

ΕΝΟΤΗΤΑ 1 : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ & ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έννοια και ορισμός παραγώγου:

- Γεωμετρική προσέγγιση
- Ρυθμός μεταβολής συνάρτησης
- Γραμμική προσέγγιση συνάρτησης σε περιοχή σημείου

Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Μερική παράγωγος
- Παράγωγος σύνθετων συναρτήσεων
- Βαθμίδα συνάρτησης

Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Εισαγωγή στα διανύσματα

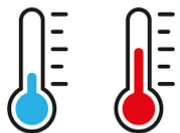
ΒΑΘΜΩΤΑ & ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Β Α Θ Μ Ω Τ Ο

Φυσική ποσότητα η οποία περιγράφεται πλήρως από έναν αριθμό (ο οποίος αντιστοιχεί στο μέγεθος) και μια μονάδα μέτρησης



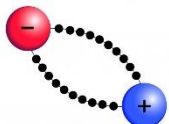
Χρόνος 15 sec



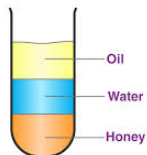
Θερμοκρασία 20° C



Μάζα 70 kgr



Ηλ. φορτίο 5 mCoulomb

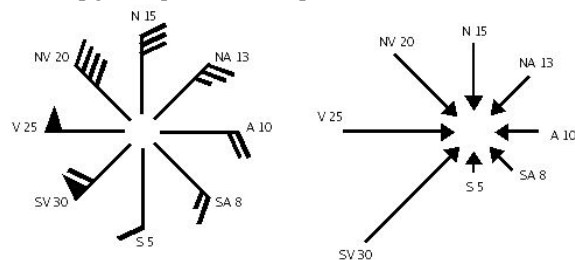


Πυκνότητα 1 $\frac{kg}{m^3}$

Δ Ι Α Ν Υ Σ Μ Α Τ Ι Κ Ο

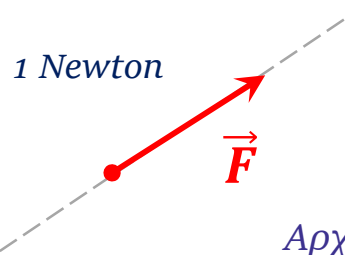
Φυσική ποσότητα η οποία περιγράφεται όχι μόνον από έναν αριθμό και μονάδα μέτρησης αλλά απαιτεί να οριστεί και μια κατεύθυνση.

Ταχύτητα ανέμου Βόρειος 5 m/sec



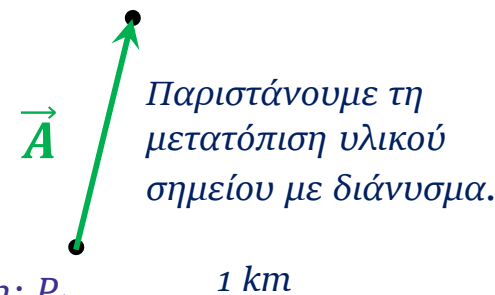
Δύναμη

Φορά + διεύθυνση = Κατεύθυνση



Μετατόπιση

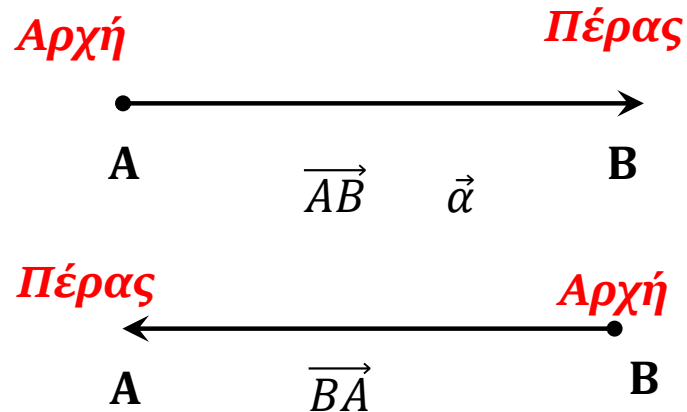
Τελική θέση: P2



Δηλαδή η φυσική ποσότητα που έχει μέτρο (αριθμός που περιγράφει πόσο μεγάλη είναι η φυσική ποσότητα) και κατεύθυνση στο χώρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

“Διάνυσμα είναι η μαθηματική εικόνα ή μαθηματική παράσταση ενός διανυσματικού μεγέθους”



Δύο σημεία A & B όπου το ένα χαρακτηρίζεται ως αρχή (A) και το άλλο ως πέρασ (B), μαζί με το τμήμα που ορίζουν αυτά τα σημεία αποτελεί μια καλή απεικόνιση ενός διανυσματικού μεγέθους.

“Ονομάζουμε διάνυσμα ένα ευθύγραμμο τμήμα, με ορισμένα άκρα, μαζί με μια φορά πάνω σε αυτό το τμήμα”

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της **μετατόπισης** για να κατανοήσουμε τις βασικές ιδιότητες των διανυσμάτων.

Τελική θέση: P_2

Πέρασ

\vec{A}

Αρχή

Αρχική θέση: P_1

$$A = |\vec{A}|$$

Το μέτρο διανύσματος είναι μια βαθμωτή ποσότητα (πάντα θετική). Περιγράφει την ένταση/ισχύ του διαν. μεγέθους (άνεμος, δύναμη, μετατόπιση).

Τελική θέση: P_2

\vec{A}

Αρχική θέση: P_1

Τελική θέση: P_4

\vec{B}

Αρχική θέση: P_3

Βόρειος vs Νότιος άνεμος

\vec{A}

\vec{C}

\vec{B}

\vec{D}

$$\vec{C} = -\vec{D}$$

Αν δυο διανύσματα έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** τότε είναι **αντίρροπα**.

Αν επιπλέον έχουν και το **ίδιο μέτρο** τότε λέγονται **αντίθετα**.

Αν δυο διανύσματα έχουν την **ίδια διεύθυνση** (ακόμα και αν έχουν διαφορετικό μέτρο) τότε είναι **παράλληλα**.

Αν δυο διανύσματα (όπου και να βρίσκονται στο χώρο) έχουν την **ίδια κατεύθυνση** και **ίδιο μέτρο** τότε είναι **ίσα**.

Αντίρροπα

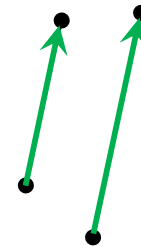


Αντίθετα

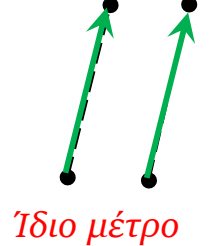


Ίδιο μέτρο

Παράλληλα



Ίσα



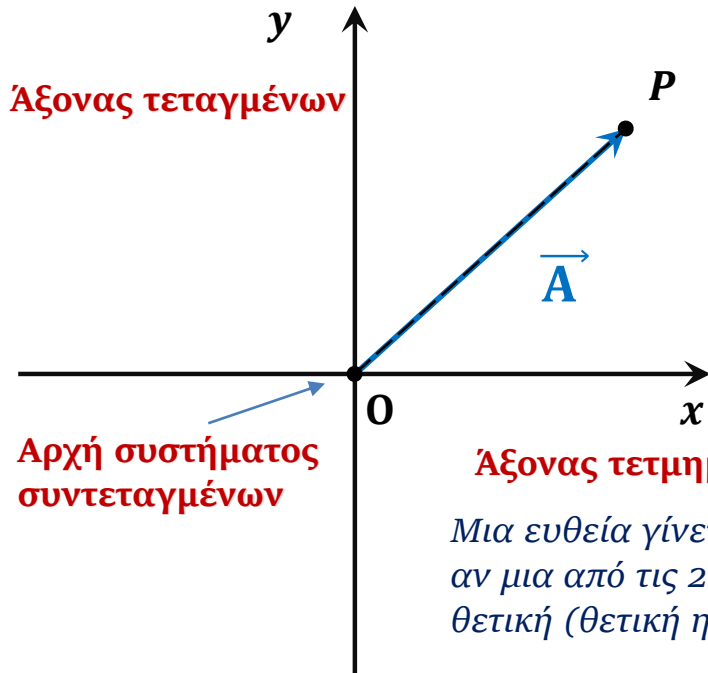
Ίδιο μέτρο

Ισχύει για διανύσματα που βρίσκονται οπουδήποτε στο χώρο

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ένα διάνυσμα στο επίπεδο (2D) ή στο χώρο (3D) ορίζεται όταν οριστούν τα σημεία της αρχής και πέρατος. Ο ορισμός απαιτεί τη χρήση **καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων**.

Επίπεδο R^2



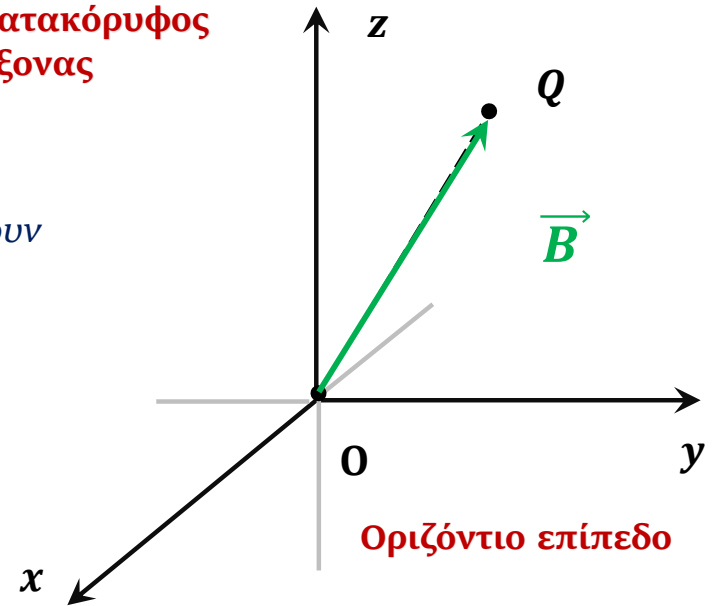
Η αρχή και το πέρασ του διανύσματος καταλαμβάνουν σημεία στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Μια ευθεία γίνεται **προσανατολισμένη** αν μια από τις 2 φορές χαρακτηριστεί θετική (θετική ημιευθεία).

Το σύστημα συντεταγμένων του Καρτέσιου στο επίπεδο ορίζεται με τη βοήθεια δύο προσανατολισμένων ευθειών οι οποίες τέμνονται κάθετα στο σημείο O.

Χώρος R^3

Κατακόρυφος άξονας

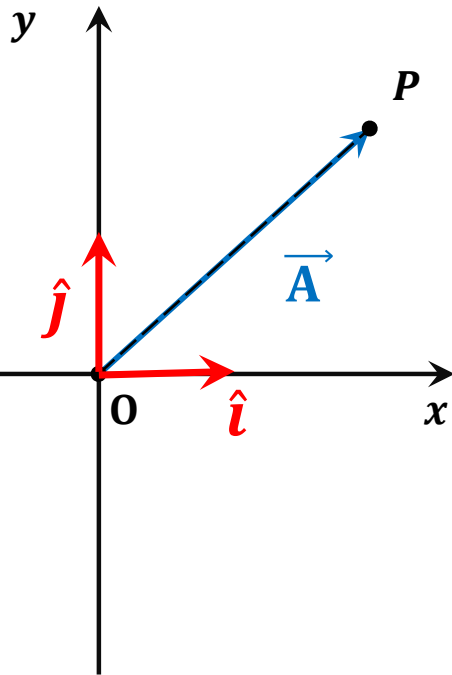


Το σύστημα συντεταγμένων του Καρτέσιου στον τρισδιάστατο χώρο ορίζεται με τη βοήθεια τριών προσανατολισμένων ευθειών οι οποίες τέμνονται κάθετα στο σημείο O. Εκτός από τους οριζόντιους άξονες x & y ορίζεται και τρίτος άξονας z, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν οι x & y.

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

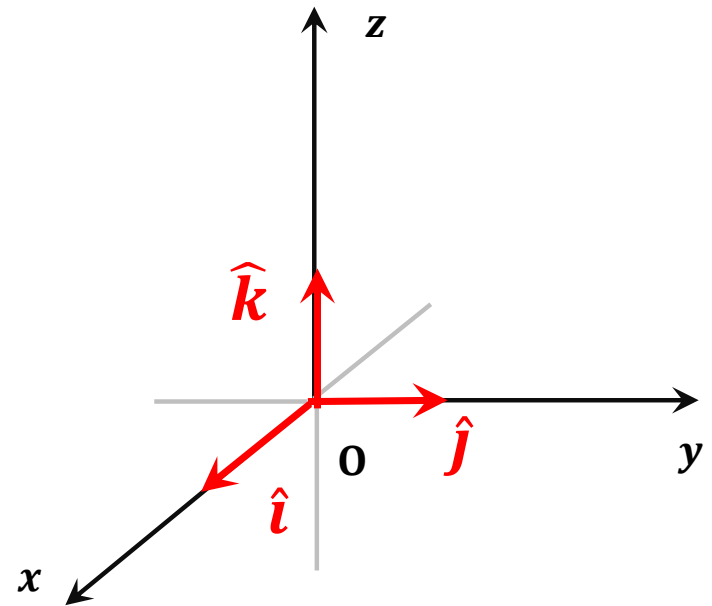
Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζονται **μοναδιαία διανύσματα** τα οποία έχουν **μέτρο ίση με την μονάδα**. Μοναδική τους χρήση είναι να **δείχνουν προς τη θετική κατεύθυνση των προσανατολισμένων αξόνων**.

Επίπεδο R^2



$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

Χώρος R^3

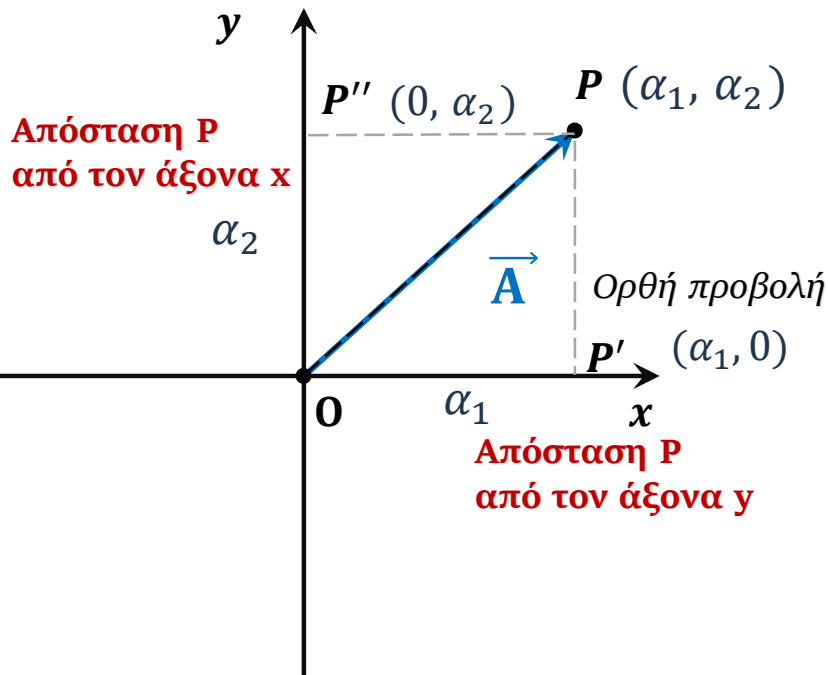


$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η αρχή και πέρας ενός διανύσματος προσδιορίζονται σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων 2D ή 3D, με τη βοήθεια ενός ζεύγους ή τριάδας αριθμών, αντίστοιχα. Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **συντεταγμένες αρχής** και **πέρατος** του διανύσματος.

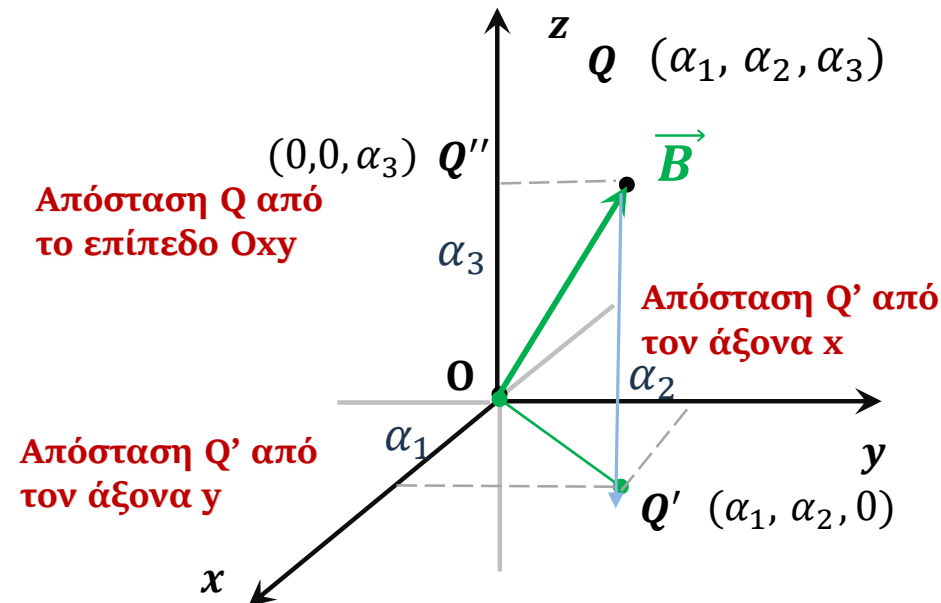
Επίπεδο R^2



Τετμημένη α_1 : Απόσταση από άξονα y

Τεταγμένη α_2 : Απόσταση από άξονα x

Χώρος R^3



Από το σημείο Q βρίσκουμε την *προβολή* του στο επίπεδο Oxy, φέρνοντας παράλληλη στον άξονα Oz, η οποία τέμνει κάθετα το επίπεδο.

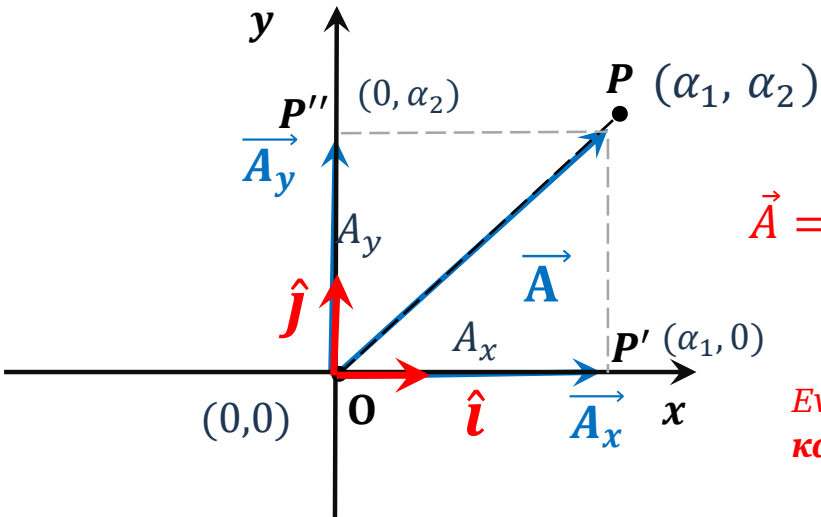
Η τριάδα αριθμών της αρχής και του πέρατος του διανύσματος ορίζει με μοναδικό τρόπο το διάνυσμα.

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Οι πράξεις με διανύσματα διευκολύνονται με την εύρεση των **συνιστωσών** διανυσμάτων.

Διάνυσμα με αρχή το O

Επίπεδο R^2



$$\vec{A} = (A_x \quad A_y)$$

$$\vec{B} = (B_x \quad B_y)$$

Εναλλακτική γραφή
κάθετων συνιστωσών

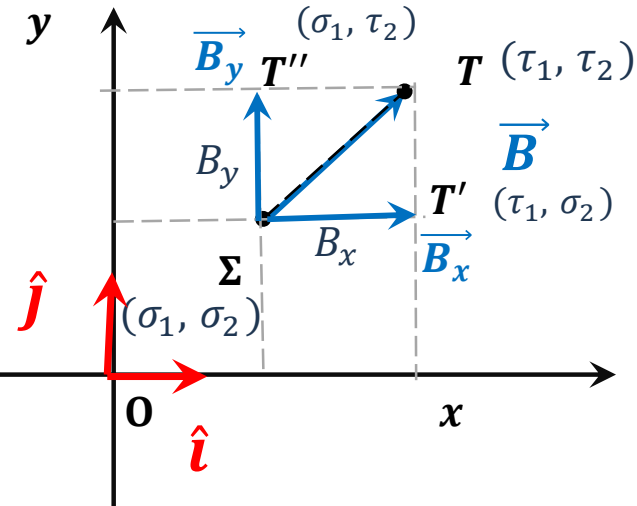
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$(\alpha_1 - 0)\hat{i} + (\alpha_2 - 0)\hat{j} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Διάνυσμα με αρχή το Σ

Επίπεδο R^2



$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} =$$

$$(\tau_1 - \sigma_1)\hat{i} + (\tau_2 - \sigma_2)\hat{j}$$

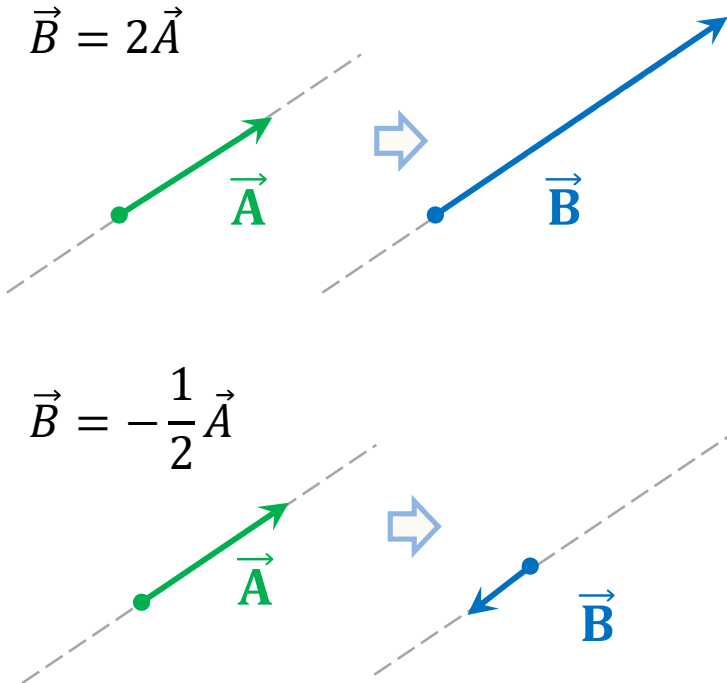
$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

Αν το \vec{A} αντιστοιχεί σε μετατόπιση, τότε η μετατόπιση από το O στο P μπορεί εναλλακτικά να καλυφθεί πηγαίνοντας απόσταση A_x προς την κατεύθυνση +x (\hat{i}) και μετά απόσταση A_y προς την κατεύθυνση +y (\hat{j}).

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (I)

Αριθμητικό πολλαπλάσιο

Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα



Πολλαπλασιασμός με σταθερά δεν αλλάζει τη **διεύθυνση** του διανύσματος παρά μόνο τη φορά (κατεύθυνση) ή/και το μέτρο του



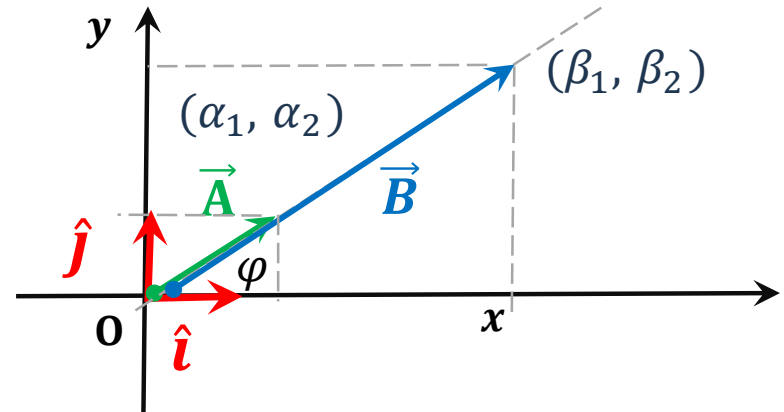
$$\tan \varphi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

Προσοχή: Γενικά

$$\beta_1 \neq 2\alpha_1$$

$$\beta_2 \neq 2\alpha_2$$

Χρήση συνιστωσών



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = \beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j}$$

Θέλουμε να βρούμε
Τα β_1 & β_2

$$|\vec{A}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$$

$$|\vec{B}| = 2|\vec{A}| \Rightarrow \beta_1^2 + \beta_2^2 = 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$

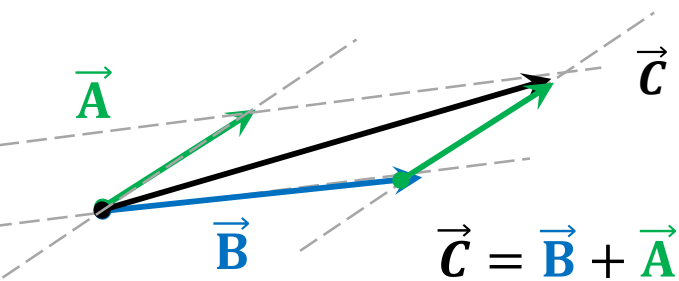
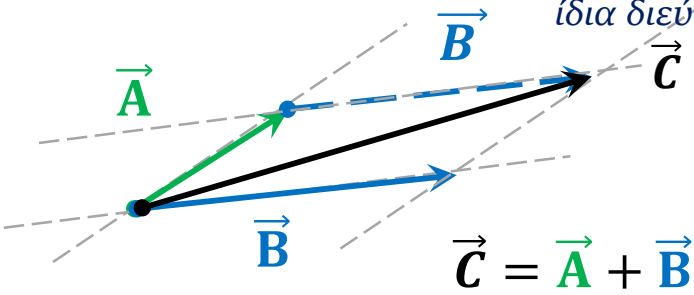
$$\tan \varphi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (II)

Άθροισμα διανυσμάτων

Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα

Ίσο (ελεύθερο) διάνυσμα:
ίδια διεύθυνση, φορά και μέτρο

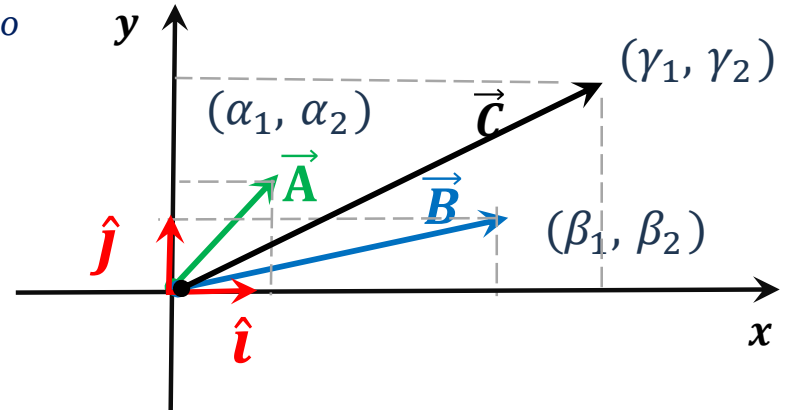


Μνημονικός κανόνας:
σηματισμός παραλληλογράμμου

Τοποθετούμε την αρχή του δεύτερου διανύσματος στο πέρας του πρώτου (διαδοχικά).

Ισχύει ο νόμος της μετάθεσης, δεν έχει σημασία η σειρά πρόσθεσης των διανυσμάτων.

Χρήση συνιστωσών



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = \beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j}$$

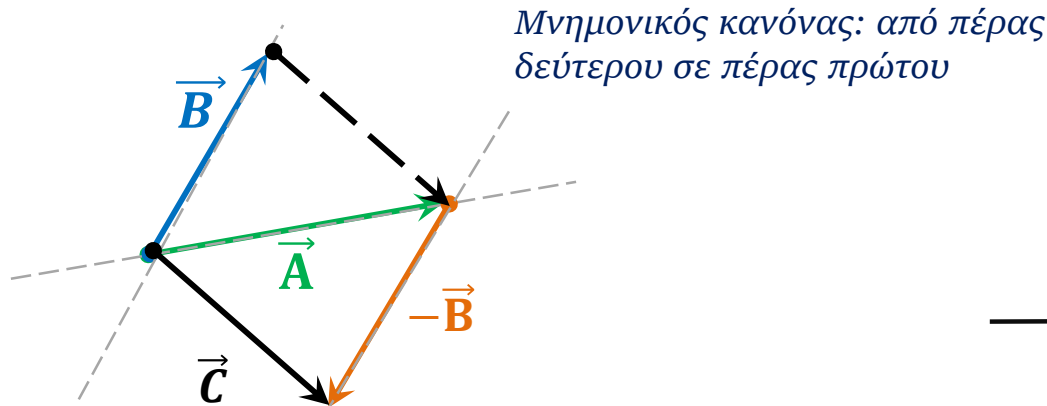
$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{C}_x + \vec{C}_y = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = \gamma_1 \hat{i} + \gamma_2 \hat{j} \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \hat{i} + (\alpha_2 + \beta_2) \hat{j} \end{aligned}$$

Προσοχή: Γενικά δεν ισχύει $|\vec{C}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ (III)

Διαφορά διανυσμάτων

Χρήση διαγραμμάτων υπό κλίμακα

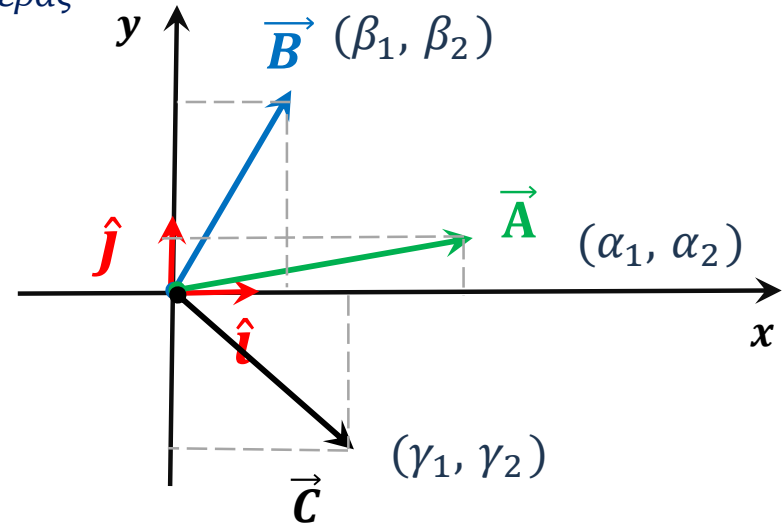


$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Ουσιαστικά βρίσκουμε το αντίθετο του δεύτερου διανύσματος και τοποθετούμε την αρχή του νέου διανύσματος στο πέρασ του πρώτου (διαδοχικά).

Όταν το β_2 είναι πολύ μεγαλύτερο του α_2 (όπως συμβαίνει στο επάνω παράδειγμα) τότε το πέρασ της διαφοράς θα έχει αρνητική τεταγμένη.

Χρήση συνιστωσών



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j}$$

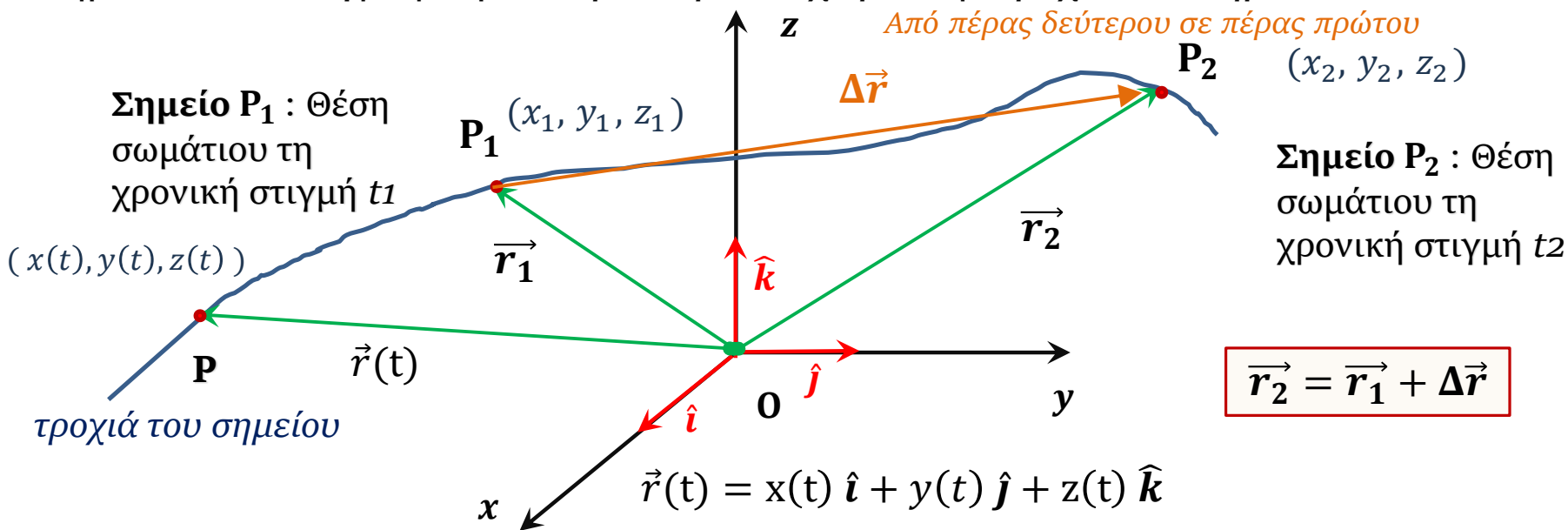
$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} = \beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j}$$

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} = \gamma_1 \hat{i} + \gamma_2 \hat{j}$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1) \hat{i} + (\alpha_2 - \beta_2) \hat{j}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ

Διάνυσμα θέσεως: δέσμο διάνυσμα, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την τροχιά του σημείου.



$$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}$$

Οι τριάδες συντεταγμένων δίνουν τις θέσεις του σωματίου (πέρας διανύσματος θέσεως) τις χρονικές στιγμές t_1 & t_2 .

$$\vec{P}_{12} = \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j} + (z_2 - z_1) \hat{k} \quad \text{Διάνυσμα μετατόπισης}$$

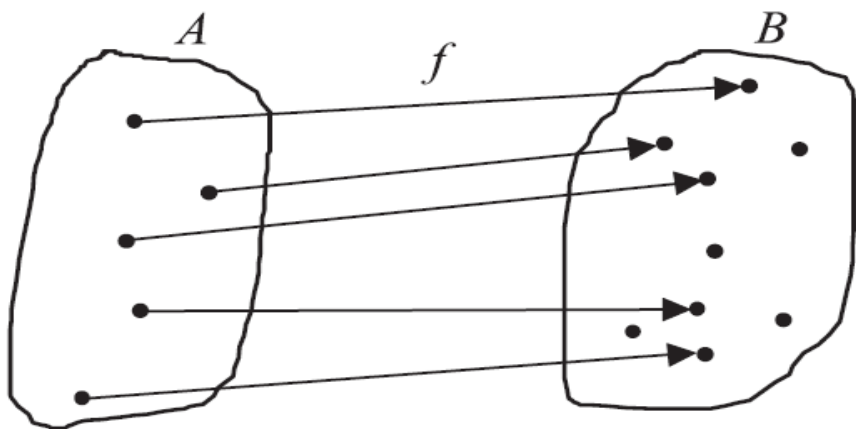
Εισαγωγή στις πραγματικές συναρτήσεις

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} , καλούμε ως **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού** το A μια **διαδικασία** f , κατά την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f** στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Πεδίο ορισμού f

Σύνολο τιμών f



ΣΥΜΒΟΛΙΚΑ

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) \equiv y$$

Ανεξάρτητη μεταβλητή

Εξαρτημένη μεταβλητή

Πεδίο ορισμού $A = (0, e]$
είναι υποσύνολο του \mathbb{R} .
Πεδίο τιμών f είναι \mathbb{R} .

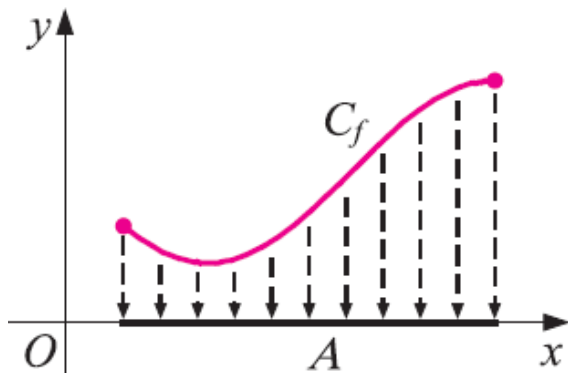
$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

Ορίζεται μόνο αν $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\ln x \leq \ln e \Leftrightarrow 0 < x \leq e$

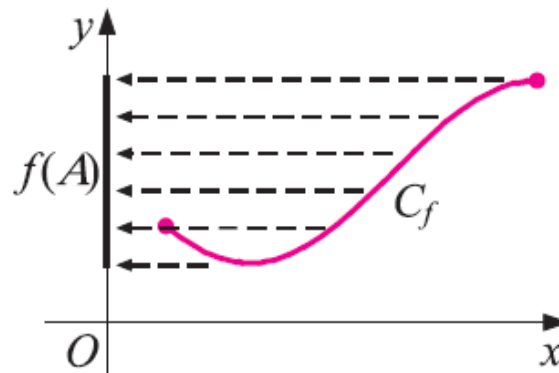
ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . **Γραφική παράσταση** ή **καμπύλη** C_f της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy καλείται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

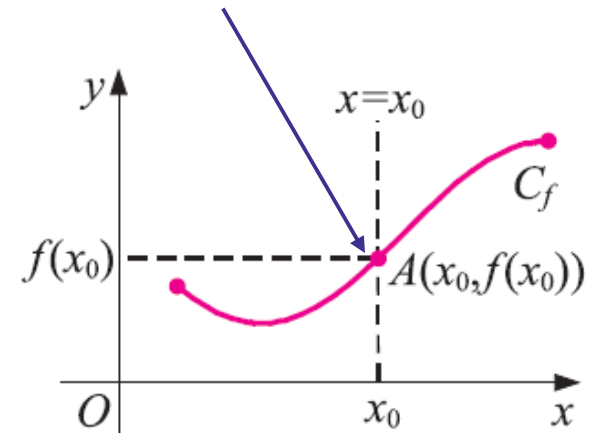
Πεδίο ορισμού A



Σύνολο τιμών $f(A)$



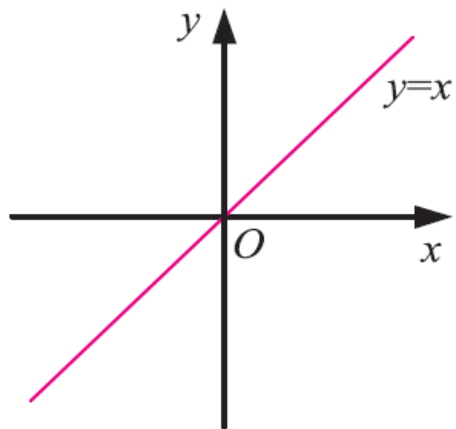
Σημείο του επιπέδου $M(x, y)$ ανήκει στην καμπύλη μόνο όταν $y=f(x)$



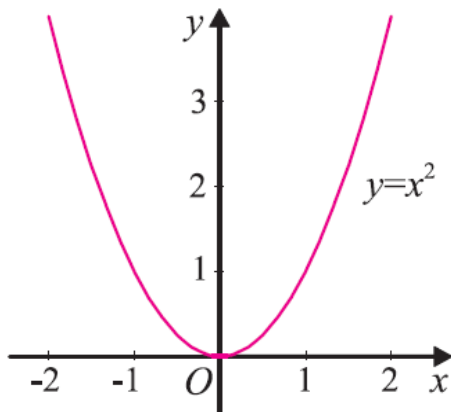
Η εξίσωση $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της καμπύλης C_f και καλείται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f** .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

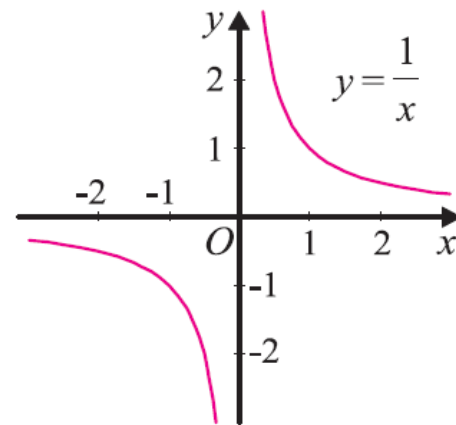
Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



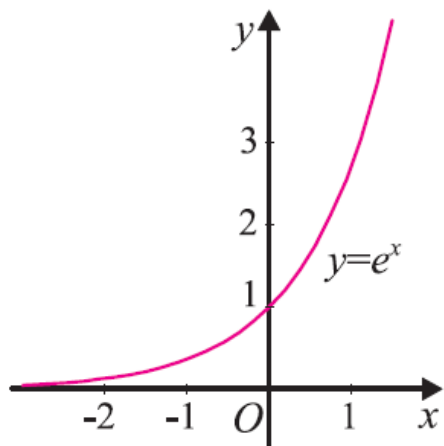
Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή.



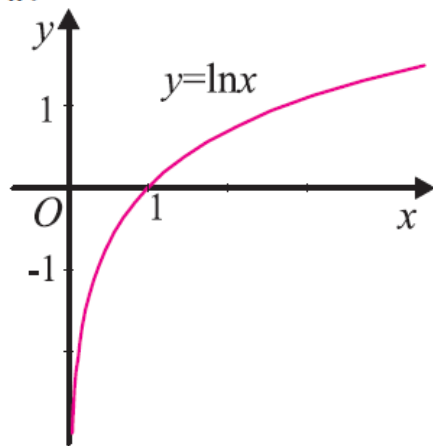
Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή.



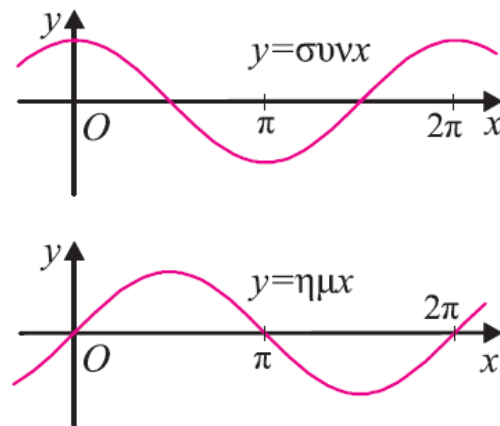
Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι “πάνω” από τον άξονα x , αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.



Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι “δεξιά” του άξονα yy' , αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.



Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π .




A. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής

Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής

Έστω $f : x \rightarrow f(x)$ $x, f(x) \in \mathcal{R}$, $\alpha < x < \beta$

Έστω σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν το παρακάτω όριο της συνάρτησης υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

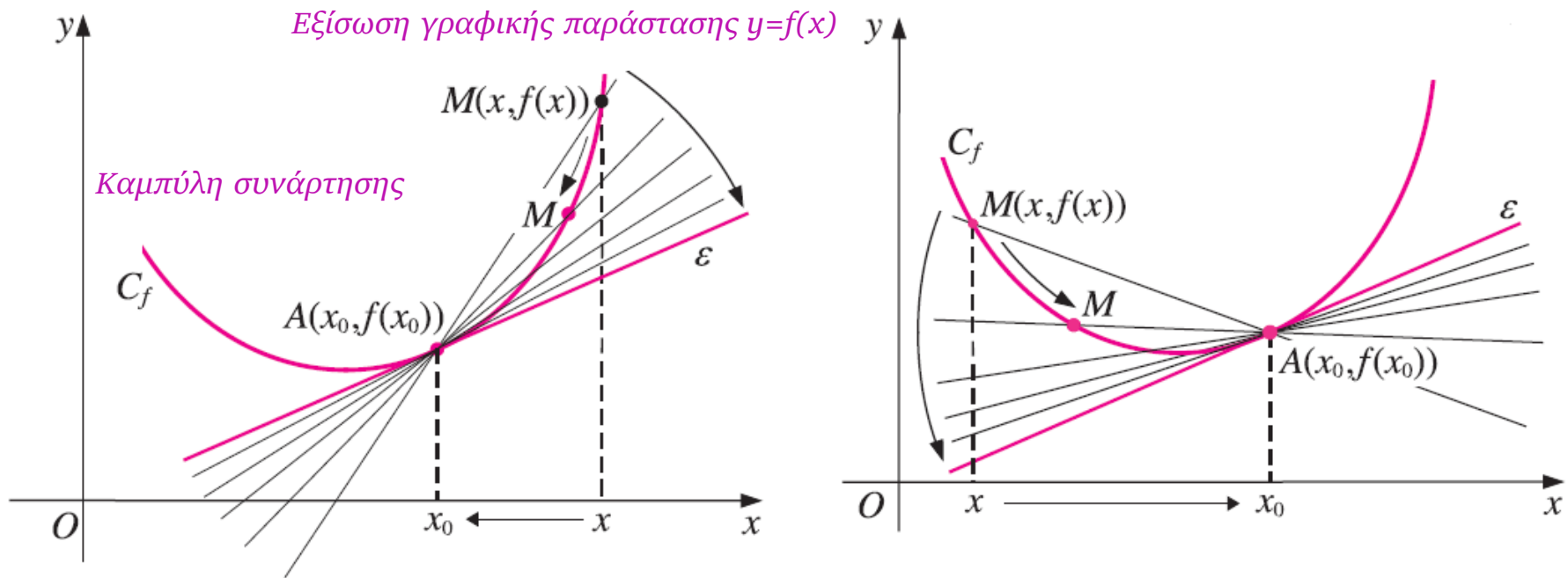
 “ f τονούμενο του x_0 ”

Η έννοια της παραγώγου σε σημείο x_0 γίνεται κατανοητή ως

1. **Κλίση** της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο x_0 (Γεωμετρία).
2. **Ρυθμός μεταβολής** ή «ταχύτητα» της συνάρτησης.
3. Εργαλείο στη **γραμμική προσέγγιση συνάρτησης** στη περιοχή του σημείου x_0

Εφαπτομένη & τέμνουσα καμπύλης

Έστω σημείο $A(x_0, f(x_0))$ καμπύλη C_f της συνάρτησης f και ένα επιπλέον σημείο $M(x, f(x))$, τα οποία ορίζουν την ευθεία AM (τέμνουσα της καμπύλης).



Όταν x πλησιάζει το x_0 , είτε από δεξιά ($x > x_0$) είτε από αριστερά ($x < x_0$), η τέμνουσα λαμβάνει μια **οριακή θέση (ϵ)** έχοντας ένα και **μόνο σημείο τομής** με την καμπύλη. Η τελευταία ονομάζεται **εφαπτομένη** της καμπύλης στο σημείο A .

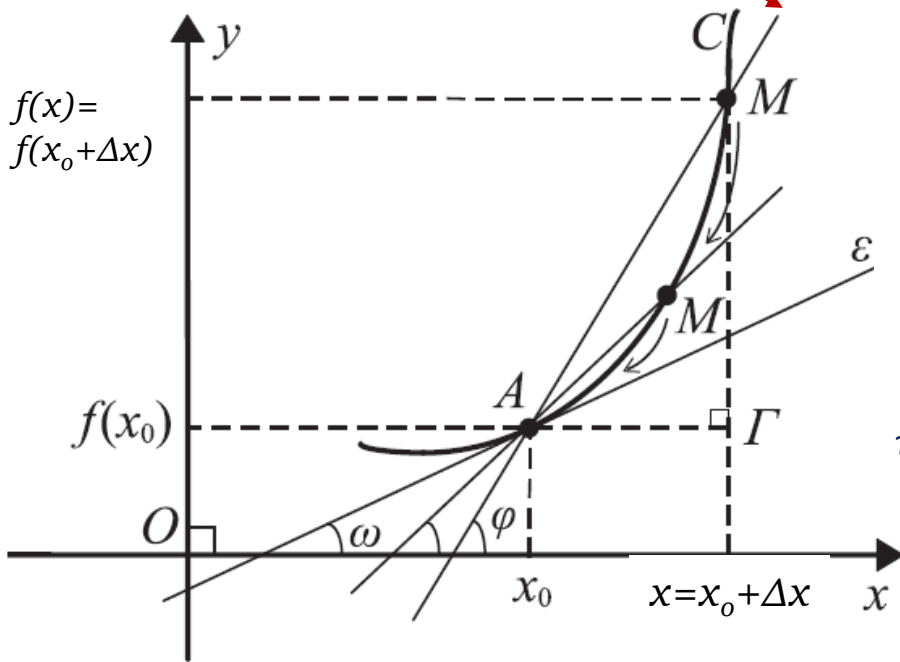
Κλίση και εξίσωση τέμνουσας ευθείας



Ερώτηση: Ποιά η κλίση και η εξίσωση μιας τέμνουσας ευθείας;

Περίπτωση $\Delta x \neq 0$
Πεπερασμένο

Τότε η ευθεία που διέρχεται από το A τέμνει την καμπύλη και στο σημείο M. Σχηματίζει γωνία ϕ με οριζόντιο άξονα.



Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της τέμνουσας ευθείας AM

$$\tan \phi = \lambda = \frac{M\Gamma}{A\Gamma} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Η ποσότητα αυτή αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της τιμής της f ως προς τη μεταβολή του x ή αλλιώς $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και M

$$y = f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \tan \phi = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

Σχηματίζει γωνία ϕ με τον οριζόντιο άξονα. Η ευθεία αυτή για κάθε $\Delta x \neq 0$ τέμνει τοπικά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε δύο σημεία.

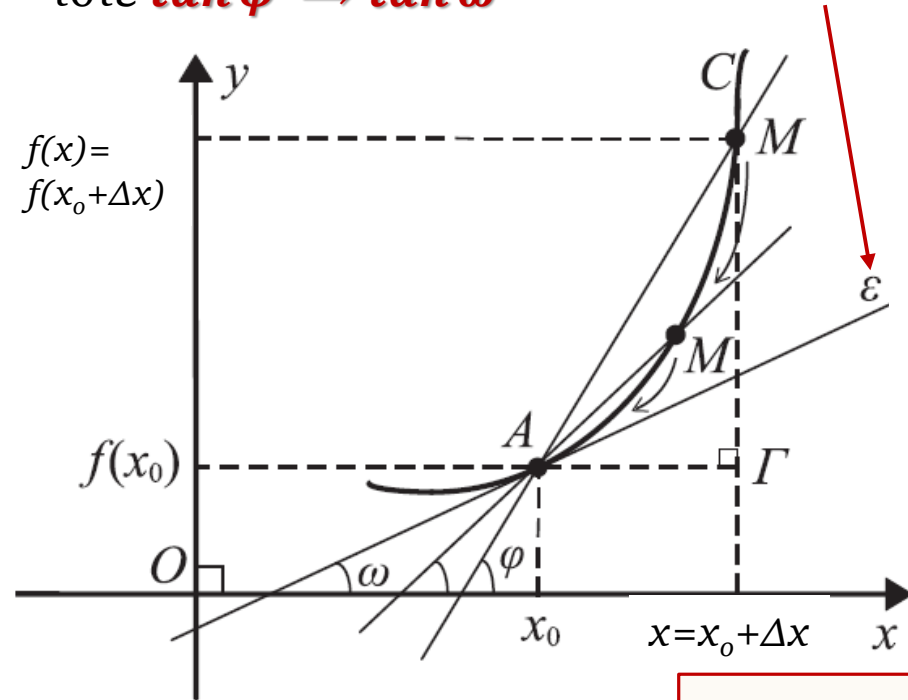
Κλίση και εξίσωση εφαπτομένης ευθείας



Ερώτηση: Ποιά η κλίση και η εξίσωση μιας εφαπτομένης ευθείας στο σημείο A;

Περίπτωση $\Delta x \Rightarrow 0$
τότε $\tan \varphi \Rightarrow \tan \omega$

Τότε η ευθεία που διέρχεται από το A είναι εφαπτομένη αφού το M σχεδόν ταυτίζεται με το A. Σχηματίζει γωνία $\varphi = \omega$ με οριζόντιο άξονα.



Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο A είναι

$$\tan \omega = \lambda = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overset{\text{Ορισμός παραγώγου}}{f(x) \equiv y} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df(x_0)}{dx}$$

Η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί στη μεταβολή της τιμής της f ως προς την μεταβλητή x στο σημείο x_0 ή αλλιώς $\frac{df(x_0)}{dx} = \tan \omega$.

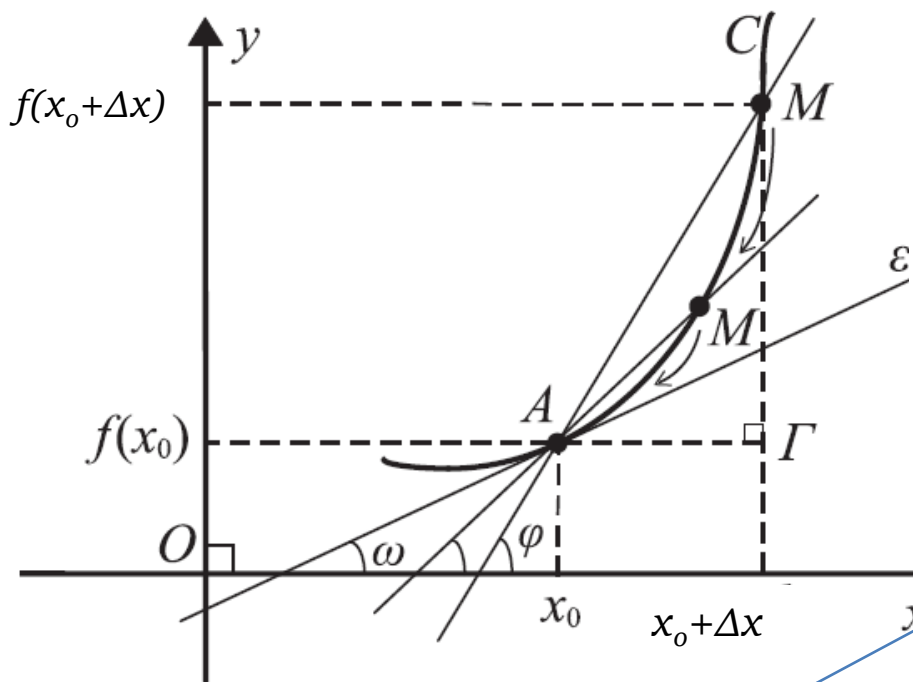
Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C_f στο σημείο A

$$y = f(x) = f(x_0) + \tan \omega (x - x_0) = f(x_0) + \lambda (x - x_0) \\ = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0)$$

Η ευθεία αυτή έχει τοπικά (στην περιοχή του σημείο x_0) μόνο ένα κοινό σημείο με τη C_f . Εφάπτεται δηλαδή της καμπύλη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

1α. Γεωμετρική Προσέγγιση

Αν υπάρχει το $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .



$$f'(x_0) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = x_0$ είναι η **κλίση** της εφαπτομένης ευθείας.

$$y = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1β. Ρυθμός μεταβολής συνάρτησης



- **Περίπτωση $\Delta x \neq 0$**

Σχετική μεταβολή της τιμής της συνάρτησης f ως προς τη μεταβολή της μεταβλητής x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- **Περίπτωση $\Delta x \Rightarrow 0$**

Ρυθμός μεταβολής της τιμής της f ή “ταχύτητα” της συνάρτησης στο σημείο $x = x_0$

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Παράδειγμα: Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η **θέση** του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0) \equiv \frac{df(t_0)}{dt}$

δηλαδή ο **ρυθμός μεταβολής της $f(t)$** ως προς t όταν $t = t_0$.

Η παράγωγος εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής ή ταχύτητα** μιας συνάρτησης

1γ. Γραμμική προσέγγιση f στην περιοχή x_0



Η **παράγωγος σε σημείο $x = x_0$** , $f'(x_0)$, χρησιμοποιείται για την **προσέγγιση της τιμής της f** στην ευρύτερη περιοχή του $x = x_0$

Με $\Delta x \neq 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df(x_0)}{dx} + \eta(x_0, \Delta x)$$

Παράγοντας διόρθωσης (σφάλμα στη προσέγγιση) ο οποίος εξαρτάται από το σημείο $x = x_0$ αλλά και πόσο μακριά είμαστε από το σημείο (Δx).

$$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx} + \Delta x \eta(x_0, \Delta x)$$

Όταν $\Delta x \Rightarrow 0$ τότε

$$\eta(x_0, \Delta x) \Rightarrow 0$$

Αν $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$ τότε μπορούμε πάντα να διαλέξουμε ένα Δx τέτοιο ώστε $\eta(x_0, \Delta x) \lll \frac{df(x_0)}{dx}$.

Αν για παράδειγμα ισχύει $\eta(x_0, \Delta x) \sim 10^{-3} \frac{df(x_0)}{dx}$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx} [1 + 10^{-3}] = f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx} + \Delta x 10^{-3} \frac{df(x_0)}{dx}$$

Όπου ο **3^{ος} (διορθωτικός) όρος** μπορεί να γίνει όσο μικρός θέλουμε μειώνοντας το Δx .

Μπορούμε να κάνουμε **γραμμική προσέγγιση** της τιμής της συνάρτησης **στην περιοχή του x_0** με τη βοήθεια της παραγώγου:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx}$$

Παράγωγος συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη **σε κάθε σημείο** $x_0 \in A$.

Όταν A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη **παράγωγο συνάρτηση**

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της** και συμβολίζεται με $\frac{df(x)}{dx}$. Η παράγωγος $y = f'(x)$ συμβολίζεται και ως $y = (f(x))'$.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''

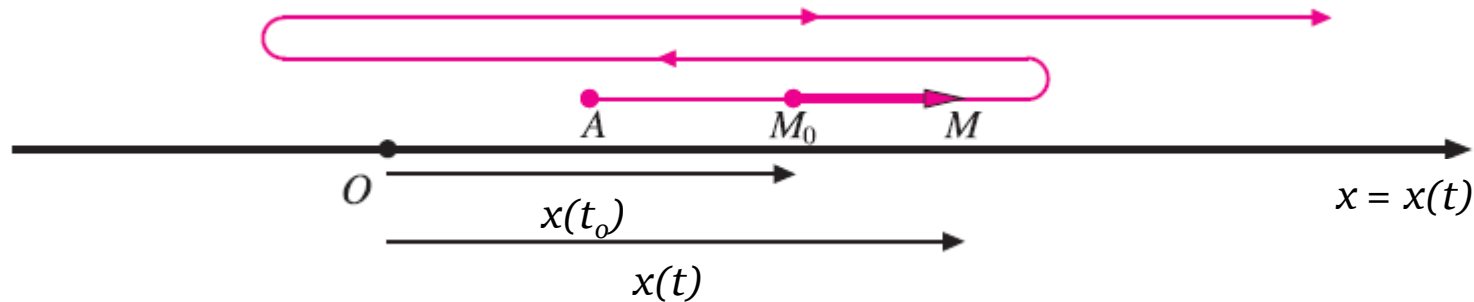
Επαγωγικά ορίζονται παράγωγοι ανώτερης τάξεως. Η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f συμβολίζεται ως $f^{(n)}$ ή $\frac{d^n f}{dx^n}$ βάσει του παρακάτω κανόνα

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right]$$

Παράδειγμα: Στιγμιαία ταχύτητα - επιτάχυνση

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** $x(t)$ καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκος του άξονα κατά τη χρονική στιγμή t .



Με τη παρέλευση χρόνου $\Delta t = t - t_0$ το κινητό μετακινείται από το σημείο M_0 στο M διανύοντας απόσταση $\Delta x = x(t) - x(t_0)$. Η **μέση ταχύτητα** του κατά την μετακίνηση

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{Απόσταση}}{\text{Χρόνος}}$$

Αν το Δt είναι πολύ μικρό τότε έχουμε πολύ καλή προσέγγιση του **ρυθμού μεταβολής** της θέσης ή **στιγμιαίας ταχύτητας** του κινητού στο σημείο M_0 :

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \quad (\text{Παράγωγος συνάρτησης θέσεως})$$

Παράδειγμα: Στιγμιαία ταχύτητα - επιτάχυνση

Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή

$$v(t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt}$$

Στιγμιαία ταχύτητα κινητού τη χρονική στιγμή t_0

Για κάθε χρονική στιγμή

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Στιγμιαία ταχύτητα κινητού ως συνάρτηση χρόνου t
(ανεξάρτητη μεταβλητή)

Για κάθε χρονική στιγμή

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Επιτάχυνση κινητού ως συνάρτηση χρόνου t

Γραμμική προσέγγιση θέσεως κινητού για μετατοπίσεις με παρέλευση μικρού χρονικού διαστήματος Δt

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \frac{dx(t)}{dt} = x(t) + v(t) \Delta t$$

2α. Ιδιότητες της παραγώγου

$$\frac{d(f_1 + f_2)}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}$$

$$f_1=f_1(x) \text{ \& } f_2=f_2(x)$$

$$\frac{d(cf)}{dx} = c \frac{df}{dx}$$

c: σταθερά

$$\frac{d(fg)}{dx} = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g$$

$$f=f(x) \text{ \& } g=g(x)$$

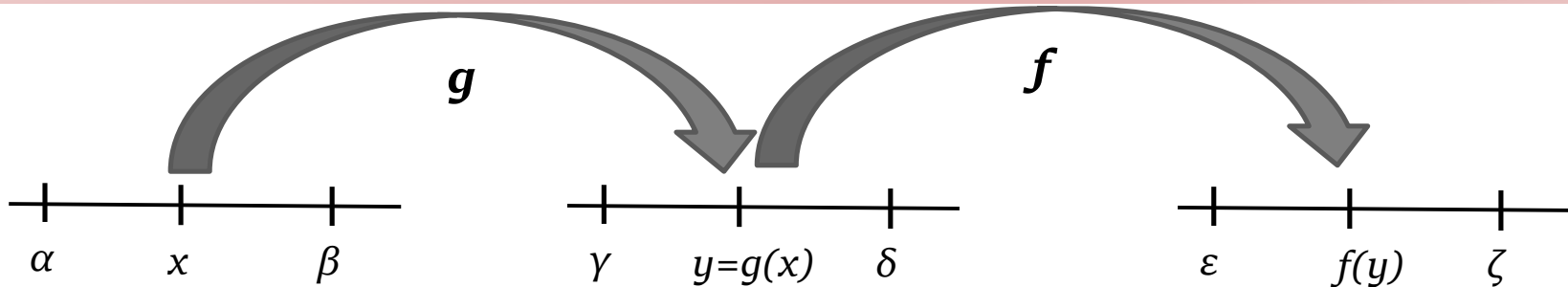
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \left(\frac{1}{g^2} \right) \left(\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx} \right)$$

$$g(x) \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

$f(g(x))$ σύνθετη συνάρτηση

2β. Σύνθεση συναρτήσεων



Αν συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta=(\alpha,\beta)$ και f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η **σύνθεσή** τους $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $F = \sqrt{x^2 + 1}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(x) = \sqrt{x}$ θέσουμε όπου x το $g(x) = x^2 + 1$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g (ως προς x).

3. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

c: σταθερά

$$\frac{dx^v}{dx} = vx^{v-1}$$

$v \in \mathbb{N}$: φυσικός αριθμός

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$v=1$$

$$\frac{dx^\rho}{dx} = \rho x^{\rho-1}$$

$\rho \in \mathbb{Q}$: ρητός αριθμός

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \right\}, \alpha \text{ \& \beta ακέραιοι με } \beta \neq 0$$

Άρρητος $\pi=3.14159\dots$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

Βάση φυσικού λογαρίθμου

$$\ln x \equiv \log_e x$$

$e=2,71828\dots$

3α. Παραδείγματα

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d\sqrt{x^2 + a^2}}{dx} = ?$$

$$\frac{dx^\rho}{dx} = \rho x^{\rho-1}$$

3α. Παραδείγματα

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d\sqrt{x^2 + a^2}}{dx} = ?$$

$$\frac{dx^\rho}{dx} = \rho x^{\rho-1}$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F = \sqrt{x^2 + a^2}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(y) = \sqrt{y} = y^{1/2}$ θέσουμε όπου y το $g(x) = x^2 + a^2$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$$f'(y) = \frac{df}{dy} = \frac{1}{2} (y)^{-1/2} = \frac{1}{2} (x^2 + a^2)^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = 2x$$

$$\frac{d\sqrt{x^2 + a^2}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

3β. Παραδείγματα

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d e^{\sin x}}{dx} = ?$$

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

3β. Παραδείγματα

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{de^{\sin x}}{dx} = ?$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F = e^{\sin x}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(y) = e^y$ θέσουμε όπου y το $g(x) = \sin x$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$$f'(y) = \frac{df}{dy} = e^y = e^{\sin x}$$

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \cos x$$

$$\frac{de^{\sin x}}{dx} = e^{\sin x} \cos x$$

3γ. Παραδείγματα

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right) = ?$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

3γ. Παραδείγματα

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right) = ?$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Η σύνθετη συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{\sin x}$ παρατηρούμε ότι προκύπτει αν στην $f(y) = \frac{1}{y}$ θέσουμε όπου y το $g(x) = \sin x$. Δηλαδή είναι $F(x) = f(g(x))$.

$$h \equiv h(x)$$

$$s \equiv s(x) \neq 0$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h}{s} \right) = \left(\frac{1}{s^2} \right) \left(\frac{dh}{dx} s - h \frac{ds}{dx} \right)$$

$$f'(g(x)) = ?$$

$$f'(y) = \left(\frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{d}{dy} 1 \cdot y - 1 \frac{dy}{dy} \right) = \left(\frac{1}{y^2} \right) (0 - 1) = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin x} \right) = -\frac{1}{\sin^2 x} \cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

3δ. Παραδείγματα

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** $x(t)$ καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκος του άξονα κατά τη χρονική στιγμή t .

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)^2$$

Ταχύτητα $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_o + \alpha(t - t_o)$

Επιτάχυνση $\alpha(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \alpha$

Το κινητό κινείται με **σταθερή επιτάχυνση α** :

Τη χρονική στιγμή $t = t_o$ βρίσκεται στη θέση x_o και έχει ταχύτητα v_o .

3ε. Παραδείγματα

Θεωρούμε κίνηση σώματος σε **μια διάσταση** όπου η **συνάρτηση θέσης** $x(t)$ καθορίζει τη θέση του κινητού κατά μήκος του άξονα κατά τη χρονική στιγμή t .

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Ταχύτητα $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega t) + v_0 \cos(\omega t)$

Επιτάχυνση $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t) - \omega v_0 \sin(\omega t)$

Το κινητό κινείται με μεταβλητή στο χρόνο επιτάχυνση

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = v_0$$

$$a(t) = -\omega^2 \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \right] = -\omega^2 x(t)$$

B. Παράγωγος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών



Έστω $f = f(x_1, x_2)$. Ορίζεται η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης f ως προς τη **μεταβλητή x_i** . Εκφράζει τη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης f για απειροελάχιστη μεταβολή μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i , δηλαδή “προς τη κατεύθυνση της μεταβλητής x_i ”.

x_1 : εισόδημα

x_2 : περιουσία

$$x_1 = 10000 \text{ ευρώ}$$

$$x_2 = 100 \text{ τμ}$$

$$\Delta x_1 = 100 \text{ ευρώ}$$

$$\Delta x_2 = 0 \text{ τμ}$$

2200 ευρώ

2000 ευρώ

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$$

Η μερική παράγωγος συνάρτησης είναι μια συνάρτηση. Το πλήθος τους είναι ίσο με το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Ο ορισμός μας δίνει την τιμή της μερικής παραγώγου ως προς x_1 για εισόδημα $x_1 = 10000$ ευρώ & περιουσία $x_2 = 100$ τμ

$$x_1 = 10000 \text{ ευρώ}$$

$$x_2 = 100 \text{ τμ}$$

$$\Delta x_1 = 0 \text{ ευρώ}$$

$$\Delta x_2 = 20 \text{ τμ}$$

2300 ευρώ

2000 ευρώ

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)$$

Ο ορισμός μας δίνει την τιμή της μερικής παραγώγου ως προς x_2 για εισόδημα $x_1 = 10000$ ευρώ & περιουσία $x_2 = 100$ τμ

Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών



Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ορίζεται η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x_i . Εκφράζει τη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης f για απειροελάχιστη μεταβολή μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i , δηλαδή “προς τη κατεύθυνση της μεταβλητής x_i ”.

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

...

$$\lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

*Η μερική παράγωγος συνάρτησης είναι μια συνάρτηση.
Ο ορισμός μας δίνει την τιμή της μερικής παραγώγου ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές.*

Β. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ Πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών



Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ορίζεται η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x_i . Εκφράζει τη μεταβολή στην τιμή της συνάρτησης f για απειροελάχιστη μεταβολή μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i , δηλαδή “προς τη κατεύθυνση της μεταβλητής x_i ”.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Έστω $f = f(x, y)$ τότε ορίζονται οι πρώτες μερικές παράγωγοι

$$x_1 = x$$

Ο ορισμός μας δίνει την τιμή της μερικής συνάρτησης για τις τιμές των μεταβλητών (x_0, y_0)

$$x_2 = y$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ y = \text{σταθ}}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Μεταβάλλεται η τιμή της f λόγω μεταβολής **μόνο** της x κατά Δx

Μνημονικός κανόνας: Η μερική παράγωγος ως προς μια μεταβλητή μεταπίπτει στη συνηθισμένη παράγωγο όταν θεωρήσουμε τις άλλες μεταβλητές ως σταθερές.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ x = \text{σταθ}}} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Μεταβάλλεται η τιμή της f λόγω μεταβολής **μόνο** της y κατά Δy

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ?, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ?, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ?$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ??$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = ??$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = ?? \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = ??$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$. Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \equiv f_{zx} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \equiv f_{zy} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \equiv f_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv f_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

Παραδείγματα

Έστω συνάρτηση $f(x,y,z) = 5xy + 2(x^2 + y^2)z$.

Ορίζονται οι παρακάτω μερικές παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y + 4xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5x + 4yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

Δηλαδή η σειρά με την οποία γίνεται η παραγωγή δεν έχει σημασία. Αυτό είναι **γενικός κανόνας** για μια συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Όπου x_i, x_j ανήκουν στις μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης μιας μεταβλητής

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n είναι και αυτές συναρτήσεις μιας άλλης μεταβλητής t . Δηλαδή ισχύει

$$\left. \begin{aligned} f &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1 &= x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \end{aligned} \right\}$$

Ορίζεται **σύνθετη** συνάρτηση μιας μεταβλητής $g(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

Η ολική παράγωγος της συνάρτησης g ως προς t είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Ανεξάρτητες μεταβλητές x, y

$$f = f(x, y) = xy$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

$$x = x(t) = \alpha \cos(\omega t)$$

$$y = y(t) = \alpha \sin(\omega t)$$

Ανεξάρτητη μεταβλητή t

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

Ορίζεται συνάρτηση $g = g(t) = f(x, y) = \alpha^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$

Ανεξάρτητη μεταβλητή t

Η ολική παράγωγος της g ως προς t είναι

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \mathbf{y} \frac{dx}{dt} + \mathbf{x} \frac{dy}{dt}$$

$$= \mathbf{\alpha \sin(\omega t)} \{-\alpha \omega \sin(\omega t)\} + \mathbf{\alpha \cos \omega t} \{\alpha \omega \cos(\omega t)\}$$

Εκφράζουμε τα πάντα ως προς t

$$\frac{dg(t)}{dt} = \alpha^2 \omega (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n είναι και αυτές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών y_1, y_2, \dots, y_m . Δηλαδή ισχύει

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x_1 = x_1(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad x_2 = x_2(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad \dots, \quad x_n = x_n(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Ανεξάρτητες μεταβλητές

Ορίζεται **σύνθετη** συνάρτηση πολλών μεταβλητών $g(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Η μερική παράγωγος της συνάρτησης g ως προς y_i είναι η εξής:

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} \equiv g_{y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

Επειδή η g είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών ορίζονται μερικές παράγωγοι ως προς κάθε μεταβλητή.

Παράδειγμα

Ανεξάρτητες μεταβλητές x, y

$$f = f(x, y) = xy$$

$$x = x(s, t) = s + t^2$$

$$y = y(s, t) = s + t \quad \text{Ανεξάρτητες μεταβλητές } s, t$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

$$x_1 = x$$

$$y_1 = s$$

$$x_2 = y$$

$$y_2 = t$$

Ανεξάρτητες μεταβλητές s, t

Ορίζεται σύνθετη συνάρτηση $g = g(s, t) = f(x, y) = (s + t^2)(s + t) = s^2 + st + st^2 + t^3$

Η μερική παράγωγος της g ως προς s είναι

Είναι μια νέα συνάρτηση με
ανεξάρτητες μεταβλητές s, t

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \mathbf{y} \frac{\partial x}{\partial s} + \mathbf{x} \frac{\partial y}{\partial s} = \mathbf{(s + t)}1 + \mathbf{(s + t^2)}1 = 2s + t + t^2$$

Η μερική παράγωγος της g ως προς t είναι

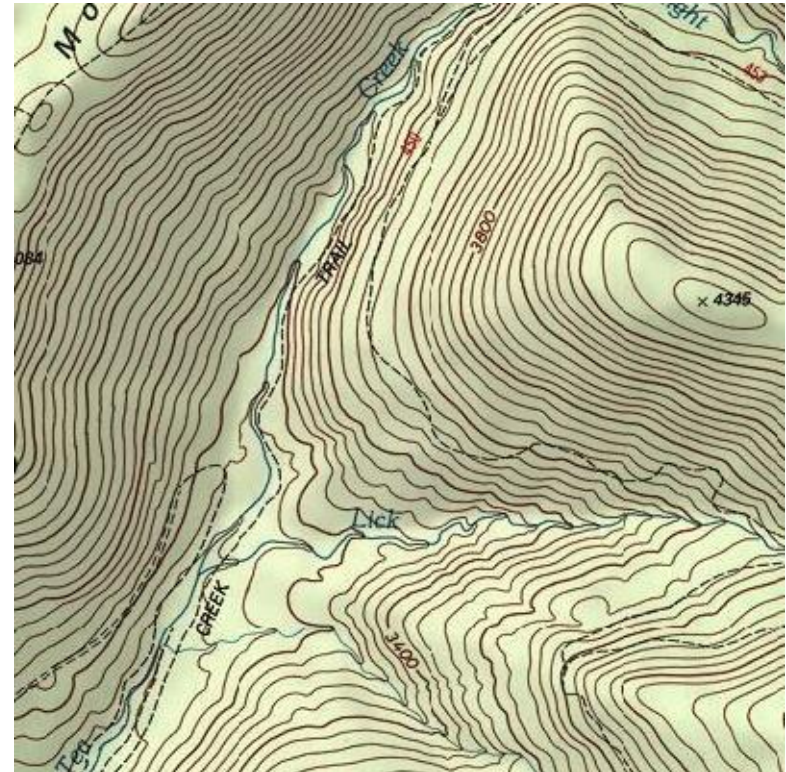
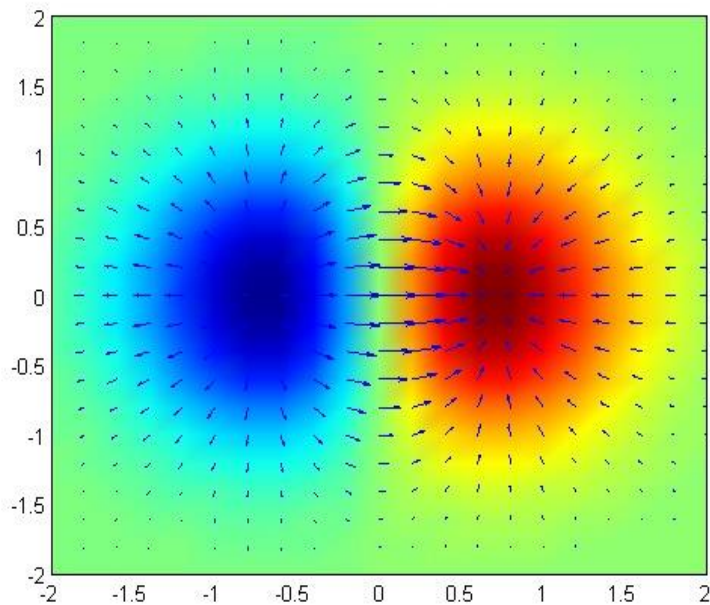
$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \mathbf{y} \frac{\partial x}{\partial t} + \mathbf{x} \frac{\partial y}{\partial t} = \mathbf{(s + t)}2t + \mathbf{(s + t^2)}1 = s + 2st + 3t^2$$

Βαθμίδα συνάρτησης

Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Η **βαθμίδα** (gradient) της συνάρτησης είναι **διανυσματικό μέγεθος** και ορίζεται ως εξής

Τελεστής Ανάδελτα ή Nabla

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

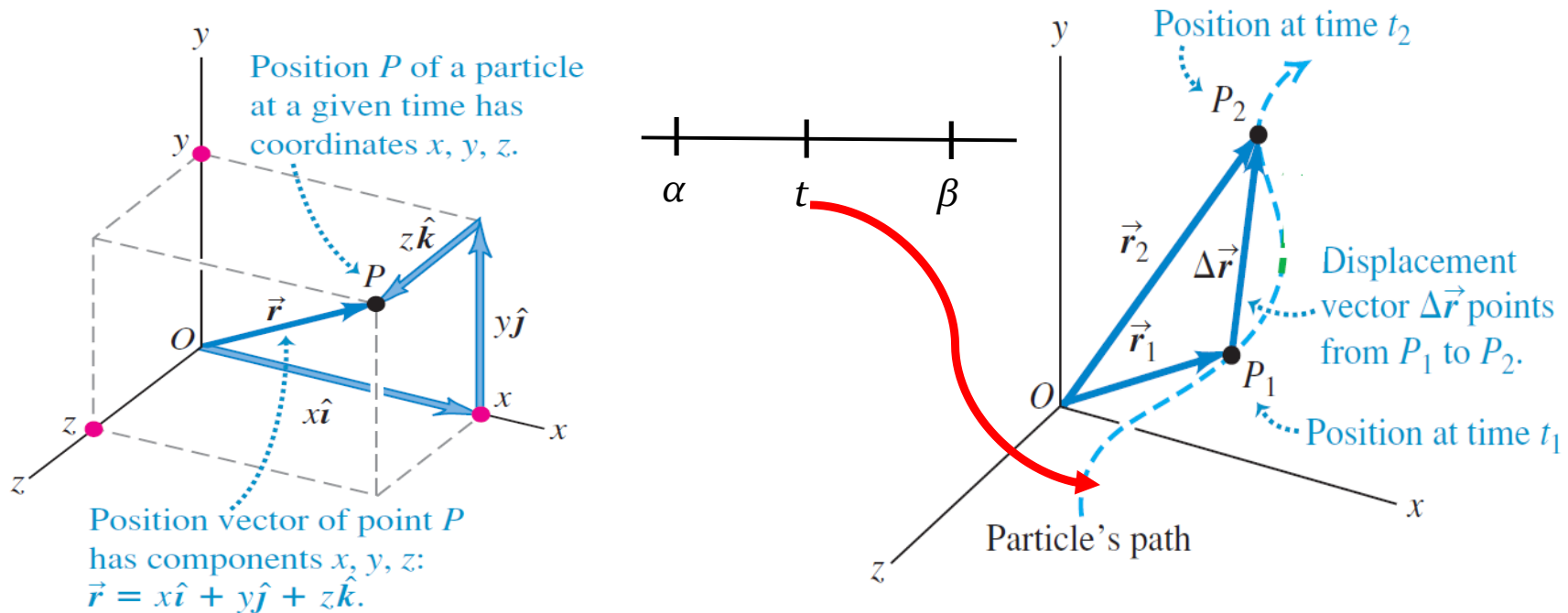


Το διάνυσμα της βαθμίδας είναι πάντα κάθετο στις επιφάνειες στις οποίες η συνάρτηση έχει σταθερή τιμή (2D: π.χ. ισοψείς σε τοπογραφικό χάρτη). Έχει κατεύθυνση προς τη μέγιστη αύξηση της συνάρτησης.

*Γ. Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης
μιας μεταβλητής*

Διανυσματική συνάρτηση : διάνυσμα θέσεως

Τέτοια είναι το **διάνυσμα θέσεως**, ένα δέσμιο διάνυσμα, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο, την τροχιά του σημείου.



$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$$

Οι συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος θέσεως είναι οι συντεταγμένες του κινητού. Είναι συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t .

Στιγμιαία ταχύτητα κινητού στο χώρο

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$$

Όπως στην περίπτωση κίνησης σε μια διάσταση, η **στιγμιαία ταχύτητα του κινητού** στο χώρο υπολογίζεται ως η παράγωγος της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{r}(t)$ ως προς t .

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t) \hat{i}) + \frac{d}{dt}(y(t) \hat{j}) + \frac{d}{dt}(z(t) \hat{k}) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + x(t) \frac{d\hat{i}}{dt} \\ &+ \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + y(t) \frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} + z(t) \frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} \end{aligned}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα είναι σταθερά, οπότε οι παράγωγοί τους είναι 0.

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Κάθε **συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας** ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της αντίστοιχης **συντεταγμένης του κινητού**.

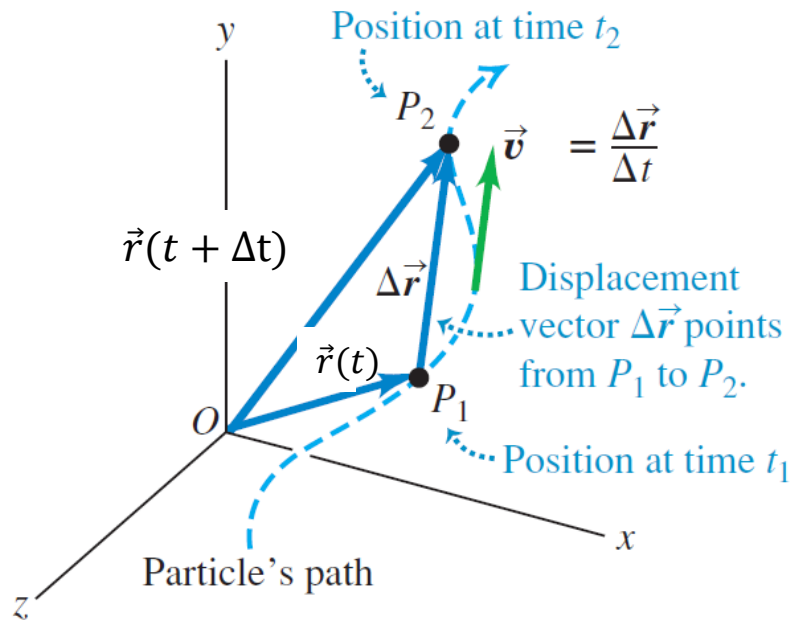
Το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας δίνεται από τη σχέση

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας εφάπτεται στην τροχιά

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού ισούται με το ρυθμό μεταβολής της θέσης του (η θέση ορίζεται με το \vec{r}). Η διαφορά με την κίνηση σε μια διάσταση είναι ότι τόσο η θέση \vec{r} όσο και η ταχύτητα \vec{v} ορίζονται με διανύσματα

$$\vec{P}_{12} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_{t+\Delta t} - \vec{r}_t \quad \text{Διάνυσμα μετατόπισης}$$



$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$* \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} // \Delta\vec{r}$$

Καθώς το Δt τείνει στο 0, τα σημεία P_1 και P_2 πλησιάζουν και το **διάνυσμα μετατόπισης $\Delta\vec{r}$** τείνει να εφάπτεται στην τροχιά. Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας είναι παράλληλο στο $\Delta\vec{r}$ *. **Επομένως σε κάθε σημείο της τροχιάς, το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας εφάπτεται στην τροχιά.**