανικὰ κύτταρα 464
 ἀνευ μεταφορᾶς 478
 μετὰ μεταφορᾶς 488
 ἠλεκτρόδια 465
 μεθ' ὑγροῦ συνδέσμου 492
 συνθῆκαι ἰσορροπίας 472
 γαλβανικοῦ ἡμικυττάρου πρότυπος ἠλε-
 κτρεγερτικὴ δύναμις 486, 487
 γέφυραι ἄλατος 493
 γινόμενον ἰόντων ὕδατος 449, 484
 γραμμικαὶ διαφορικαὶ μορφαὶ 84
 γραμμομοριακαὶ ιδιότητες
 μερικὴ 191
 μέση 191
 φαινομένη 194
 μέση καὶ μερικὴ μίξεως 293
 μίξεως ἀερίων 307, 308
 διαλυμάτων 292, 316, 319, 331
 γραμμομοριακὴ συγκέντρωσις κατὰ βά-
 ρος 197
 συγκέντρωσις κατ' ὄγκον 197
 γραμμομοριακὴ μᾶζα ἀερίων 61
 γραμμομοριακὸν κλάσμα 166, 196
 γραμμομοριακὸς λόγος 197
 γραμμομόριον 13
 Carnot θεώρημα 81
 κύκλος 74, 75
 Clapeyron ἐξίσωσις 263
 Clausius ἀνισότης 81
 ἀρχὴ 73
 Διαθερμικὸν τοίχωμα 16

- διαλύματα 240, 293, 311 βλέπε και μίγμα-
τα
 - άθερμικά 347
 - άπλᾶ 340
 - ἠλεκτρολυτῶν 418
 - ιδανικά 313
 - ιδανικά ἀραιά 317
 - ὁμαλά 346
 - πραγματικά 320
 - συμμετρικά 338
 - μῆ συμμετρικά 346
- διαλυμάτων γραμμομοριακαὶ ιδιότητες
292
 - ὄριακαὶ συνθήκαι 312, 432
- διάλυσις κρίσιμος 334
 - κρίσιμον σημείον 340
- διαλύτης 290
- διαλυτότης στερεῶν 370
- διαλυτότητας γινόμενον 428
 - ἐξάρτησις ἀπὸ T, P 373, 374
- διαφορικά ἀνωτέρας τάξεως 533
 - τέλεια ἢ πλήρη 531
- διαφορικά γραμμικαὶ μορφαὶ 84
- διαχωρίσματα 15
- διεργασία ἀδιαβατικῆ 16
 - ἀντιστρεπτή 48
 - μὴ ἀντιστρεπτή 48
 - αὐθόρμητος 65
 - στατικῆ 46
 - μὴ στατικῆ 46
 - ψευδοστατικῆ 45
- Dalton νόμος 303
- Debye σχέσις 204, 249
- Debye - Hückel ὄριακος νόμος 432
- Dieterici ἐξίσωσις 218
- Donnan ἰσορροπία 459
- Duhem - Margules ἐξίσωσις 358
- Ἐκτατικαὶ ἰδιότητες 12
- ἐλευθέρᾳ ἐνέργεια ἢ συνάρτησις Helm-
holtz 116
 - ἐξάρτησις ἀπὸ V 124
 - ἐξάρτησις ἀπὸ T 125
- ἐλευθέρᾳ ἐνθαλπία ἢ συνάρτησις Gibbs
117
 - ἐξάρτησις ἀπὸ P 122
 - ἐξάρτησις ἀπὸ T 123
- ἐλευθέρᾳ ἐνθαλπία ἀντιδράσεως 395
- ἐλευθέρᾳ ἐκτόνωσις 61
- ἐνέργεια ἐσωτερικῆ, βλέπε ἐσωτερικῆ ἐ-
νέργεια
- ἐνεργότης 321
- ἐνεργότητος καὶ ὠσμωτικῶν συντελεστῶν
σχέσις 329, 430
 - συντελεσταὶ 321
 - συντελεσταὶ ἰόντων 420, 421
 - συντελεσταὶ ὀρθολογικοὶ 323
 - συντελεσταὶ πρακτικοὶ 324
- συντελεστοῦ προσδιορισμὸς 371, 460,
481, 492
- συντελεστῶν ἐξάρτησις ἀπὸ P καὶ T
331
- ἐνθαλπία 53
 - ἐξάρτησις ἀπὸ P 122
 - ἐξάρτησις ἀπὸ T 123
 - θεμελιώδης ἐξίσωσις 115
 - μῆξεως 294
- ἐνθαλπία ἀντιδράσεως διαφορικῆ 385
 - ὀλοκληρωτικῆ 385
 - σχηματισμοῦ 388
 - σχηματισμοῦ διαφορικῆ 388
 - ἐξάρτησις ἀπὸ P, T 390
- ἐνδοθερμικαὶ ἀντιδράσεις 389
- ἐξωθερμικαὶ ἀντιδράσεις 389
- ἐντατικαὶ ἰδιότητες 12
- ἐντροπία 78, 81, 96
 - ἐξάρτησις ἀπὸ P 122
 - ἐξάρτησις ἀπὸ T 123, 125
 - ἐξάρτησις ἀπὸ V 125
 - θερμιδομετρικῆ 417
- ἐντροπίας ἀπόλυτος τιμῆ 203
- ἀρχῆ αὐξήσεως 97
- ἐμπειρικῆ συνάρτησις 91
- προσδιορισμὸς 102
- ἐξίσωσις Berthelot 218
 - Clapeyron 263
 - Dieterici 218
 - Duhem - Margules 358
 - Eötvoš 513
 - Katayama 513
 - Laplace 497, 508
 - MacLeod 514
 - Poisson 434
 - Redlich 219
 - van der Waals 216
 - Young 498
- ἐπιφανειακῆ τάσις, βλέπε μεσεπιφανειακῆ
τάσις
- ἔργον 30
 - ἀδιαβατικὸν 35
 - στατικῆς διεργασίας 50
 - σχέσις μετὰ ΔU, ΔH, ΔF καὶ ΔG 118
- ἐσωτερικαὶ μεταβληταὶ 201
- ἐσωτερικῆ ἐνέργεια 35
 - ἐξάρτησις ἀπὸ V 125
 - ἐξάρτησις ἀπὸ T 125
 - θεμελιώδης ἐξίσωσις 111
 - προσδιορισμὸς 102
- ἐσωτερικῆ ἐνέργεια ἀντιδράσεως 391
- ἐσωτερικῆ μεταστάθαια 201
- εὐστάθαια ἐσωτερικῆ 201
- ἐσωτερικῆ φάσεως 176
- εὐσταθείας γενικαὶ συνθήκαι 149
- Ehrenfest 286
- Euler ἐξισώσεις 167
 - κριτήριον 84, 532

- ζεοσκοπικὴ σταθερὰ 357
 ζέσεως σημείου ἀνώψωσις 354, 429
- Gibbs - Dalton νόμος μερικῆς πίεσεως 303
 Gibbs - Duhem ἐξίσωσις 169, 312
 γενικευμένη 192
 Gibbs - Helmholtz ἐξισώσεις 127, 394
 Gibbs θεμελιώδης ἐξίσωσις 161
 συνάρτησις 117
 Guldberg κανὼν 284
- Ἡλεκτρεγερτικὴ δύναμις κυττάρου 466
 ἐξάρτησις ἀπὸ R_H , 480
 ἐξάρτησις ἀπὸ T 476
 πρότυπος 474, 479
 συμβατικός ὀρισμὸς 474
 ἠλεκτρικὸν δυναμικὸν 452
 ἠλεκτρολύται ἀσθενεῖς 418
 ἰσχυροὶ 418
 ἠλεκτροουδετερότητα συνθήκη 419, 422
 ἠλεκτροχημικὰ συστήματα 451
 ἠλεκτροχημικὸν δυναμικὸν 422, 454
- Helmholtz συνάρτησις 116
 Hess νόμος 388
 Hildebrand 346
 van't Hoff νόμος 380
- Θεμελιώδεις ἐξισώσεις:
 ἐλευθέρας ἐνεργείας 116
 ἐλευθέρας ἐνθαλπίας 117
 ἐνθαλπίας 115
 ἐντροπίας 111
 ἐσωτερικῆς ἐνεργείας 113
 θερμικὴ ἀμοιβαία ἰσορροπία 16
 θερμικῆς ἐσταθεῖας συνθήκη 154
 ἰσορροπίας συνθήκη 145
 θερμοδυναμικαὶ ιδιότητες 12
 συναρτήσεις πρόσθετοι 333
 θερμοδυναμικὴ θερμοκρασία 78, 95, 107
 κλασσικὴ 8
 στατιστικὴ 10
 θερμοδυναμικῆς θερμοκρασίας προσδιορισμὸς 102, 108
 θερμοδυναμικοὶ βαθμοὶ ἐλευθερίας 167
 θερμοδυναμικὸν σύστημα 7, 12
 θερμοδυναμικῶν συναρτήσεων ἐξάρτησις ἀπὸ P , T καὶ V , T 122
 θερμοκρασία ἀναστροφῆς 254
 ἀνηγμένη 229
 ἀντιστροφῆς 413
 ἀπόλυτος 95
 Boyle 215, 254
 ἐμπειρικὴ 19
 θερμοδυναμικὴ 78, 95, 107
 κρίσιμος 217, 220
 φλογός, μεγίστη 408
 θερμοκρασίαι ἀρνητικαὶ 210
- θερμοκρασίας ἀναστροφῆς καμπύλη 254
 ἐμπειρικῆς βαθμολογία εἰς T κλίμακα 259
 ἐξόχως χαμηλῆς μέτρησις 108
 κλίμαξ ἰδανικοῦ ἀερίου 28, 60
 σταθερὰ σημεῖα 25
 στατιστικὸς ὀρισμὸς 211
 θερμομετρικαὶ κλίμακες 25
 θερμομετρικὴ ιδιότης 24
 κλίμαξ ἰδανικοῦ ἀερίου 28
 θερμόμετρα 24
 θερμότης 39
 θερμότης ἀντιδράσεως ὑπὸ σταθερὰν P 386
 ὑπὸ σταθερὸν V 391
 θερμότης ἀραιώσεως 298
 ἐξατμίσεως 263, 266, 277
 ἐξαχνώσεως 266, 277
 μετατροπῆς 263
 μίξεως ἢ διαλύσεως προσδιορισμὸς 294, 295
 τήξεως 263, 264, 277, 278
 θερμότητος ἀποθήκη 47
 θερμοχωρητικότης 56
 γραμμομοριακὴ 56
 εἰδικὴ 56
 θερμοχωρητικότητες φάσεων ἐν ἰσορροπία 273
 θερμοχωρητικότητων γραμμομοριακῶν σχέσεις 126
 ἐξάρτησις ἀπὸ V καὶ P 125
 ἐξάρτησις ἀπὸ T 58
 θεώρημα Carnot 81
 Καραθεοδωρῆ 87
 Nernst 200
 θεωρήματα μερικῆς παραγωγίσεως 524.
- Ἰακωβιαναὶ 528
 ιδιότητες ἑκτατικαὶ 12
 ἐντατικαὶ 12
 θερμοδυναμικαὶ 12
 μακροσκοπικαὶ 11
 μίξεως 307, 309
 παράγωγοι 12
 πρωτογενεῖς 12
 ἰοντικὴ ἀτμόσφαιρα 436
 ἰσχύς 437
 ἰσοεντροπικαὶ ἐπιφάνειαι 91
 ἰσόθερμος 21
 κρίσιμος 217
 ἰσορροπία ἀντιδράσεως ἀερίων 400
 ἀσταθῆς 150
 ἐπαφῆς 460
 ἑτερογενῆς καθαρῶν οὐσιῶν 261
 ἑτερογενοῦς συστήματος 163, 171, 350, 369
 ἐσταθῆς 150
 θερμικὴ ἀμοιβαία 16
 θερμοδυναμικὴ 7, 12

- κανονική 150
 κατανομής 374, 375, 425
 κρίσιμος 150
 μεμβρανῶν 176
 μετασταθῆς 150
 παγωμένη 178
 στατική 5
 φάσεως 270
 χημική 177
 ὠσμωτική 375
 ἰσορροπία ἀντιδράσεως 400, 408, 411, 412, 414
 ἰσορροπίας ἑτερογενοῦς συνθήκαι 174
 ἠλεκτροχημικῆς συνθήκαι 452
 θερμικῆς συνθήκαι 145
 μηχανικῆς συνθήκαι 147
 Joule νόμος 64
 πείραμα 61
 συντελεστής 62
 Joule - Thomson συντελεστής 252
 φαινόμενον 250, 255
 Καμπύλη ἀναστροφῆς 252, 255
 κανῶν φάσεων 186, 509
 Καραθεοδωρῆ ἀρχὴ 90
 θεώρημα 87
 καταστατικοὶ ἐξισώσεις 59, 112, 213
 ἐξισώσεις ἀνηγμένοι 229
 καταστάσεις ἰσομετρικαὶ 98
 κατάστασις συστήματος 4, 12
 κρίσιμος θερμοκρασία 217, 220
 ἰσόθερμος 217, 220
 κατάστασις 220
 ὄγκος 217, 220
 πίεσις 217, 220
 σημεῖον 220
 κρυσκοπικὴ σταθερὰ 370
 κύκλος Carnot 74, 75
 Kelvin βαθμὸς θερμοκρασίας 28
 ἀρχὴ 72
 Kirchhoff ἐξίσωσις 390
 Λάμβδα μεταβάσεις 284
 Laplace ἐξίσωσις 497, 508
 Legendre μετασχηματισμὸς 115, 535
 Lewis-Randall κανὼν 244, 306
 Linde μέθοδος ψύξεως 259
 Μερικαὶ γραμμομοριακαὶ ιδιότητες 191
 μεσεπιφανειακαὶ φάσεις 496
 γεωμετρικὴ ἐπιφάνεια Gibbs 504
 γωνία ἐπαφῆς 498
 ἐλευθέρᾳ ἐνέργεια σχηματισμοῦ στα-
 γόνος 501
 ἐπιφανειακὴ ἐνεργότης 512
 μεσεπιφανειακὴ πυκνότης 506
 ἐπιφανειακῶς ἐνεργὸς οὐσία 512
 θερμοδυναμικαὶ μεταβληταὶ 505
 θερμοδυναμικὴ συνθήκαι ἰσορροπίας 505
 ἰσόθερμος ἐξίσωσις Gibbs 512
 μηχανικὴ συνθήκαι ἰσορροπίας 497, 508
 μεσεπιφανειακὴ τάσις 496
 ἐξάρτησις ἀπὸ T 513
 μεσεπιφανείας μηχανικαὶ ιδιότητες 496
 μεταβάσεις λάμβδα 289
 μεταβληταὶ ἀνεξάρτητοι συστήματος 12
 μετασχηματισμὸς Legendre 115, 535
 μηχανικῆς εὐσταθείας συνθήκαι 155
 ἰσορροπίας συνθήκαι 147
 μηχανικὸν σύστημα 4
 μίγματα 240, βλέπε καὶ διαλύματα
 μίγματα ἀερίων 298
 μίξεως ιδιότητες 292
 Massieu συναρτήσεις 118
 Maxwell συνθήκαι γεωμετρικὴ 226
 σχέσεις 121, 165, 393
 Mollier διάγραμμα 258
 Νόμος Boyle 59
 Dalton 303
 δεῦτερος 67, 156
 δράσεως μαζῶν 397
 Henry 353
 Hess 388
 Joule 64
 μηδενικὸς 18
 πρῶτος 33
 Raoult 351
 τρίτος 199
 τρίτου πειραματικὸς ἔλεγχος 204
 van't Hoff 380
 Nernst θεώρημα 200
 συντελεστής κατανομῆς 375
 Ὅγκος κρίσιμος 217, 220
 ἀνηγμένος 229
 ὄξεια καὶ βάσεις 446
 συζυγῆ ζεύγη 446
 ὀριακὸς νόμος Debye - Hückel 432
 Παραγωγίσεως μερικῆς θεωρήματα 524
 παραμορφωτικά μεγέθη 5
 πεδῖον βαρύτητος 515
 ἐξωτερικὰ πεδία 515
 ἰσορροπία καθιζήσεως 520
 συνθήκαι ἰσορροπίας 517
 συνθήκαι χημικῆς ἰσορροπίας 521
 φυγοκεντρικὸν 522
 περιβάλλον 2, 11
 πήξεως σημείου ταπεινώσεως 368, 429
 πίεσις ἀνηγμένη 224
 κρίσιμος 217, 220
 μερική 300
 προόδου ἀντιδράσεως μεταβλητὴ 179
 βαθμὸς 402

- πρόσθετοι θερμοδυναμικαί συναρτήσεις 333, 336
- πητικότητα αερίων 243, 301, 304
 εξάρτησις ἀπὸ P καὶ T 245
- Pfaff διαφορική ἐξίσωσις 49, 84
- pH ὄρισμός καὶ κλίμαξ 493
- Planck διατύπωσις θεωρήματος Nernst 202
- Poisson ἐξίσωσις 434
- Ρευστῶν ὑπόθεσις συνεχείας 221
- Roult νόμος 351
- Redlich ἐξίσωσις 219
- Σταθερά ὀξύτητος ὀξέος 448
 χημικῆς ἰσορροπίας 396, 414
 εξάρτησις ἀπὸ P, T 397
- σταθερά διαστάσεως ὀξέος 483
- στάσιμος κατάστασις 7, 12
- στοιχειομετρικοί συντελεσταὶ 179
- συμπιεστότητος παράγων 213
- συναρτήσεις ὁμοιογενεῖς 534
- συνθέσεως μεταβληταὶ 197, 198
- συντελεσταὶ Virial 214, 255, 299
- συντελεστής θερμοκῆς διαστολῆς 59
 ἰσοθέρμου συμπιεστότητος 59, 246
 συμπιεστότητος ἀδιαβατικός 126
- σύστημα ἀναφορᾶς 322
 ἀνοικτὸν 13, 156
 ἀπομονωμένον 13
 ἑτερογενὲς 12
 θερμοδυναμικὸν 7, 12
 κλειστὸν 13
 μακροσκοπικὸν 11
 ὁμοιογενὲς 12
 σύνθετον 15
 φυσικὸν 1
- Simon διατύπωσις θεωρήματος Nernst 201
- Τάσεως ἀτμῶν ἐξισώσεις 279
 πειραματικῶν δεδομένων ἔλεγχος 360, 362
- τοιχώματα 1, 14, 15, 16
- τριπλοῦν σημεῖον 27, 267
 θεῖου 268
 ὕδατος 27, 267
- Tait ἐξίσωσις 247
- Thomson - Berthelot ἀρχὴ 206
- Trouton κανὼν 284
- Φάσεων κανὼν 186
 διάγραμμα ἀνθρακός 268
 —θεῖου 268
 —ὕδατος 267
 ἰσορροπία 270
 συμπεπυκνωμένων θερμοδυναμικαὶ
 συναρτήσεις 246
- φασικαὶ μεταβάσεις ἀνωτέρας τάξεως 285
- φυσικαὶ μακροσκοπικαὶ θεωρίαι 1
- φυσικὴ ποσότης 2, 11
- Virial συντελεσταὶ 214, 255, 299
- van der Waals ἐξίσωσις 216
- Washburn πείραμα 63
- Χημικαὶ ἀντιδράσεις βλέπε ἀντιδράσεις
 χημικὴ ἰσορροπία, βλέπε ἰσορροπία
 χημικὴ σταθερά 239, 280
 συγγένεια 183, 383
- χημικὸν δυναμικὸν 162
 αερίων 232, 240
 διαλυμάτων 322
 μίγματος αερίων 301
 πρόσθετον 320
 συμπεπυκνωμένων φάσεων 248
- Young ἐξίσωσις 498
- Ὀλοκληρωμένα ἐξισώσεις 167
 ὠσμωτικὴ ἰσορροπία 375 - 382
 μεμβρανῶν 459
 πίεσις 377, 388, 429
 ὠσμωτικὸς συντελεστής 326
 πρακτικὸς 327, 357, 369, 379
 ὀρθολογικὸς 327, 378

