ΕΝΟΤΗΤΑ 3 : ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Α. ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΥΛΗΣ : ΣΩΜΑΤΙΑ ΜΑΖΩΝ

Β. ΣΥΝΕΧΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΥΛΗΣ : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΜΑΖΑΣ

- Ευθύγραμμη κατανομή: Ομογενής & μη ομογενής
- Γραμμική κατανομή σε τόξο κύκλου

Γ. ΣΥΝΕΧΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΥΛΗΣ : ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΜΑΖΑΣ

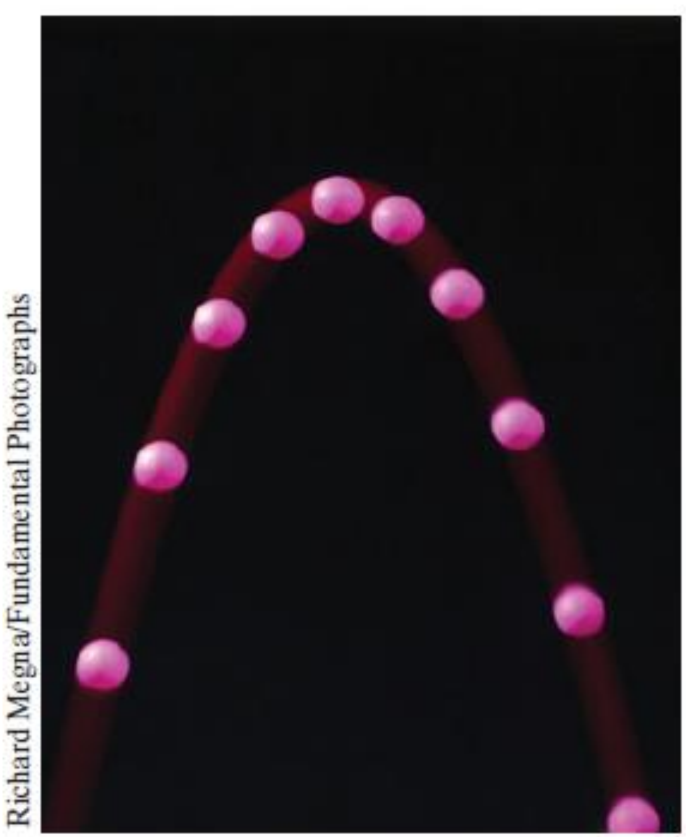
- Ημικυκλική στεφάνη
- Ημισφαιρική επιφάνεια

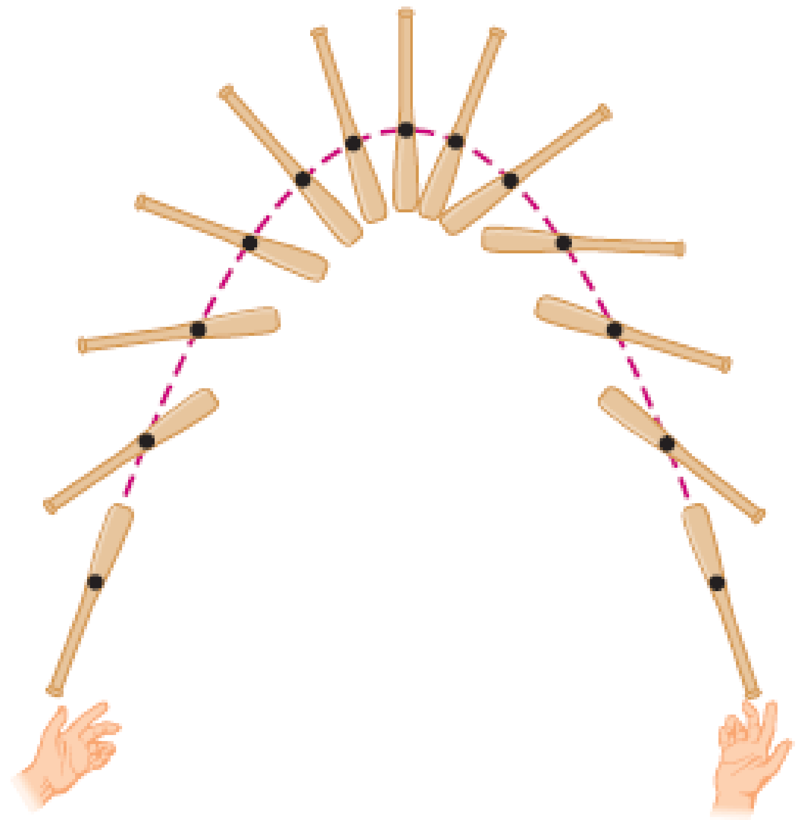
Δ. ΣΥΝΕΧΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΥΛΗΣ : ΧΩΡΙΚΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΜΑΖΑΣ

- Ημισφαίριο

Κέντρο Μάζας : Ορισμός

Ως **κέντρο μάζας** ενός **συστήματος σωματίων** (π.χ., ένας άνθρωπος) ορίζεται ως το σημείο του σαν α) όλη η μάζα του συστήματος να είναι συγκεντρώμενη εκεί και σαν β) όλες οι εξωτερικές δυνάμεις να εφαρμόζονται εκεί.

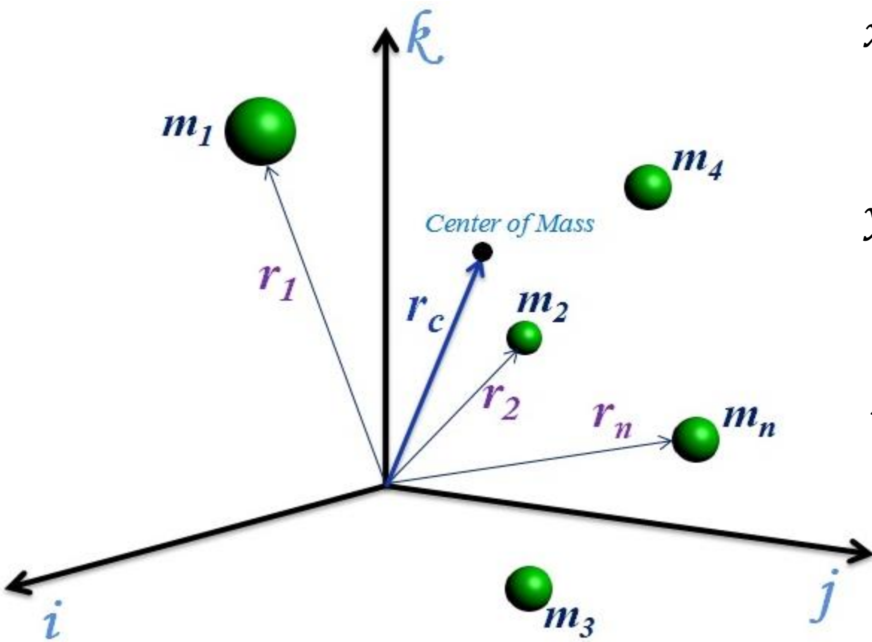




Χρήση: Διευκολύνει τη μελέτη της πιθανής κίνησης του συστήματος.

Κέντρο Μάζας : Σύστημα Ν σωματίων

Σύστημα n σωματίων (υλικών σημείων) τα οποία συγκεντρώνουν μάζες m_1, m_2, …., m_n στα σημεία με διανύσματα θέσεων $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, … , $\vec{r_n}$.



$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

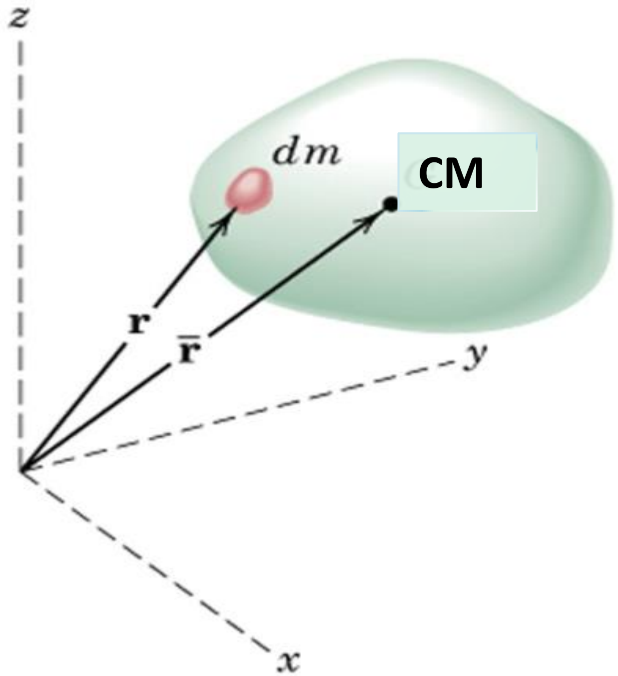
$$z_{CM} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{CM}} = \frac{m_1\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} + m_2\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} + \ldots + m_n\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{n}}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Κέντρο Μάζας : Στερεού Σώματος

Ένα σύνηθες στερεό σώμα περιέχει τόσο μεγάλο αριθμό σωματίων (ατόμων) ώστε θεωρούμε **συνεχή κατανομή ύλης**. Στις εξισώσεις τα “σωμάτια” αντικαθίστανται από στοιχεία μεγέθους μάζας *dm* ενώ τα αθροίσματα αντικαθίστανται από ολοκληρώματα.

$dm=\rho dV$ $\qquad M=\rho V$



$$x_{CM} = \frac{\int_M x dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M x dm}{M} = \frac{\int_V x\, \rho\, dV}{\rho\, V}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_M y dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M y dm}{M} = \frac{\int_V y\, \rho\, dV}{\rho\, V}$$

$$z_{CM} = \frac{\int_M z dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M z dm}{M} = \frac{\int_V z\, \rho\, dV}{\rho\, V}$$

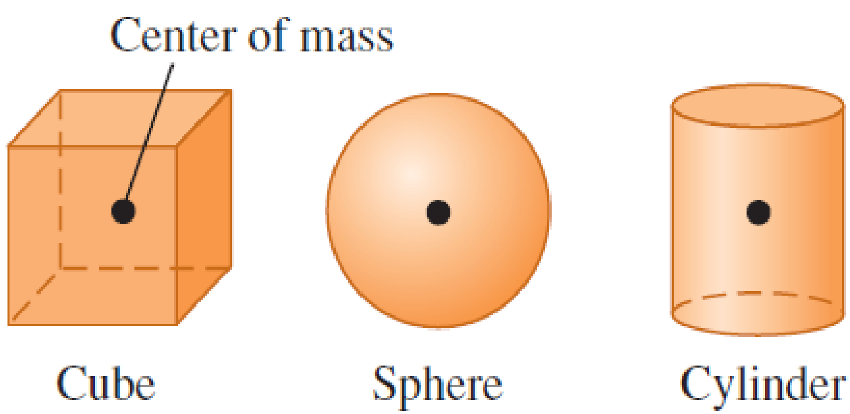
Ομογενές στερεό σώμα με ρ=σταθερό

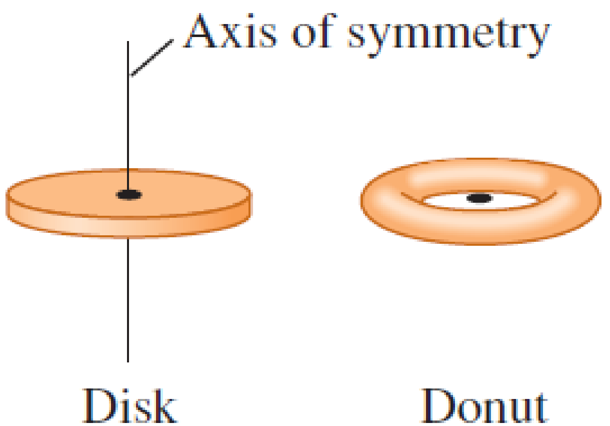
$$x_{CM} = \frac{\int_V x\, dV}{V} \qquad y_{CM} = \frac{\int_V y\, dV}{V} \qquad z_{CM} = \frac{\int_V z\, dV}{V}$$

Απλούστευση λόγω Γεωμετρικής συμμετρίας

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων είναι πολύπλοκος για σώματα με τυχαίο σχήμα.
Η παρουσία **γεωμετρικής συμμετρίας** σε **ομογενές** σώμα διευκολύνει τον υπολογισμό.

$$x_{CM} = \frac{\int_V x\, dV}{V} \qquad y_{CM} = \frac{\int_V y\, dV}{V} \qquad z_{CM} = \frac{\int_V z\, dV}{V}$$



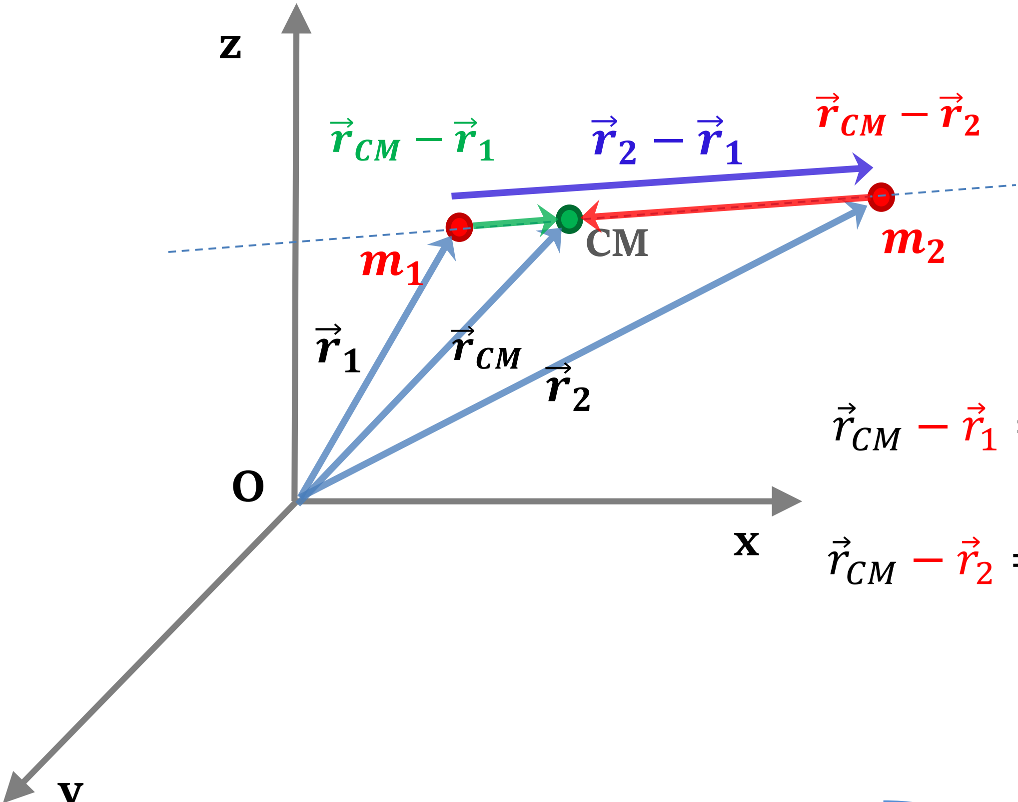


Αν υπάρχει γεωμετρικό κέντρο σε ένα ομογενές σώμα τότε συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

Αν υπάρχει άξονας συμμετρίας σε ένα σώμα τότε το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω σε αυτόν.

Ενδέχεται το κέντρο μάζας να βρίσκεται εκτός του σώματος (πχ κουλούρι).

Α. Σύστημα δύο σωματίων



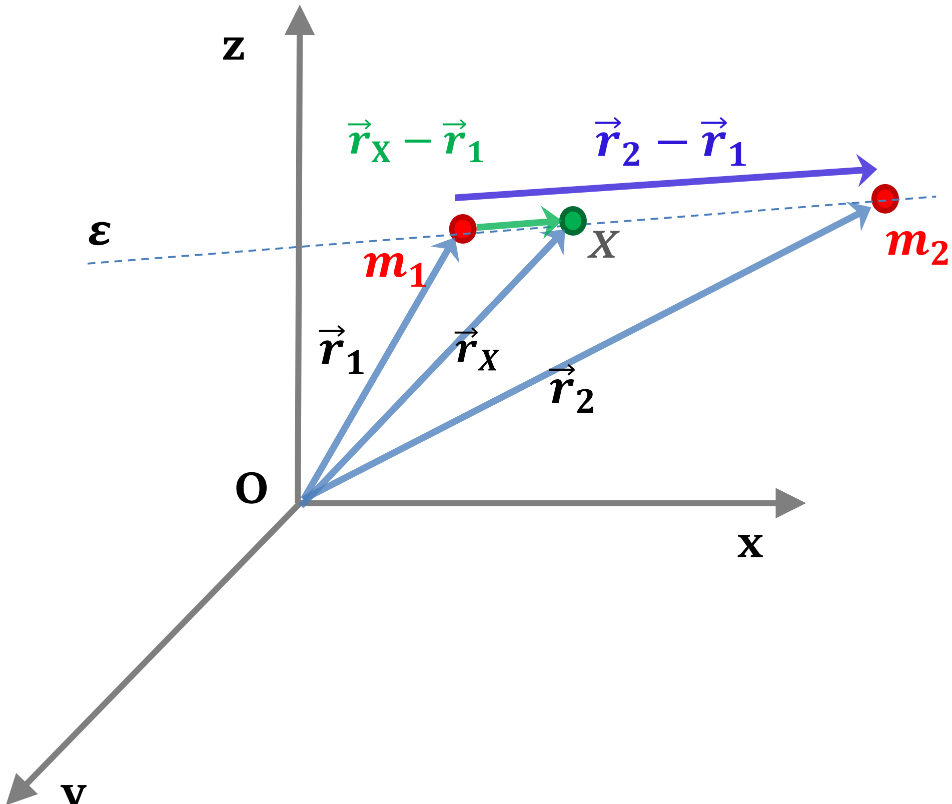
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}_{CM} - \vec{r}_1 &= \left(\frac{m_1}{M} - 1\right)\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 = \frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
\vec{r}_{CM} - \vec{r}_2 &= \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \left(\frac{m_2}{M} - 1\right)\vec{r}_2 = \frac{m_1}{M}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_1| &= \frac{m_2}{M}|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \\
|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_2| &= \frac{m_1}{M}|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|
\end{aligned}\right\} \qquad \frac{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_1|}{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Α. Σύστημα δύο σωματίων

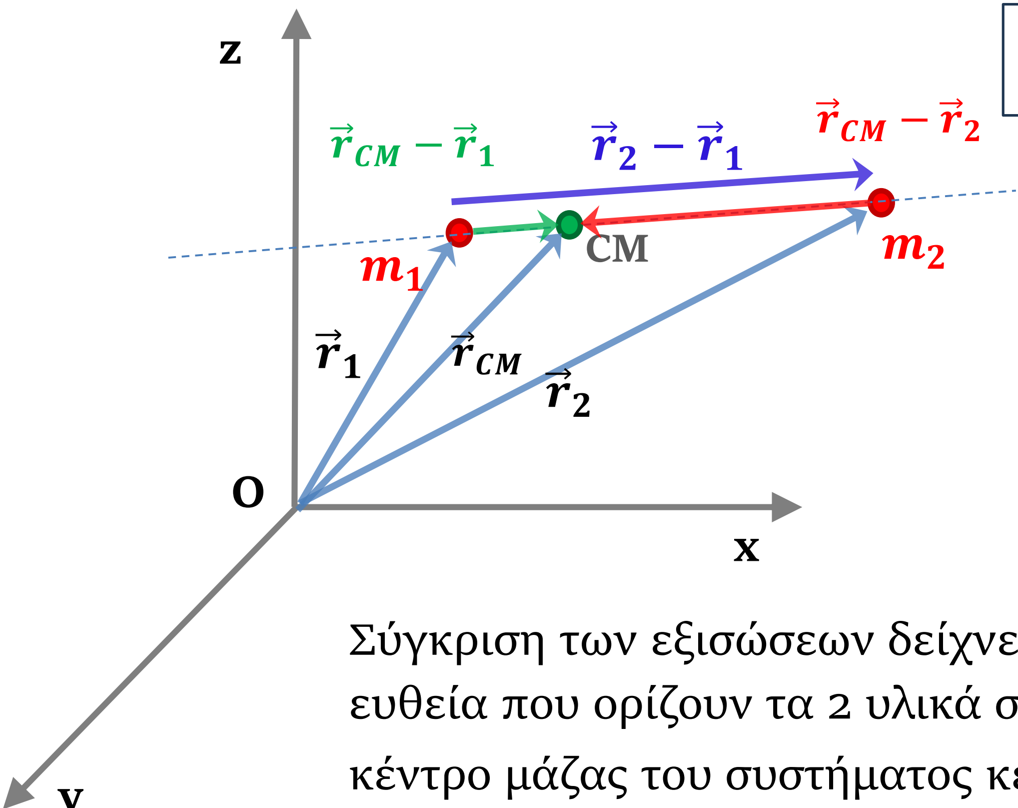


Τα σημεία όπου βρίσκονται οι μάζες m_1 & m_2 ορίζουν ευθεία ε. Κάθε σημείο που κείται σε αυτήν χαρακτηρίζεται από διάνυσμα θέσεως $\vec{r} = \vec{r}_X$.

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_X = \vec{\boldsymbol{r}}_1 + \boldsymbol{\lambda}(\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1)}$$

$\boldsymbol{\lambda < 0}$: Το σημείο κείται αριστερά της μάζας m_1.
$\boldsymbol{\lambda = 0}$: Η θέση του σημείου συμπίπτει με αυτή της μάζας m_1.
$\boldsymbol{0 < \lambda < 1}$: Το σημείο κείται μεταξύ των μαζών m_1 & m_2.
$\boldsymbol{\lambda = 1}$: Η θέση του σημείου συμπίπτει με αυτή της μάζας m_2.
$\boldsymbol{\lambda > 1}$: Το σημείο κείται δεξιά της μάζας m_2.

Α. Σύστημα δύο σωματίων



$$* \frac{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_1|}{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\vec{r}_{CM} - \vec{r}_1 = \frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

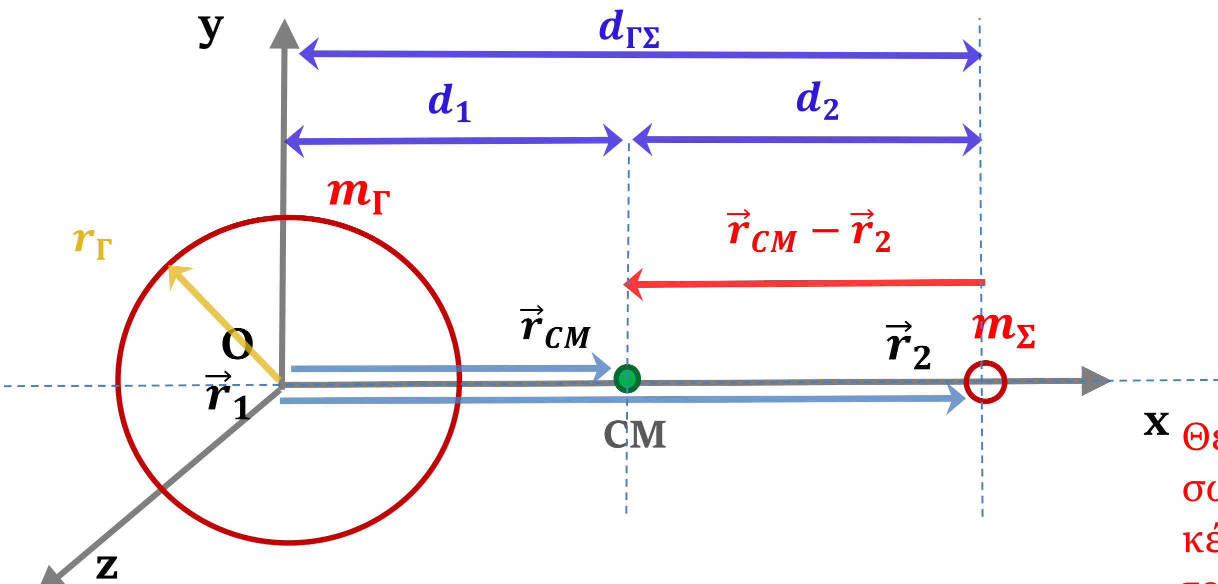
$$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Σύγκριση των εξισώσεων δείχνει ότι το κέντρο μάζας ανήκει στην ευθεία που ορίζουν τα 2 υλικά σημεία. Επειδή 0$< \lambda = \frac{m_2}{M} < 1$ το κέντρο μάζας του συστήματος κείται μεταξύ των μαζών m_1 & m_2 και πιο κοντά στην μεγαλύτερη μάζα*.

Το κέντρο μάζας του συστήματος δύο μαζών m_1 & m_2 κείται στην ευθεία η οποία τις συνδέει και απέχει από αυτές αποστάσεις αντιστρόφως ανάλογες πρός τις μάζες.

Κέντρο μάζας συστήματος Γης - Σελήνης

Πόσο απέχει το κέντρο μάζας του συστήματος Γης – Σελήνης από το κέντρο της Γής;



$$m_\Sigma = 0{,}013\, m_\Gamma$$

$$d_{\Gamma\Sigma} = 60\, r_\Gamma$$

$$r_\Gamma = 6.500 \;\; km$$

Θεώρηση πως η μάζα των 2 σωμάτων είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο τους. Αρχή των αξόνων O τοποθετείται στο κέντρο της Γης.

$$\frac{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_1|}{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_2|} = \frac{|\vec{r}_{\mathrm{CM}}|}{|\vec{r}_{CM} - \vec{r}_2|} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{m_\Sigma}{m_\Gamma} \Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{m_\Gamma}{m_\Sigma}$$

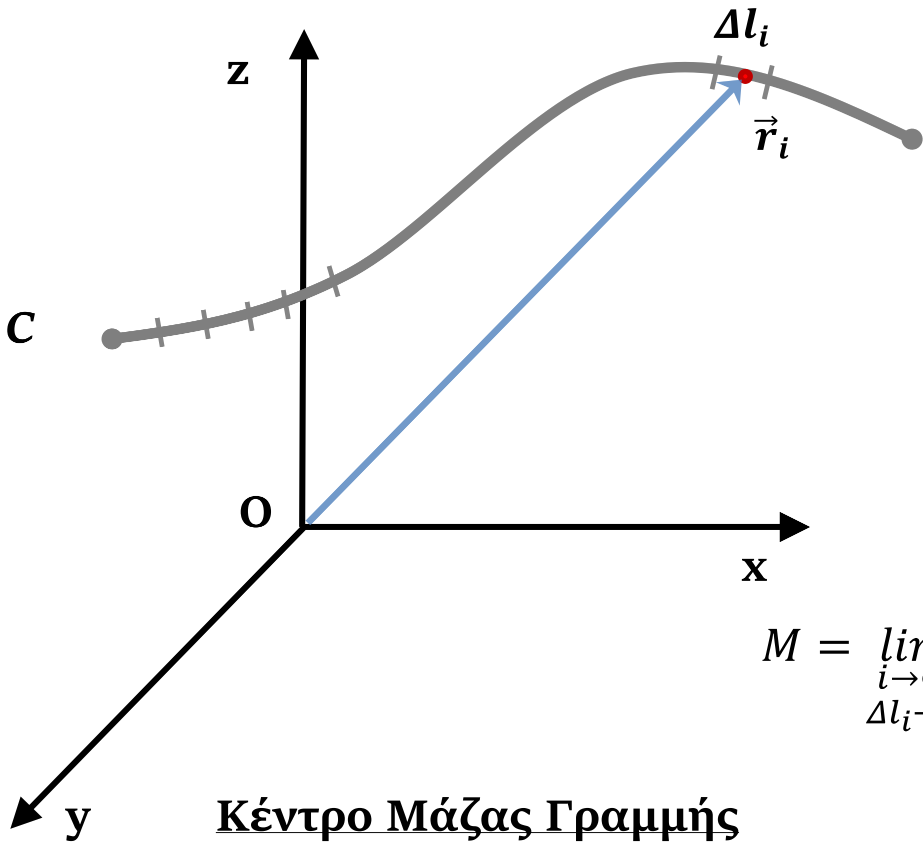
$$\Leftrightarrow \frac{d_2}{d_1} + 1 = \frac{m_\Gamma}{m_\Sigma} + 1 \Leftrightarrow \frac{d_1 + d_2}{d_1} = \frac{m_\Sigma + m_\Gamma}{m_\Sigma} \Leftrightarrow d_1 = d_{\Gamma\Sigma} \frac{m_\Sigma}{m_\Gamma + m_\Sigma}$$

$$\Leftrightarrow d_1 = (60 r_\Gamma) \frac{m_\Sigma}{m_\Gamma} \frac{1}{1 + \frac{m_\Sigma}{m_\Gamma}} = 60 \cdot 0.013 \;\; \frac{1}{1.013}\, r_\Gamma = \frac{0{,}78}{1{,}013} r_\Gamma$$

< 1

Το κέντρο μάζας βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια της Γης.

Β. Γραμμική πυκνότητα



$\boldsymbol{\Delta l_i}$: Μήκος στοιχειώδους τμήματος της Γραμμής C.

$\boldsymbol{\Delta m}$: Μάζα στοιχειώδους τμήματος Δl_i

$$\boldsymbol{\Delta m = \rho(\vec{r}_i)\, \Delta l_i \equiv \lambda(\vec{r}_i)\, \Delta l_i}$$

$\boldsymbol{\rho(\vec{r}_i)}$: Γραμμική πυκνότητα μάζας ($Μάζα/Μήκος$).

Εάν $\Delta l_i \rightarrow 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \rho(\vec{r}\,)\, dl}$.

Ολική Μάζα Γραμμής

$$M = \lim_{\substack{i\to\infty \\ \Delta l_i \to 0}} \Big(\sum_i \Delta m_i\Big) = \lim_{\substack{i\to\infty \\ \Delta l_i \to 0}} \Big(\sum_i \rho(\vec{r}_i)\Delta l_i\Big) = \int_C \rho(\vec{r})dl$$

Κέντρο Μάζας Γραμμής

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \lim_{\substack{i\to\infty \\ \Delta l_i \to 0}} \Big(\sum_i \vec{r}_i\, \rho(\vec{r}_i)\, \Delta l_i\Big) = \frac{1}{M}\int_C \vec{r}\rho(\vec{r})dl$$

$$x_{CM} = \frac{\int_M x dm}{M} = \frac{\int_C x\rho(\vec{r})dl}{M}$$

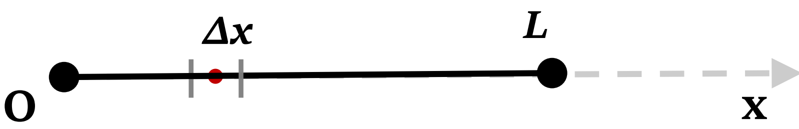
$$y_{CM} = \frac{\int_M y dm}{M} = \frac{\int_C y\rho(\vec{r})dl}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{\int_M z dm}{M} = \frac{\int_C z\rho(\vec{r})dl}{M}$$

Όπου $\vec{r} = x\boldsymbol{\hat{\imath}} + y\boldsymbol{\hat{\jmath}} + z\boldsymbol{\hat{k}} = (x, y, z)$

B1. Ευθύγραμμη κατανομή

Λεπτή ράβδος μήκους L



Όπου $\vec{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 0\widehat{\boldsymbol{k}} = (x, 0, 0)$

$\boldsymbol{\Delta x}$: Μήκος στοιχειώδους τμήματος.

$\boldsymbol{\Delta m = \rho(x)\ \Delta x}$

$\boldsymbol{\rho(x)}$: Μεταβάλλεται κατά μήκος της γραμμής μήκους L.

Εάν $\Delta x \to 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \rho(x)\ dx}$.

Ολική Μάζα

$$M = \int_C \rho(\vec{r})dl = \int_0^L \rho(x)dx$$

$$dl = dx$$

Επειδή τεμαχίζουμε τη ράβδο μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονα x.

$$\rho(\vec{r}) = \rho(x)$$

Επειδή το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ και άρα και η πυκνότητα εξαρτάται μόνο από την τιμή του x

Κέντρο Μάζας

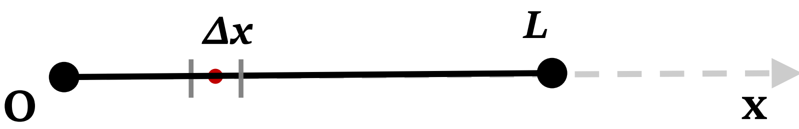
$$x_{CM} = \frac{\int_C x\rho(x)dx}{M} = \frac{\int_0^L x\rho(x)dx}{M}$$

$$y_{CM} = 0$$

$$z_{CM} = 0$$

B1i). Ευθύγραμμη κατανομή

Λεπτή **ομογενής** ράβδος μήκους L



Όπου $\vec{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 0\widehat{\boldsymbol{k}} = (x, 0, 0)$

$\boldsymbol{\Delta x}$: Μήκος στοιχειώδους τμήματος.

$\boldsymbol{\Delta m = \rho(x)\, \Delta x}$

$\boldsymbol{\rho(x)}$: Μεταβάλλεται κατά μήκος της γραμμής μήκους L.

Εάν $\Delta x \to 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \rho(x)\, dx}$.

Ολική Μάζα

$$M = \int_C \rho(\vec{r}) dl = \int_0^L \rho(x) dx$$

Κέντρο Μάζας

$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x\rho(x)dx}{M} \qquad y_{CM} = 0 \qquad z_{CM} = 0$$

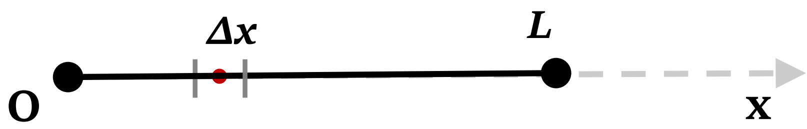
i) Σταθερή πυκνότητα ρ(x) = $\boldsymbol{\rho_o}$ (ομογενής)

$$M = \int_0^L \rho_0 dx = \rho_0(L - 0) = \rho_0 L$$

$$\boldsymbol{x_{CM}} = \frac{1}{M}\int_0^L x\, \rho_0\, dx = \frac{\rho_0}{\rho_0 L}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^L = \boldsymbol{\frac{L}{2}} \qquad y_{CM} = 0 \qquad z_{CM} = 0$$

Το κέντρο μάζας της λεπτού ομογενούς ράβδου βρίσκεται στο γεωμετρικό κέντρο της δηλαδή στη μέση.

B1ii). Ευθύγραμμη κατανομή



Όπου $\vec{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 0\widehat{\boldsymbol{k}} = (x, 0, 0)$

$\boldsymbol{\Delta x}$: Μήκος στοιχειώδους τμήματος.

$\boldsymbol{\Delta m = \rho(x)\ \Delta x}$

$\boldsymbol{\rho(x)}$: Μεταβάλλεται κατά μήκος της γραμμής μήκους L.

Εάν $\Delta x \to 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \rho(x)\ dx}$.

Ολική Μάζα

$$M = \int_C \rho(\vec{r})dl = \int_0^L \rho(x)dx$$

Κέντρο Μάζας

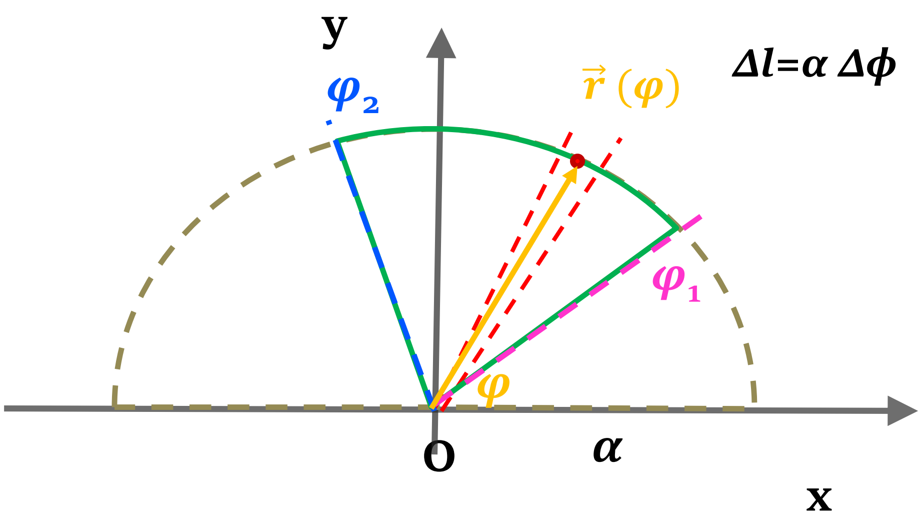
$$x_{CM} = \frac{\int_C x\rho(x)dx}{M} \qquad y_{CM} = 0 \qquad z_{CM} = 0$$

ii) Μεταβλητή πυκνότητα $\boldsymbol{\rho(x) = \rho_0(1 + \frac{x}{L})}$

$$M = \int_0^L \rho_0(1 + \frac{x}{L})dx = \rho_0 \int_0^L dx + \frac{\rho_0}{L}\int_0^L x dx = \rho_0(L + \frac{L}{2}) = \frac{3}{2}\rho_0 L$$

$$\boldsymbol{x_{CM}} = \frac{1}{M}(\int_0^L x\rho_0\left(1 + \frac{x}{L}\right) dx) = \frac{1}{M}(\rho_0\int_0^L x dx) + \frac{1}{M}\frac{\rho_0}{L}(\int_0^L x^2 dx) = \boldsymbol{\frac{5}{9}L} \qquad y_{CM} = 0 \quad z_{CM} = 0$$

B2. Καμπυλωτή κατανομή (τόξο κύκλου)



Λυγίζουμε λεπτή ράβδο σε σχήμα τόξου κύκλου ακτίνας α.

$\boldsymbol{\Delta l}$: Μήκος στοιχειώδους τμήματος.
$\boldsymbol{\alpha}$: Ακτίνα κύκλου

$$\boldsymbol{\Delta m = \rho(\varphi)\,\Delta l = \rho(\varphi)\,\alpha\,\Delta\varphi}$$

$\boldsymbol{\rho = \rho(\varphi)}$: Γραμμική πυκνότητα μάζας. Μεταβάλλεται κατά μήκους τόξου.

Εάν $\Delta l \to 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \rho(\varphi)\,\alpha\,d}\varphi$.

Η γεωμετρία του προβλήματος επιτρέπει τη χρήση **πολικών συντεταγμένων** για να γραφουμε το διάνυσμα θέσεως της στοιχειώδους μάζας dm:

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi) = acos\varphi\boldsymbol{\hat{\imath}} + \alpha sin\varphi\boldsymbol{\hat{\jmath}}$$

Διάνυσμα θέσης συνάρτηση <u>μόνο</u> ϕ.

(Θεωρούμε το τόξο κύκλου στο επίπεδο Oxy με το κέντρο στην αρχή των αξόνων.).

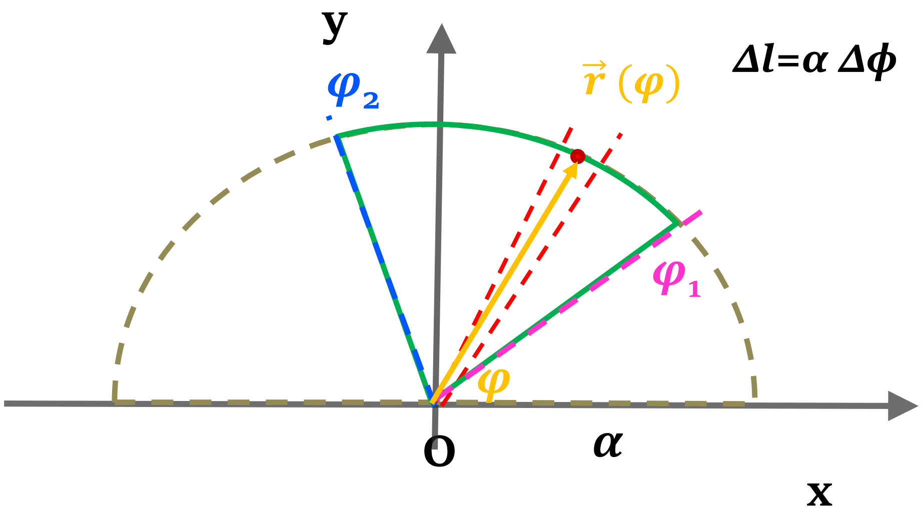
<u>Ολική Μάζα</u>

$$M = \int_{\tau\acute{o}\xi o} dm = \alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) d\varphi$$

<u>Κέντρο Μάζας</u>

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\tau\acute{o}\xi o} \vec{r} dm = \frac{a}{M} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{r}(\varphi)\rho(\varphi) d\varphi$$

B2. Καμπυλωτή κατανομή (τόξο κύκλου)



Λυγίζουμε λεπτή ράβδο σε σχήμα τόξου κύκλου ακτίνας α.

$\boldsymbol{\Delta l}$: Μήκος στοιχειώδους τμήματος.
$\boldsymbol{\alpha}$: Ακτίνα κύκλου

$$\boldsymbol{\Delta m = \rho(\varphi)\,\Delta l = \rho(\varphi)\,\alpha\,\Delta\varphi}$$

$\boldsymbol{\rho = \rho(\varphi)}$: Γραμμική πυκνότητα μάζας. Μεταβάλλεται κατά μήκους τόξου.

Εάν $\Delta l \to 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \rho(\varphi)\,\alpha\, d}\varphi$.

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi) = a cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \alpha sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (\boldsymbol{\alpha cos\varphi}, \boldsymbol{\alpha sin\varphi})$$

Ολική Μάζα

$$M = \int_{\tau\acute{o}\xi o} \rho(\vec{r})dl = \alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)d\varphi$$

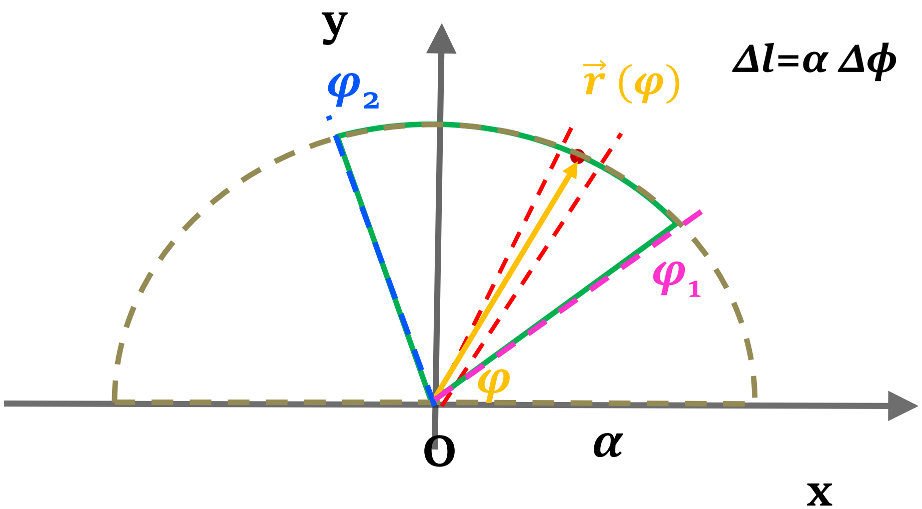
Κέντρο Μάζας

$$x_{CM} = \frac{\int_M \boldsymbol{x} dm}{M} = \frac{\alpha^2}{M}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)cos\varphi\, d\varphi$$

$$y_{CM} = \frac{\int_M \boldsymbol{y} dm}{M} = \frac{\alpha^2}{M}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)sin\varphi\, d\varphi$$

$$z_{CM} = 0$$

B2i. Καμπυλωτή κατανομή (τόξο κύκλου)



$\boldsymbol{\Delta l}$: Μήκος στοιχειώδους τμήματος.
$\boldsymbol{\alpha}$: Ακτίνα κύκλου

$\boldsymbol{\Delta m = \rho(\varphi)\, \Delta l = \rho(\varphi)\, \alpha\, \Delta\varphi}$

$\boldsymbol{\rho = \rho(\varphi)}$: Γραμμική πυκνότητα μάζας.
Μεταβάλλεται κατά μήκους τόξου.

Εάν $\Delta l \to 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \rho(\varphi)\, \alpha\, d}\varphi$.

i) Σταθερή πυκνότητα ρ(φ) = ρ_o (ομογενής)

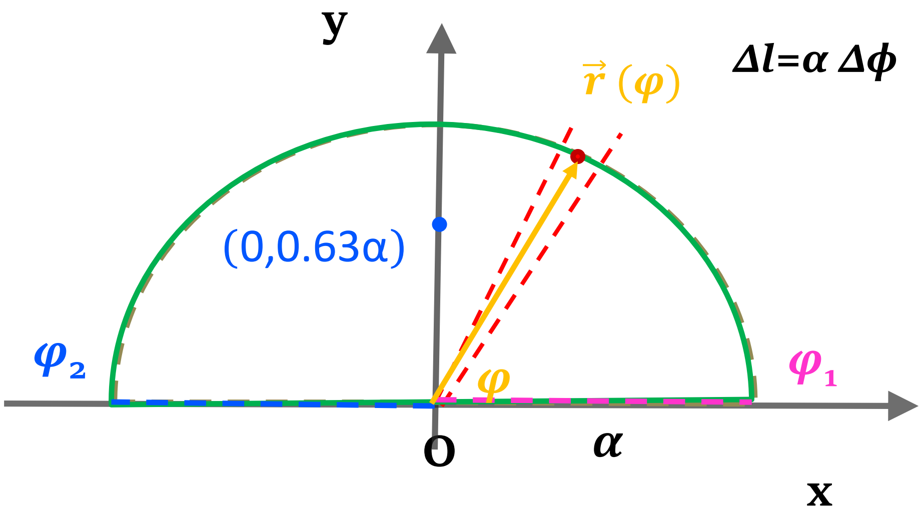
$$M = \alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) d\varphi = \alpha\rho_0[\varphi_2 - \varphi_1]$$

$$x_{CM} = \frac{\alpha^2}{M} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho_0 cos\varphi\; d\varphi = \frac{\alpha}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} cos\varphi\; d\varphi = \frac{\alpha(sin\varphi_2 - sin\varphi_1)}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

$$y_{CM} = \frac{\alpha^2}{M} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho_0 sin\varphi\; d\varphi = \frac{\alpha}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} sin\varphi\; d\varphi = \frac{-\alpha\,(cos\varphi_2 - cos\varphi_1)}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

$$z_{CM} = 0$$

B2i. Καμπυλωτή κατανομή (Ημικύκλιο)



Παράδειγμα Ημικυκλίου

$$\boldsymbol{\varphi_1 = 0}$$

$$\boldsymbol{\varphi_2 = \pi}$$

i) Σταθερή πυκνότητα ρ(φ) = ρ_o (ομογενής)

$$M = \alpha\rho_0[\varphi_2 - \varphi_1] = \alpha\rho_0\pi$$

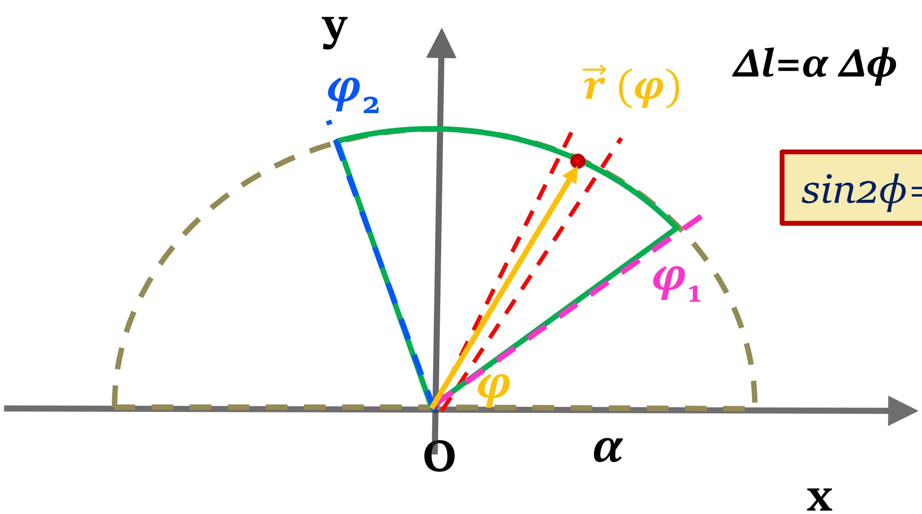
$$x_{CM} = \frac{\alpha(sin\varphi_2 - sin\varphi_1)}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\alpha(0-0)}{\pi - 0} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{-\alpha\,(cos\varphi_2 - cos\varphi_1)}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{-\alpha(-1-1)}{\pi\ - 0} = \frac{2\,\alpha}{\pi}$$

$$z_{CM} = 0$$

Το κέντρο μάζας του τόξου βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρία του σώματος αλλά εκτός του τόξου.

B2i. Καμπυλωτή κατανομή (τόξο κύκλου)



$\Delta l=\alpha\,\Delta\phi$

$sin2\phi=2sin\phi cos\phi$

$$M=\alpha\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)d\varphi$$

$$x_{CM}=\frac{\alpha^2}{M}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)cos\varphi\,d\varphi$$

$h(\phi)=cos(2\phi)=f(g(\phi))$
$f(y)=cosy$
$y=g(\phi)=2\phi$

$$\frac{dh}{d\varphi}=\frac{df}{dy}\frac{dy}{d\varphi}$$

$$\frac{d}{d\varphi}(cos2\varphi)=\frac{df}{dy}\frac{dy}{d\varphi}=-2\,sin2\varphi$$

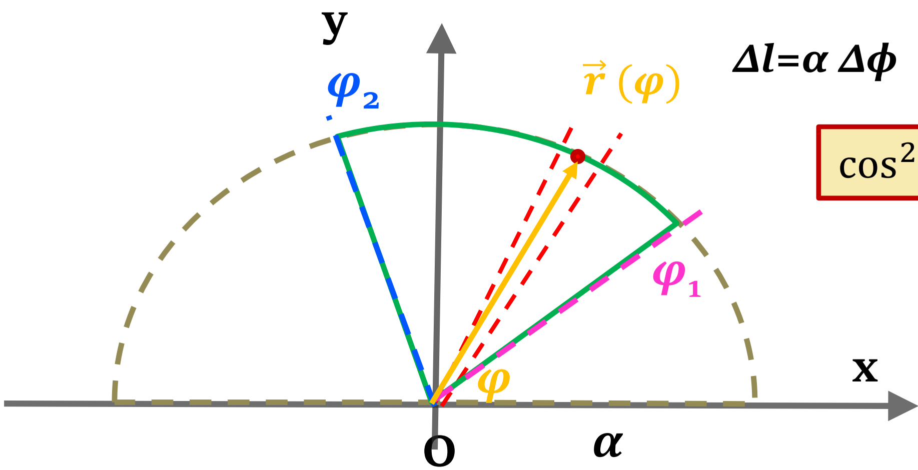
ii) Μεταβλητή πυκνότητα $\rho(\varphi)=\rho_0 sin\varphi,\ (0\le\varphi\le\pi)$

$$M=\alpha\rho_o\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}sin\varphi d\varphi=-\alpha\rho_0\,[cos\varphi_2-cos\varphi_1]$$

$$x_{CM}=\frac{\alpha^2\rho_0}{M}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}sin\varphi\,cos\varphi\,d\varphi=\frac{\alpha^2\rho_0}{M}\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}sin2\varphi\,d\varphi=\frac{-\alpha^2\rho_0}{4M}[cos(2\varphi)]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$=\frac{-\alpha^2\rho_0}{-4\alpha\rho_0\,[cos\varphi_2-cos\varphi_1]}(cos2\varphi_2-cos2\varphi_1)=\frac{\alpha(cos2\varphi_2-cos2\varphi_1)}{4(cos\varphi_2-cos\varphi_1)}$$

B2i. Καμπυλωτή κατανομή (τόξο κύκλου)



$\Delta l = \alpha\, \Delta\phi$

$$\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$$

$$y_{CM} = \frac{\alpha^2}{M}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) sin\varphi\, d\varphi$$

$$z_{CM} = 0$$

$$\cos(\gamma+\delta) = cos\gamma \cdot cos\delta\ - sin\gamma \cdot sin\delta$$

$$\cos\,2\omega = \cos^2\omega\ - \sin^2\omega = 1 - 2\sin^2\omega$$

$$\Rightarrow\ \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos\,2\varphi)$$

ii) Μεταβλητή πυκνότητα $\rho(\varphi) = \rho_0 sin\varphi,\ (0 \le \varphi \le \pi)$

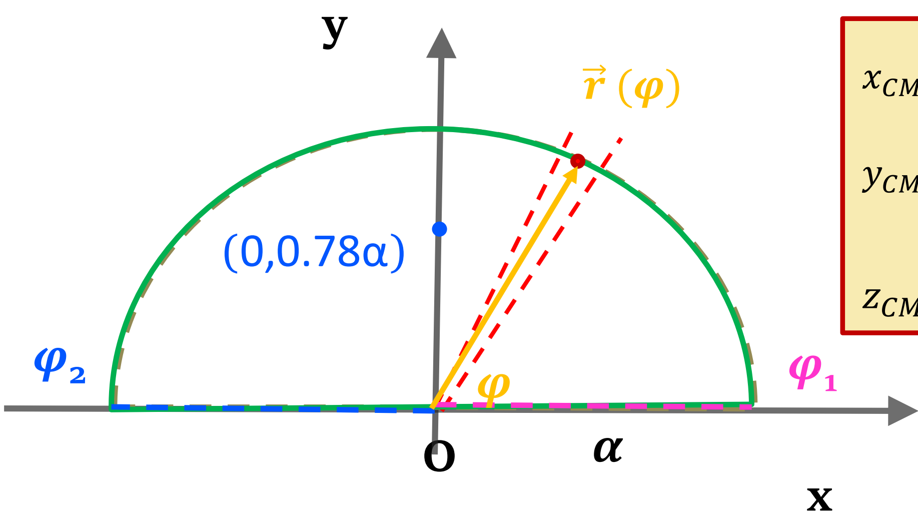
$$M = -\alpha\rho_0\,[cos\varphi_2 - cos\varphi_1]$$

$$y_{CM} = \frac{\alpha^2\rho_0}{\mathrm{M}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\alpha^2\rho_0}{\mathrm{M}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}(1-cos2\varphi)d\varphi = \frac{\alpha^2\rho_0}{\mathrm{M}}\left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{1}{2}d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{1}{2}cos2\varphi d\varphi\right)$$

$$= \frac{\alpha^2\rho_0}{\mathrm{M}}\left[\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{1}{4}(sin2\varphi_2 - sin2\varphi_1)\right]$$

$$= \frac{\alpha}{2(cos\varphi_1 - cos\varphi_2)}\left[(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{1}{2}(sin2\varphi_2 - sin2\varphi_1)\right].$$

B2i. Καμπυλωτή κατανομή (Ημικύκλιο)



$$x_{CM} = \frac{\alpha(cos2\varphi_2 - cos2\varphi_1)}{4(cos\varphi_2 - cos\varphi_1)}$$

$$y_{CM} = \frac{\alpha}{2(cos\varphi_1 - cos\varphi_2)}\left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2}(sin2\varphi_2 - sin2\varphi_1)\right]$$

$$z_{CM} = 0 \qquad M = -\alpha\rho_0\,[cos\varphi_2 - cos\varphi_1]$$

ii) Μεταβλητή πυκνότητα $\rho(\varphi) = \rho_0 sin\varphi$, $(0 \leq \varphi \leq \pi)$

<u>**Παράδειγμα Ημικυκλίου**</u> $\qquad \boldsymbol{\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \pi}$

$$M = -\alpha\rho_0\,[cos\varphi_2 - cos\varphi_1] = -\alpha\rho_0\,[cos\pi - cos0] = 2\alpha\rho_0$$

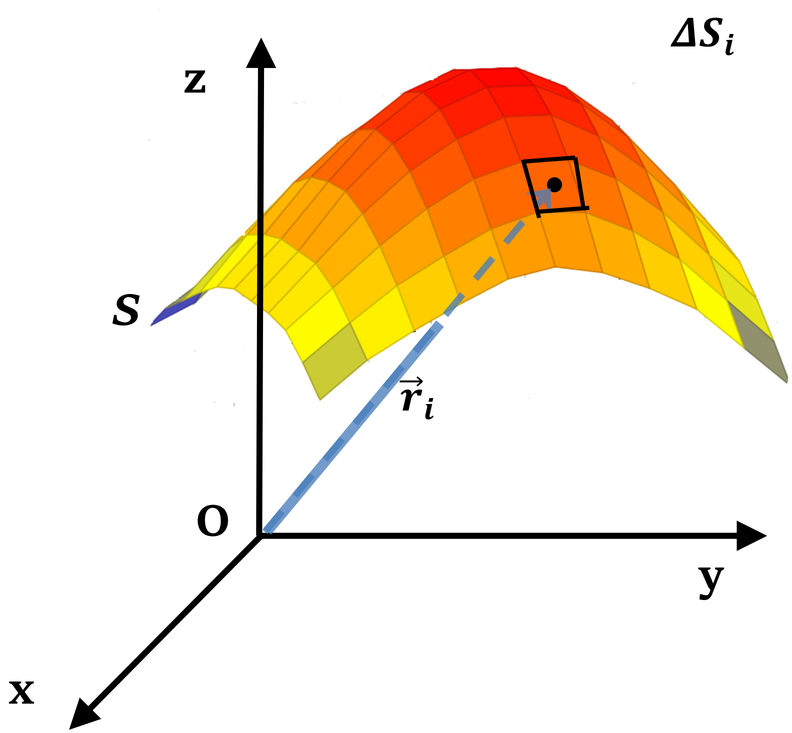
$$x_{CM} = \frac{\alpha(1-1)}{-8} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{\alpha}{2(1+1)}\left[(\pi - 0) - \frac{1}{2}(0-0)\right] = \frac{\alpha\pi}{4}$$

$$z_{CM} = 0$$

Το κέντρο μάζας του τόξου βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας του σώματος αλλά εκτός του τόξου.

Γ. Επιφανειακή πυκνότητα



$\boldsymbol{\Delta S_i}$: Εμβαδόν στοιχειώδους στοιχείου της λεπτής επιφάνειας S (μεμβράνη).

$\boldsymbol{\Delta m}$: Μάζα στοιχειώδους στοιχείου ΔS_i

$$\boldsymbol{\Delta m = \sigma(\vec{r}_i)\,\Delta S_i}$$

$\boldsymbol{\sigma(\vec{r}_i)}$: Επιφανειακή πυκνότητα μάζας (*Μάζα/Εμβαδόν*).

Εάν $\Delta S_i \rightarrow 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \sigma(\vec{r}\,)\, dS}$.

Ολική Μάζα Επιφανείας

$$M = \lim_{\substack{i\to\infty \\ \Delta S_i\to 0}} \left(\sum_i \sigma(\vec{r}_i)\Delta S_i\right) = \int_S \sigma(\vec{r})dS$$

Κέντρο Μάζας Επιφανείας

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \lim_{\substack{i\to\infty \\ \Delta S_i\to 0}} \left(\sum_i \vec{r}_i\, \sigma(\vec{r}_i)\, \Delta S_i\right) = \frac{1}{M}\int_S \vec{r}\sigma(\vec{r})dS$$

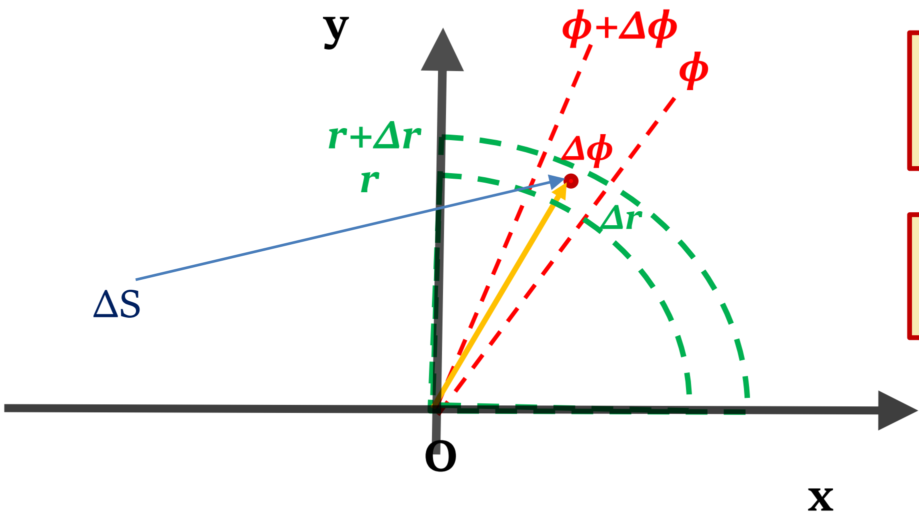
Όπου $\vec{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}} = (x, y, z)$

$$x_{CM} = \frac{\int_M xdm}{M} = \frac{\int_S x\sigma(\vec{r})dS}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_M ydm}{M} = \frac{\int_S y\sigma(\vec{r})dS}{M}$$

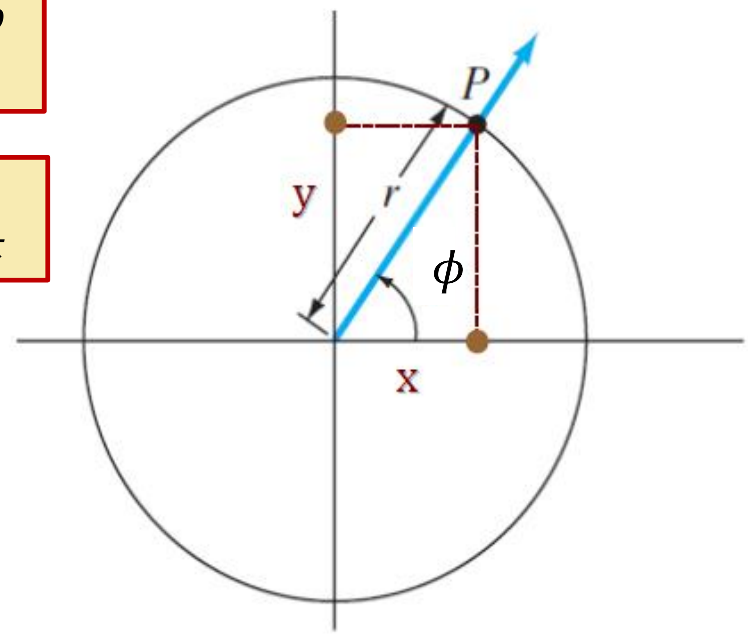
$$z_{CM} = \frac{\int_M zdm}{M} = \frac{\int_S z\sigma(\vec{r})dS}{M}$$

Γ1. Επίπεδη Επιφάνεια



$$x = rcos\varphi$$
$$y = rsin\varphi$$

$$0 \leq r < \infty$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



$$\vec{r} = \vec{r}(r, \varphi) = rcos\varphi\hat{\boldsymbol{\imath}} + rsin\varphi\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (rcos\varphi, rsin\varphi)$$

Διάνυσμα θέσης της γωνίας φ αλλά και απόστασης r

$\boldsymbol{\Delta S}$: Έκταση στοιχειώδους στοιχείου

r : Απόσταση από αρχή αξόνων

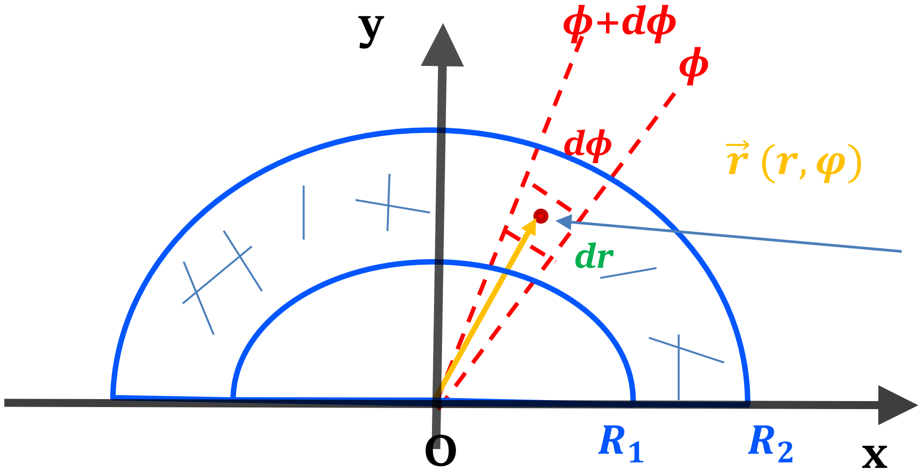
ϕ : Γωνία από οριζόντιο άξονα

$\boldsymbol{\Delta S = (r\Delta\varphi)\Delta r}$

$\boldsymbol{\Delta S}$

$\boldsymbol{\Delta m = \sigma(\vec{r})\, \Delta S = \sigma(\vec{r})r\Delta r\Delta\varphi}$ Εάν $\Delta\varphi, \Delta r \to 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \sigma(\vec{r})r\, dr\, d\varphi}$

Γ1. Ημικυκλική στεφάνη



$$\mathbf{d}S = (r\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi})\mathbf{dr}$$

$$x = r cos\varphi$$
$$y = r sin\varphi$$

$$M = \int_S \sigma(\vec{r})dS$$

$$x_{CM} = \frac{\int_S x\sigma(\vec{r})dS}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_S y\sigma(\vec{r})dS}{M}$$

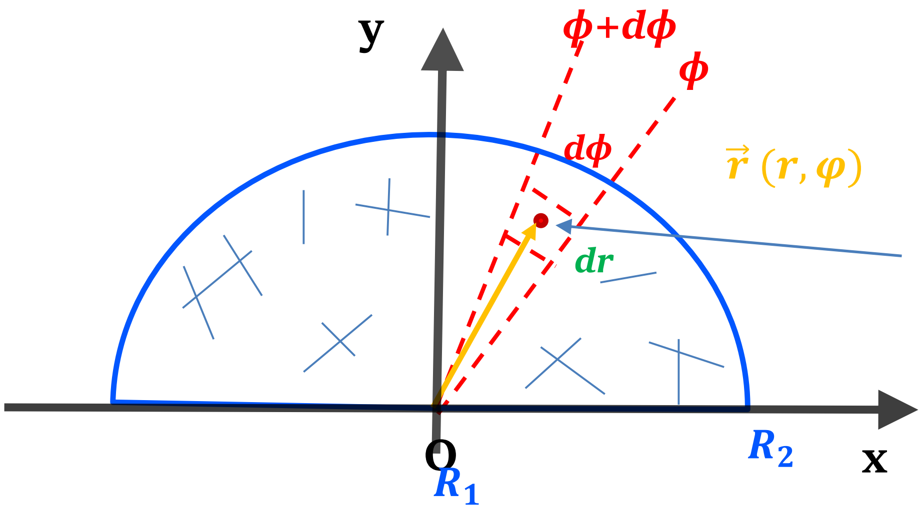
i) Σταθερή πυκνότητα σ(r,φ) = σ_o (ομογενής)

$$M = \int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \sigma(\vec{r})r\,dr\,d\varphi = \sigma_0\int_0^{\pi}\Big(\int_{R_1}^{R_2} r\,dr\Big)d\varphi = \sigma_0\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}\sigma_0\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

$$x_{CM} = \frac{\sigma_0}{M}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2}(r cos\varphi)(r\,dr\,d\varphi) = \frac{\sigma_0}{M}\int_0^{\pi}\Big(\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr\Big)cos\varphi\,d\varphi = \frac{\sigma_0(R_2^3 - R_1^3)}{3M}(0-0) = 0$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma_0}{\mathrm{M}}\int_0^{\pi}\Big(\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr\Big)sin\varphi d\varphi = \frac{\sigma_0(R_2^3 - R_1^3)}{3\mathrm{M}}(cos0 - cos\pi) = \frac{4(R_2^3 - R_1^3)}{3\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

Γ1. Ημικυκλική στεφάνη



$$M = \frac{1}{2}\sigma_0 \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

$$x_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{4(R_2^3 - R_1^3)}{3\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$z_{CM} = 0$$

<u>Παράδειγμα μισού δίσκου</u>

$$\boldsymbol{R_1 = 0 \quad R_2 = R}$$

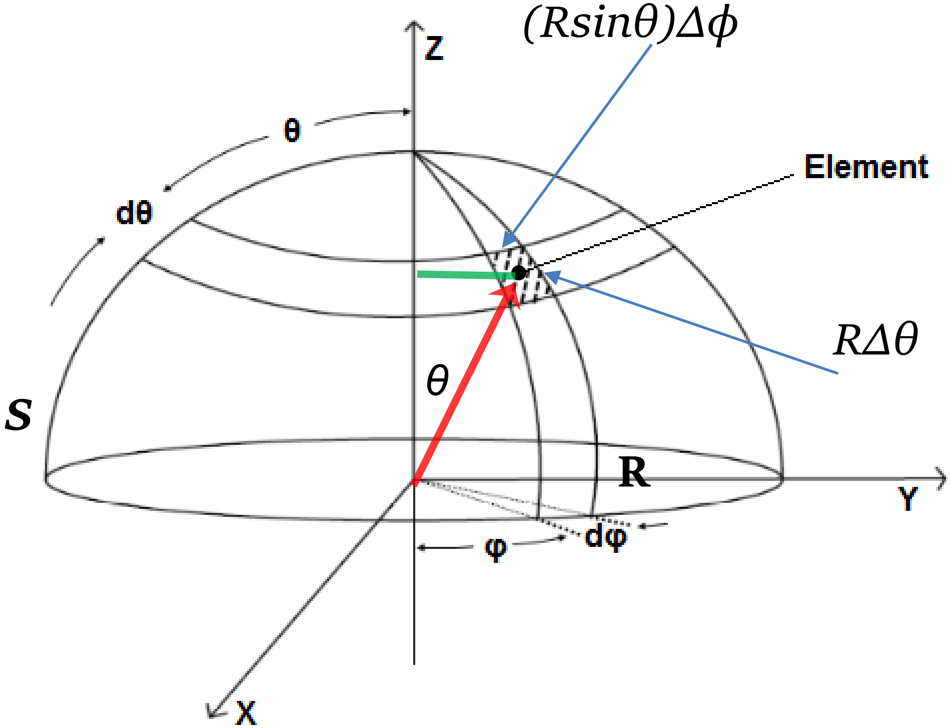
$$M = \frac{\sigma_0 \pi R^2}{2} \qquad x_{CM} = 0 \qquad z_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{4R}{3\,\pi}$$

- Το κέντρο μάζας του ομογενούς μισού δίσκου βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας του σώματος (άξονας y).
- Η θέση είναι ανεξάρτητη της τιμής της επιφανειακής πυκνότητας.

Γ2. Ημισφαιρική επιφάνεια

Η γεωμετρία του προβλήματος υποδεικνύει τη χρήση **σφαιρικών συντεταγμένων** για να γραφουμε το διάνυσμα θέσεως του στοιχειώδους στοιχείου καθώς και για τον ευκολότερο υπολογισμό της επιφάνειας του dS και μάζας του dm:



(r, θ,φ) → (x,y,z)

$x = rcos\varphi sin\theta$

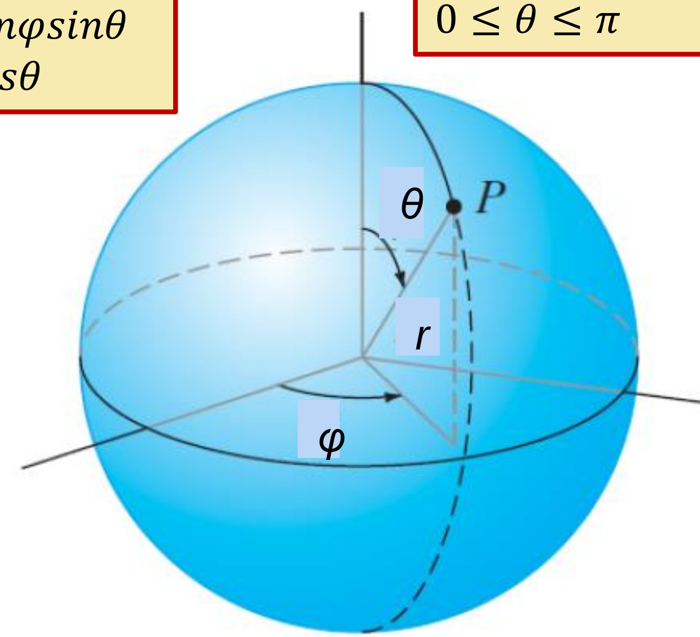
$y = rsin\varphi sin\theta$

$z = rcos\theta$

$0 \leq r < \infty$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

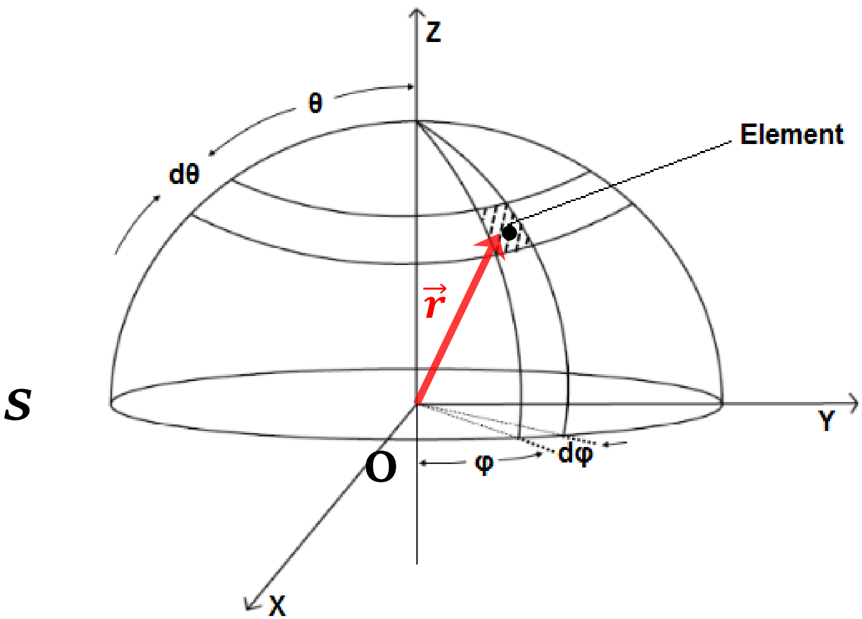
$0 \leq \theta \leq \pi$



Στην περίπτωση μεμβράνης r=R, $\Delta S = (R\Delta\theta)(Rsin\theta\Delta\phi) = R^2 sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi$

$\boldsymbol{\Delta m = \sigma(\vec{r}\,)\,\Delta S = \sigma(\vec{r}\,)R^2 sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi}$ Εάν $\Delta\varphi, \Delta\theta \rightarrow 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \sigma(\vec{r}\,)R^2 sin\theta d\theta d\varphi}$

Γ2. Ημισφαιρική επιφάνεια



$$M = \int_S \sigma(\vec{r})dS$$

$$x = R\cos\varphi\sin\theta$$
$$y = R\sin\varphi\cos\theta$$
$$z = R\cos\theta$$

$$x_{CM} = \frac{\int_S x\sigma(\vec{r})dS}{M}$$
$$y_{CM} = \frac{\int_S y\sigma(\vec{r})dS}{M}$$
$$z_{CM} = \frac{\int_S z\sigma(\vec{r})dS}{M}$$

Ολική Μάζα Επιφανείας

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sigma(\theta,\varphi)R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

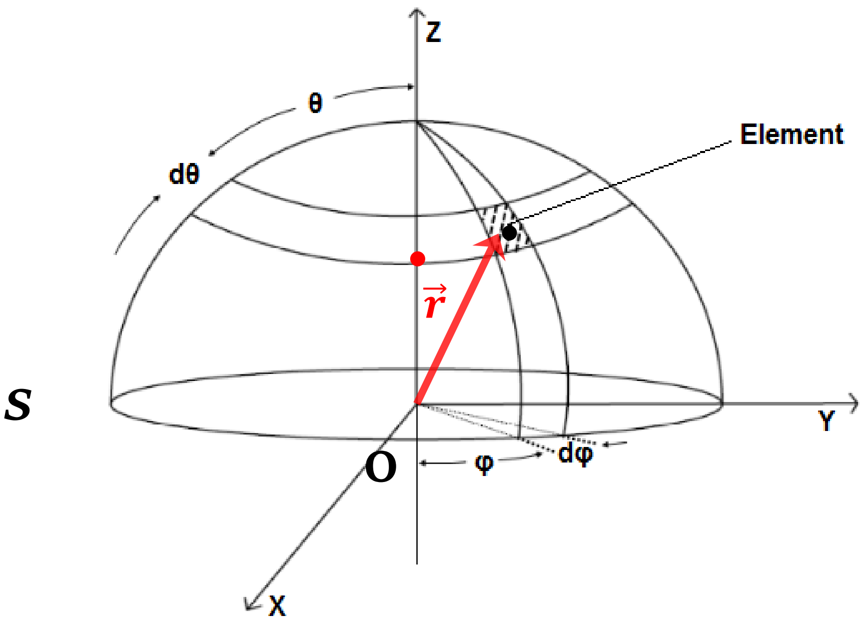
Κέντρο Μάζας Επιφανείας

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (R\cos\varphi\sin\theta)\,\sigma(\theta,\varphi)\,R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sigma(\theta,\varphi)\,R^3 \sin^2\theta\, \cos\varphi\, d\theta d\varphi$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (R\sin\varphi\sin\theta)\,\sigma(\theta,\varphi)\,R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sigma(\theta,\varphi)\,R^3 \sin^2\theta\, \sin\varphi d\theta d\varphi$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (R\cos\theta)\,\sigma(\theta,\varphi)\,R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sigma(\theta,\varphi)\,R^3 \sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi$$

Γ2. Ημισφαιρική επιφάνεια



$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sigma(\theta,\varphi) R^2 sin\theta d\theta d\varphi$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sigma(\theta,\varphi)\, R^3 \sin^2\theta\, cos\varphi\, d\theta d\varphi$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sigma(\theta,\varphi)\, R^3 \sin^2\theta\, sin\varphi d\theta d\varphi$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sigma(\theta,\varphi)\, R^3 sin\theta cos\theta d\theta d\varphi$$

i) Σταθερή πυκνότητα σ(θ,φ) = σ_o (ομογενής)

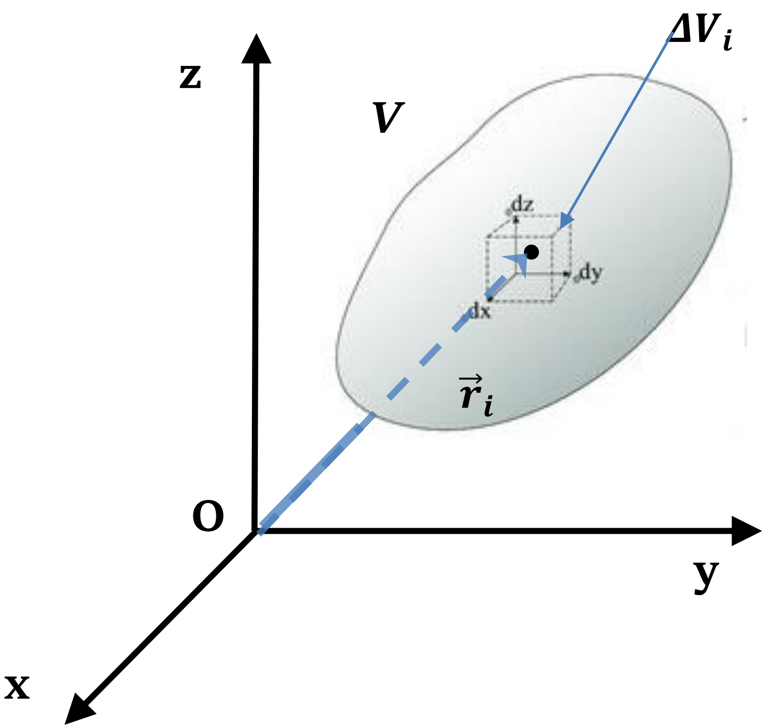
$$M = \sigma_0 R^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} sin\theta d\theta\right) d\varphi = -\sigma_0\, R^2 \int_0^{2\pi} (0-1) d\varphi = 2\pi\, \sigma_0 R^2$$

$$x_{CM} = \frac{\sigma_0 R^3}{2\pi\sigma_0 R^2}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta\right) cos\varphi\, d\varphi = 0 \qquad y_{CM} = \frac{\sigma_0 R^3}{2\pi\sigma_0 R^2}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta\right) sin\varphi\, d\varphi = 0$$

$$z_{CM} = \frac{\sigma_0 R^3}{2\pi\sigma_0 R^2}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} sin\theta cos\theta\, d\theta\right) d\varphi = \frac{R}{2}$$

Το κέντρο μάζας βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας του σώματος (άξονας y).

Δ. Χωρική πυκνότητα



$\boldsymbol{\Delta V_i}$: Όγκος στοιχειώδους στοιχείου σώματος με όγκο V.

$\boldsymbol{\Delta m}$: Μάζα στοιχειώδους στοιχείου ΔV_i

$\boldsymbol{\Delta m = \kappa(\vec{r}_i)\, \Delta V_i}$

$\boldsymbol{\kappa(\vec{r}_i)}$: Χωρική πυκνότητα μάζας (*Μάζα/Όγκος*).

Εάν $\Delta V_i \rightarrow 0$ τότε $\boldsymbol{dm = \kappa(\vec{r}\,)\, dV}$.

Ολική Μάζα Σώματος

$$M = \lim_{\substack{i\to\infty \\ \Delta V_i \to 0}} \left(\sum_i \kappa(\vec{r}_i)\Delta V_i\right) = \int_V \kappa(\vec{r})dV$$

Κέντρο Μάζας Σώματος

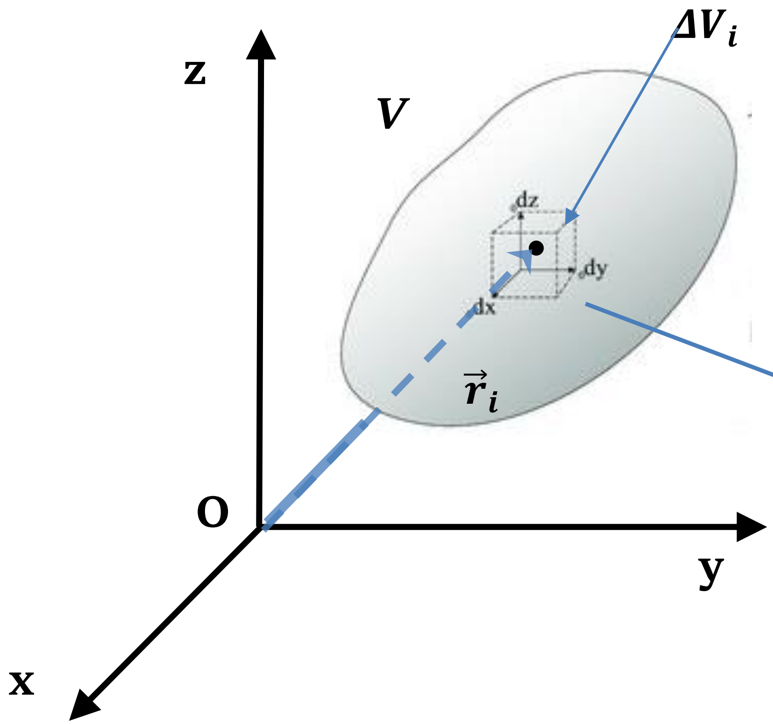
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \lim_{\substack{i\to\infty \\ \Delta V_i \to 0}} \left(\sum_i \vec{r}_i\, \kappa(\vec{r}_i)\, \Delta V_i\right) = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\kappa(\vec{r})dV$$

$$x_{CM} = \frac{\int_M x dm}{M} = \frac{\int_V x\kappa(\vec{r})dV}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_M y dm}{M} = \frac{\int_V y\kappa(\vec{r})dV}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{\int_M z dm}{M} = \frac{\int_V z\kappa(\vec{r})dV}{M}$$

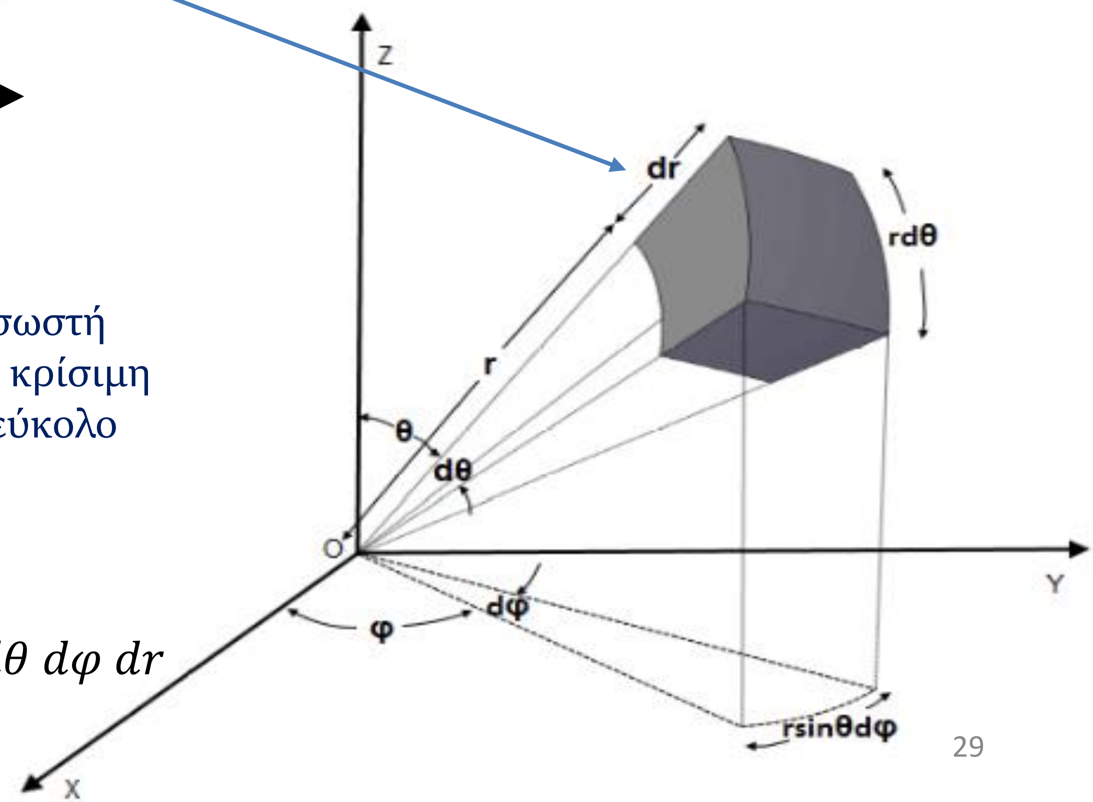
Δ. Χωρική πυκνότητα



Αν το ευνοεί η γεωμετρία του σώματος, μπορούμε για παράδειγμα να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες για τον υπολογισμό του στοιχειώδους όγκου

$$x = r cos\varphi sin\theta$$
$$y = r sin\varphi sin\theta$$
$$z = r cos\theta$$

$$0 \leq r < \infty$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$

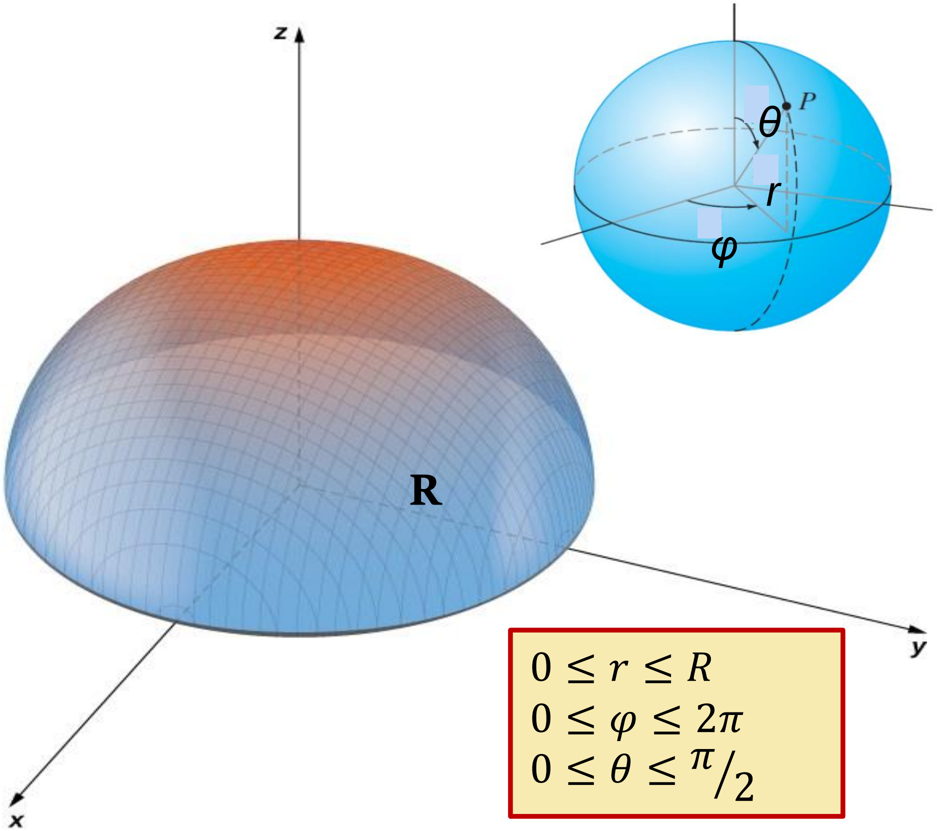


Ανάλογα με τη γεωμετρία του στερεού, η σωστή επιλογή συστήματος συντεταγμένων είναι κρίσιμη για τον υπολογισμό των dm & dV και τον εύκολο υπολογισμό του κέντρου μάζας.

$$dm = \kappa(\vec{r}_i)\, dV_i$$

$$dV_i = (dr)(rd\theta)(rsin\theta\, d\varphi) = r^2 sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr$$

Δ. Κέντρο μάζας Ημισφαιρίου



$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(r,\varphi,\theta) \boldsymbol{r^2} sin\theta d\theta d\varphi\, \boldsymbol{dr}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(r,\varphi,\theta)\, \boldsymbol{r^3} \sin^2\theta\, cos\varphi\, d\theta d\varphi \boldsymbol{dr}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_o^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(r,\varphi,\theta)\, \boldsymbol{r^3} \sin^2\theta\, sin\varphi d\theta d\varphi \boldsymbol{dr}$$

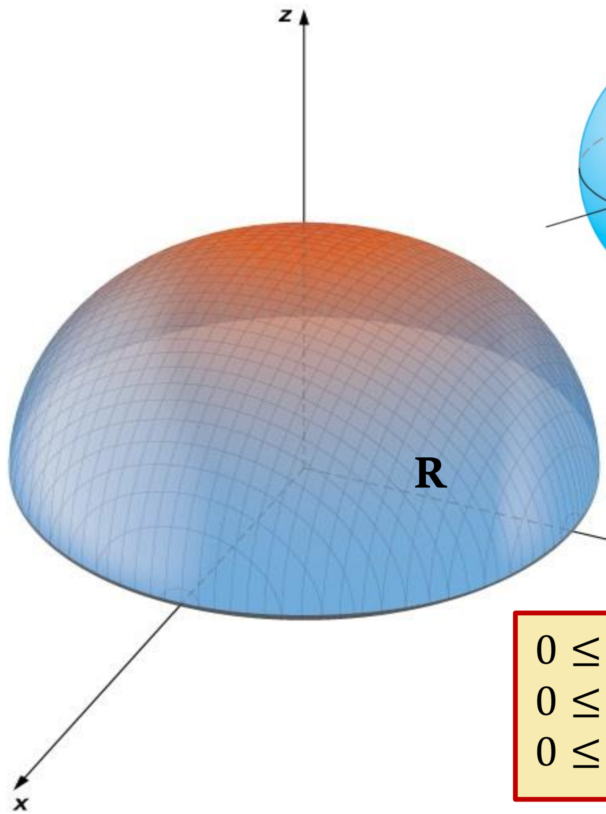
$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(r,\varphi,\theta)\, \boldsymbol{r^3} sin\theta cos\theta d\theta d\varphi \boldsymbol{dr}$$

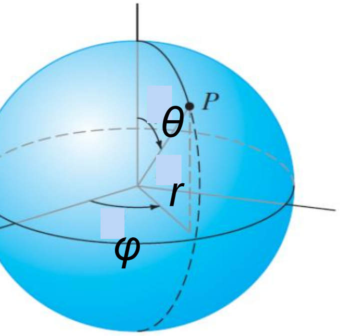
$0 \leq r \leq R$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{2}$

i) Σταθερή πυκνότητα κ(r,φ,θ) = κ$_o$ (ομογενής)

$$M = \kappa_0 \int_0^R r^2 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi/2} sin\theta d\theta) d\varphi) dr = \kappa_0 \int_0^R r^2 (\int_0^{2\pi} d\varphi)\, dr = 2\pi\kappa_0 \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi\kappa_0 \mathrm{R}^3}{3}$$

Δ. Κέντρο μάζας Ημισφαιρίου





$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(r,\varphi,\theta)\boldsymbol{r^2} sin\theta d\theta d\varphi\, \boldsymbol{dr}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(r,\varphi,\theta)\, \boldsymbol{r^3} \sin^2\theta\, cos\varphi\, d\theta d\varphi \boldsymbol{dr}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_o^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(r,\varphi,\theta)\, \boldsymbol{r^3} \sin^2\theta\, sin\varphi d\theta d\varphi \boldsymbol{dr}$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(r,\varphi,\theta)\, \boldsymbol{r^3} sin\theta cos\theta d\theta d\varphi \boldsymbol{dr}$$

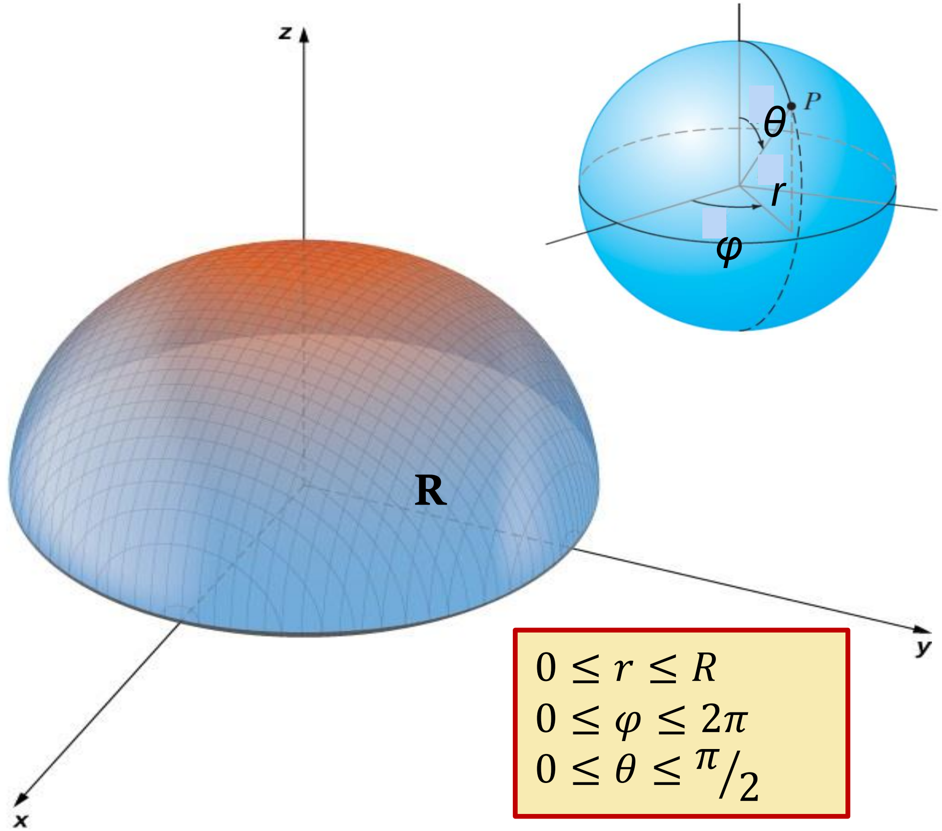
$0 \le r \le R$
$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le \theta \le {}^{\pi}/_{2}$

i) Σταθερή πυκνότητα κ(r,φ,θ) = κ_o (ομογενής)

$$x_{CM} = \frac{\kappa_0}{M}\int_0^R r^3 (\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} (\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta)\boldsymbol{cos\varphi} d\varphi) dr = 0$$

$$y_{CM} = \frac{\kappa_0}{M}\int_0^R r^3 (\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} (\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta)\boldsymbol{sin\varphi} d\varphi) dr = 0$$

Γ. Κέντρο μάζας Ημισφαιρίου



$$M=\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\kappa(r,\varphi,\theta)\boldsymbol{r^2}\sin\theta d\theta d\varphi\,\boldsymbol{dr}$$

$$x_{CM}=\frac{1}{M}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\kappa(r,\varphi,\theta)\,\boldsymbol{r^3}\sin^2\theta\cos\varphi\,d\theta d\varphi\boldsymbol{dr}$$

$$y_{CM}=\frac{1}{M}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\kappa(r,\varphi,\theta)\,\boldsymbol{r^3}\sin^2\theta\sin\varphi d\theta d\varphi\boldsymbol{dr}$$

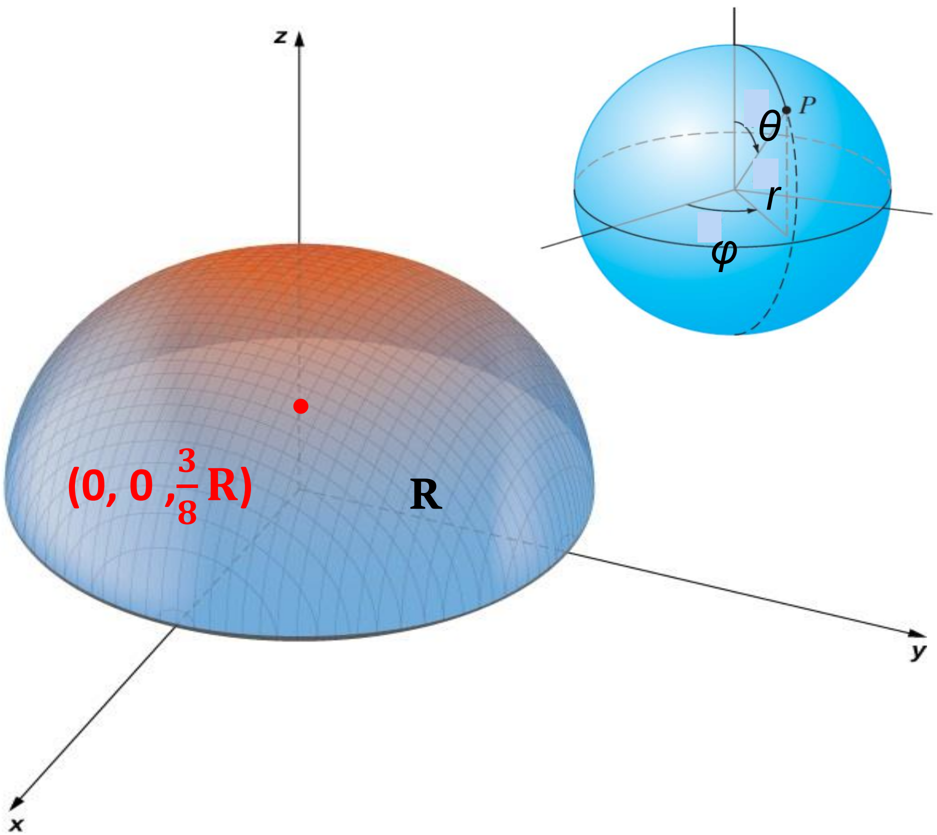
$$z_{CM}=\frac{1}{M}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\kappa(r,\varphi,\theta)\,\boldsymbol{r^3}\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi\boldsymbol{dr}$$

$0\le r\le R$
$0\le\varphi\le 2\pi$
$0\le\theta\le {}^{\pi}/_{2}$

i) Σταθερή πυκνότητα κ(r,φ,θ) = κ_o (ομογενής)

$$z_{CM}=\frac{\kappa_0}{M}\int_0^R r^3\Big(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}}\Big(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\Big)d\varphi\Big)dr=\frac{\kappa_0}{M}\int_0^R r^3\Big(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}}\frac{1}{2}\,d\varphi\Big)dr=\frac{3}{8}R$$

Δ. Κέντρο μάζας Ημισφαιρίου



$$M = \frac{2\pi\kappa_0 R^3}{3}$$

$$x_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = 0$$

$$z_{CM} = \frac{3}{8}R$$

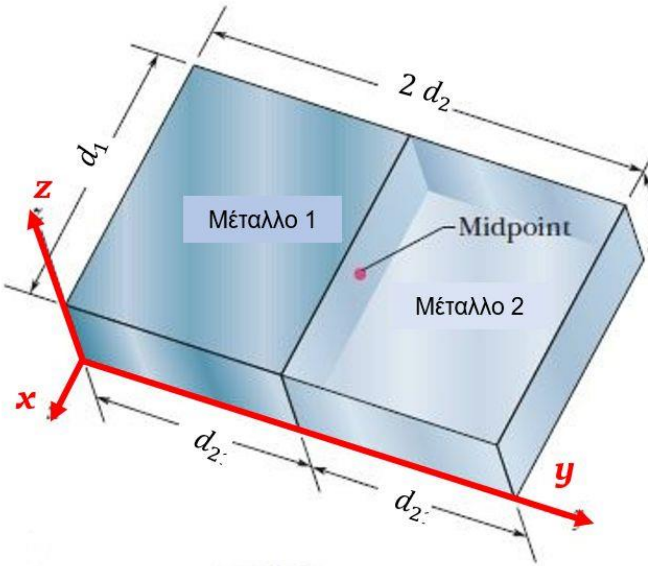
$0 \leq r \leq R$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{2}$

i) Σταθερή πυκνότητα κ(r,φ,θ) = κ_o (ομογενής)

Το κέντρο μάζας του ομογενούς στερεού σώματος βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας του (άξονας y). Η θέση του δεν εξαρτάται από τιμή της χωρικής πυκνότητας μάζας του σώματος.

Άσκηση

Εφαρμογή: Πλάκα αποτελείται από 2 επιμέρους μεταλλικά κομμάτια ίσου όγκου, με το καθένα να έχει διαστάσεις $d_1 = 13\ cm$, $d_2 = 12\ cm$ και $d_3 = 2.8\ cm$. Αυτές οι διαστάσεις είναι διευθετημένες ως προς καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα. Το Μέταλλο 1 έχει πυκνότητα $\rho_1 = 8\ gr/cm^3$ ενώ το Μέταλλο 2 έχει πυκνότητα $\rho_2 = 4\ gr/cm^3$. Να βρεθούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου μάζας της πλάκας (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}).



Θεωρούμε πως η πλάκα είναι ένα σύστημα δυο σωμάτων αφού αποτελείται από δυο επιμέρους μεταλλικά κομμάτια. Η μάζα των 2 επιμέρους **ομογενών** πλακών είναι συγκεντρωμένη στο γεωμετρικό κέντρο συμμετρίας τους.

$$x_{CM} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{\rho_1 V x_1 + \rho_2 V\ x_2}{V(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{\rho_1 x_1 + \rho_2\ x_2}{\rho_1 + \rho_2} = -6.5\ cm$$

$$y_{CM} = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2} = \frac{\rho_1 V y_1 + \rho_2 V\ y_2}{V(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{\rho_1 y_1 + \rho_2\ y_2}{\rho_1 + \rho_2} = 10\ cm$$

$$z_{CM} = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2}{M_1 + M_2} == \frac{\rho_1 V z_1 + \rho_2 V\ z_2}{V(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{\rho_1 z_1 + \rho_2\ z_2}{\rho_1 + \rho_2} = 1.4\ cm$$

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(-\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}, \frac{d_3}{2}\right) = (-6.5\ cm, 6\ cm, 1.4\ cm)$$

$$\boxed{(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) = (-6.5\ cm, 10\ cm, 1.4\ cm)}$$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(-\frac{d_1}{2}, \frac{3\ d_2}{2}, \frac{d_3}{2}\right) = (-6.5\ cm, 9\ cm, 1.4\ cm)$$