Να υπολογίσετε τον τελικό όγκο και το παραγόμενο έργο όταν 10 L ιδανικού αερίου (c_V = 3/2 R) σε πίεση 10 atm και θερμοκρασία 0°C υποβάλλονται σε 3 διαφορετικές διεργασίες με τελική πίεση 1 atm. Α) Ισόθερμη αντιστρεπτή εκτόνωση, Β) Αδιαβατική αντιστρεπτή εκτόνωση, Γ) Μη αντιστρεπτή αδιαβατική εκτόνωση ως εξής: Πρώτα ξαφνική μείωση της πιέσεως σε 1 atm και μετά αδιαβατική εκτόνωση υπό σταθερή πίεση 1 atm.

Λύση:

Σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ και $n = \frac{P_1V_1}{RT_1}$.

Α) Ισόθερμη σημαίνει $T_2 = T_1$, άρα $V_2 = \frac{P_1V_1}{P_2} = \frac{10\,\text{atm}}{1\,\text{atm}}10\,\text{L} = 100\,\text{L}$.

Σε κάθε (ενδιάμεση) θέση $P = \frac{P_1V_1}{V}$

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1V_1}{V}dV = -P_1V_1\int_{V_1}^{V_2} d\ln V = -P_1V_1(\ln V_2 - \ln V_1) = -P_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1} =$$

$$= -10\text{atm} \times 101325\frac{\text{Pa}}{\text{atm}} \times 10\text{dm}^3 \times \ln\frac{100\text{dm}^3}{10\text{dm}^3} = -1.01325\times10^7\,\text{Pa}\times(10^{-1}\,\text{m})^3\ln 10 =$$

$= -23.3$ kJ

Β) Σε αδιαβατική αντιστρεπτή εκτόνωση ισχύει η σχέση Poisson: $P\ V^\gamma$ = σταθ., όπου $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$, όμως $c_P - c_V = R$, συνεπώς $c_P = 1.5\ R + R = 2.5\ R$ και $\gamma = 5/3 = 1.667$. Επομένως,

σε κάθε θέση $P = P_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^\gamma$, ενώ $V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 10\text{L}\left(\frac{10\text{atm}}{1\text{atm}}\right)^{\frac{3}{5}} = 39.8\text{L}$.

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -\int_{V_1}^{V_2} P_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^\gamma dV = -P_1V_1{}^\gamma\int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma}dV = -\frac{P_1V_1{}^\gamma}{1-\gamma}\left(V_2{}^{1-\gamma} - V_1{}^{1-\gamma}\right) =$$

$$= -\frac{10\,\text{atm}(10\,\text{dm}^3)^{\frac{5}{3}}}{1-\frac{5}{3}}\left((39.8\,\text{dm}^3)^{1-\frac{5}{3}} - (10\,\text{dm}^3)^{1-\frac{5}{3}}\right) = -90.3\,\text{atm dm}^3 = -9.15\,\text{kJ}$$

Γ) Από τον 1° νόμο της Θερμοδυναμικής έχουμε ΔU = q + W. q = 0 διότι η διεργασία είναι αδιαβατική.

Γενικά, αν θεωρήσουμε U=U(V,T), τότε

$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + C_V dT$, όμως $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$, διότι είναι ιδανικό αέριο. $C_V = n\ c_V$. Άρα, $W = \Delta U = U(T_2) - U(T_1) = n\ c_V\ (T_2 - T_1)$.

Δοθέντος ότι η εκτόνωση γίνεται υπό σταθερή πίεση P_2,

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -P_2\int_{V_1}^{V_2} dV = -P_2(V_2 - V_1)$$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων έχουμε: $T_2 = \frac{P_2V_2T_1}{P_1V_1}$

Συνδυάζοντας τις 3 τελευταίες σχέσεις, έχουμε:

$$\Rightarrow -P_2\left(V_2 - V_1\right) = nc_V\left(\frac{P_2V_2T_1}{P_1V_1} - T_1\right) \Rightarrow V_2 = \frac{P_2V_1 + nc_VT_1}{nc_V\,\frac{P_2T_1}{P_1V_1} + P_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{P_2V_1 + \frac{P_1V_1}{RT_1}\frac{3}{2}RT_1}{\frac{P_1V_1}{RT_1}\frac{3}{2}R\frac{P_2T_1}{P_1V_1} + P_2} \Rightarrow V_2 = V_1\frac{P_2 + \frac{3}{2}P_1}{\frac{3}{2}P_2 + P_2} \Rightarrow V_2 = V_1\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{P_1}{P_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = 10\,L\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{10\,atm}{1\,atm}\right) = 64\,L\,.$$

Επομένως, W = –1 atm x (64 L – 10 L) = –54 x 101325 Pa x 10^{-3} m^3 = –5.47 kJ.