ΕΝΟΤΗΤΑ 4 : ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

1. ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

- Διάνυσμα θέσης, ταχύτητα & επιτάχυνση
- Μοναδιαία διανύσματα

2. ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΑΓΜΕΝΕΣ

- Εφαρμογή

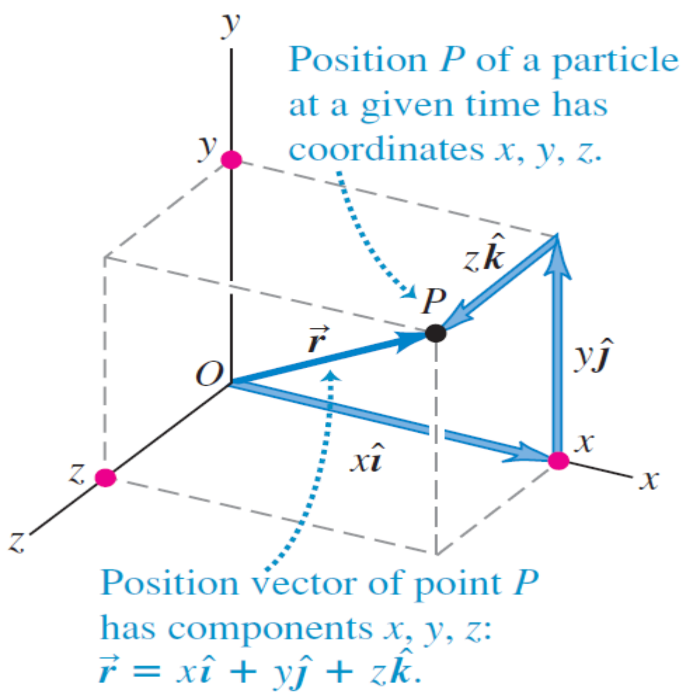
3. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΕΛΙΚΑΣ

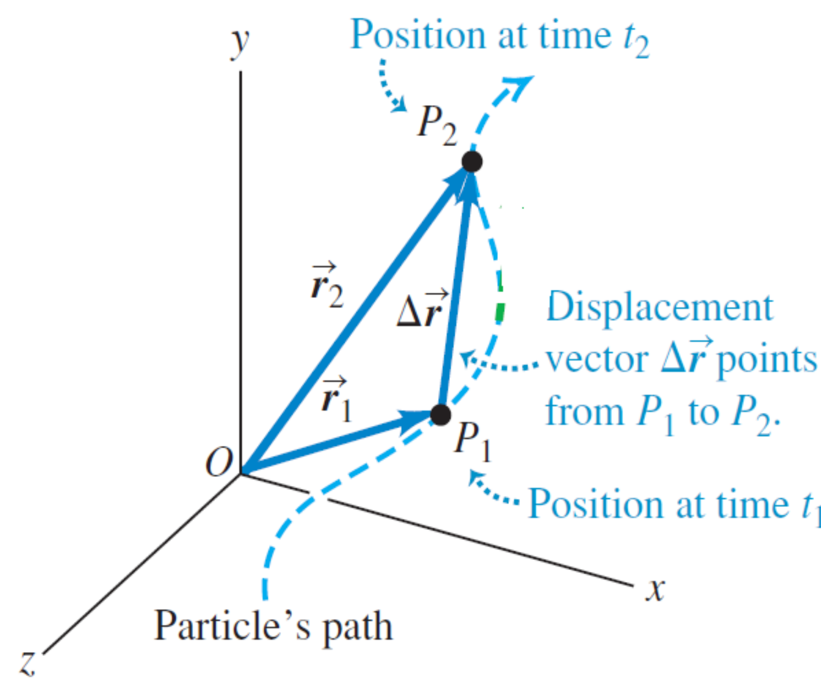
4. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

5. ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα θέσης

Διάνυσμα θέσης: ένα *δέσμιο διάνυσμα*, με αρχή του στην αρχή των αξόνων. Καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται, η κορυφή του διανύσματος κινείται μαζί με το κινούμενο σημείο P και διαγράφει μια *καμπύλη στον χώρο*, την *τροχιά του κινητού*

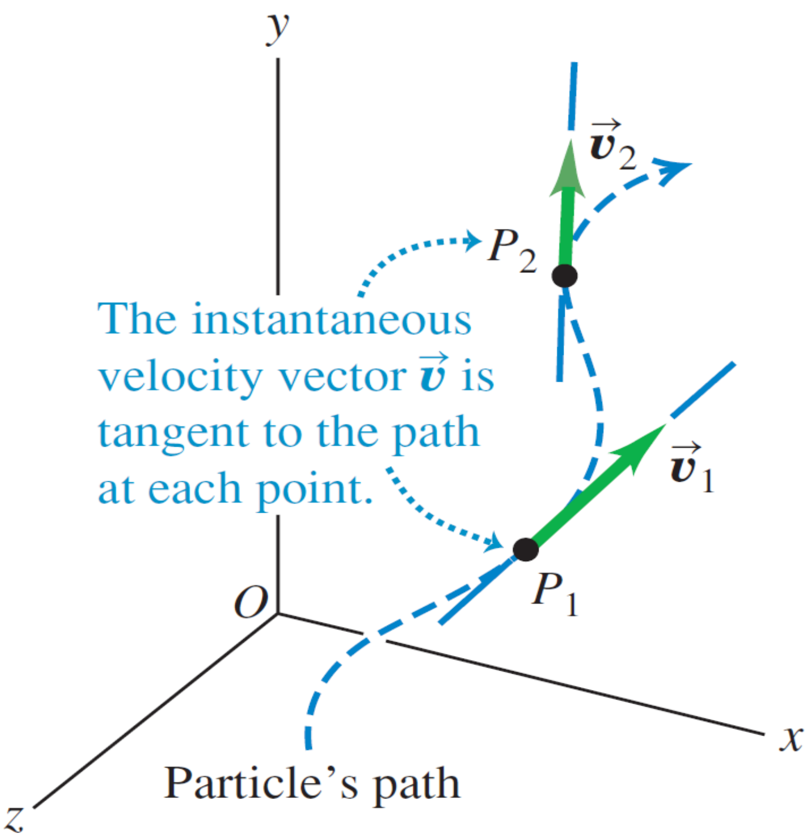




$$\boxed{\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)\ ) = x(t)\ \hat{\boldsymbol{\imath}} + y(t)\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} + z(t)\ \hat{\boldsymbol{k}}}$$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα ταχύτητας

Διάνυσμα ταχύτητας: Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{\upsilon}(\mathrm{t})$ (instantaneous velocity) εφάπτεται της τροχιάς σε κάθε σημείο της.



$$\upsilon_x = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\upsilon_y = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

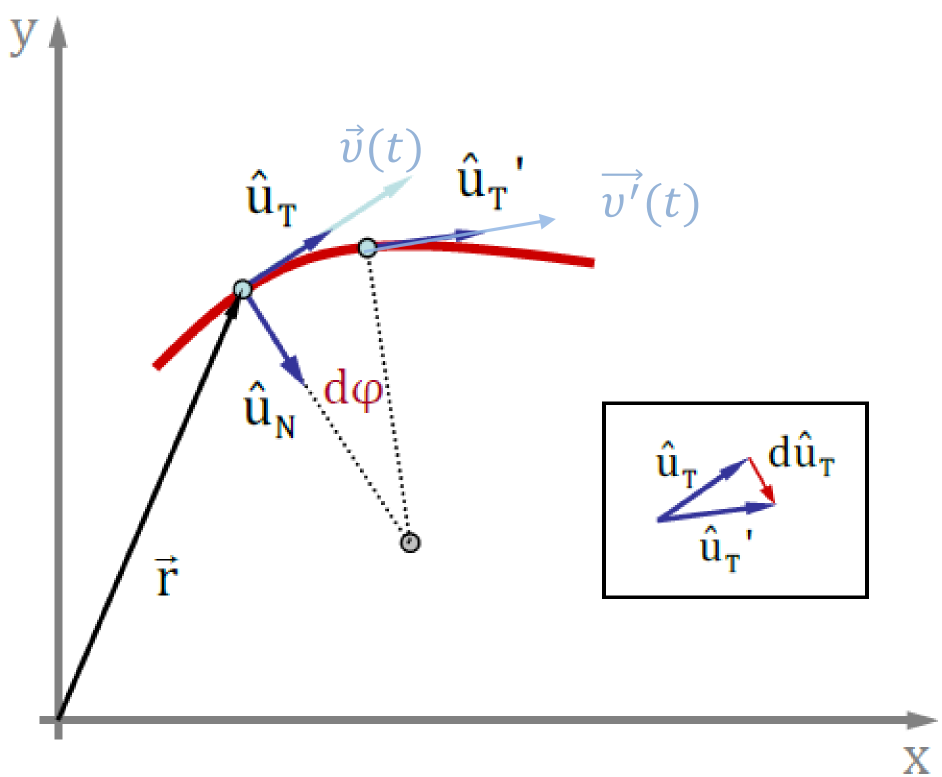
$$\upsilon_z = \dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

Κάθε συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας **ταχύτητας** ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της **αντίστοιχης συντεταγμένης**.

$$\vec{\upsilon}(\mathrm{t}) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{k}} = \upsilon_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \upsilon_y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \upsilon_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

1. Μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_T$

Διάνυσμα ταχύτητας: Το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{\upsilon}$(t) (instantaneous velocity) εφάπτεται της τροχιάς σε κάθε σημείο της.



$$\widehat{u_{\mathrm{T}}}(t) = \frac{1}{|\vec{\upsilon}(t)|}\vec{\upsilon}(t)$$

$$\widehat{u_{\mathrm{T}}'}(t) = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\upsilon'}(t)\right|}\overrightarrow{\upsilon'}(t)$$

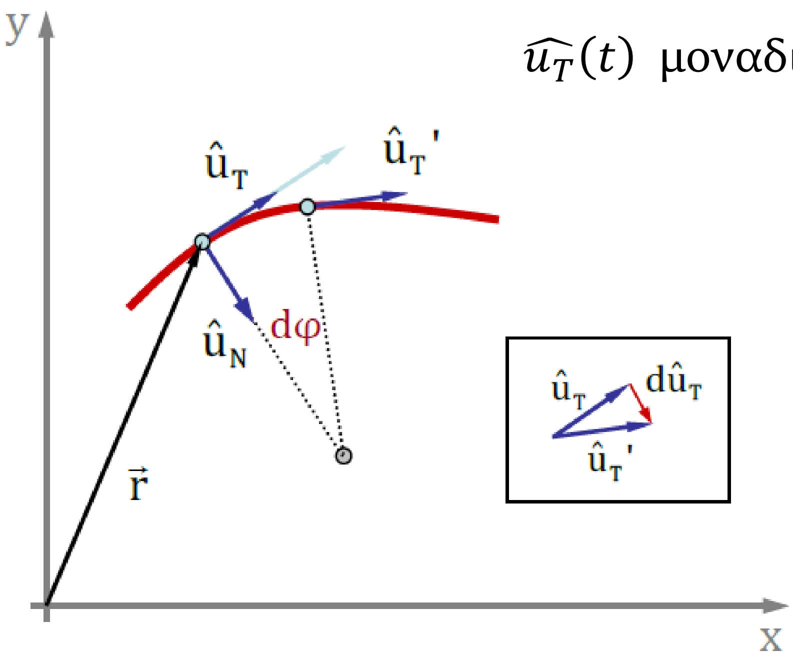
Μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο πάντα της τροχίας (στην κατεύθυνση της κίνησης).

Αλλάζει συνεχώς διεύθυνση για αυτό έχει εξάρτηση με το χρόνο t.

$$d\widehat{u_{\mathrm{T}}} = \widehat{u_{\mathrm{T}}'} - \widehat{u_{\mathrm{T}}}$$

1. Προσδιορίζοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_N$

Εφαρμογή 1: Να δειχθεί ότι το $\dfrac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}$ είναι κάθετο στο $\widehat{u_T}(t)$



$$\widehat{u_T}(t)\ \text{μοναδιαίο} \Rightarrow \widehat{u_T}(t)\cdot\widehat{u_T}(t) = |\widehat{u_T}(t)||\widehat{u_T}(t)|\cos 0^o = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\widehat{u_T}(t)\cdot\widehat{u_T}(t)\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\,\widehat{u_T}(t)\cdot\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\widehat{u_T}(t)\cdot\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} = 0}$$

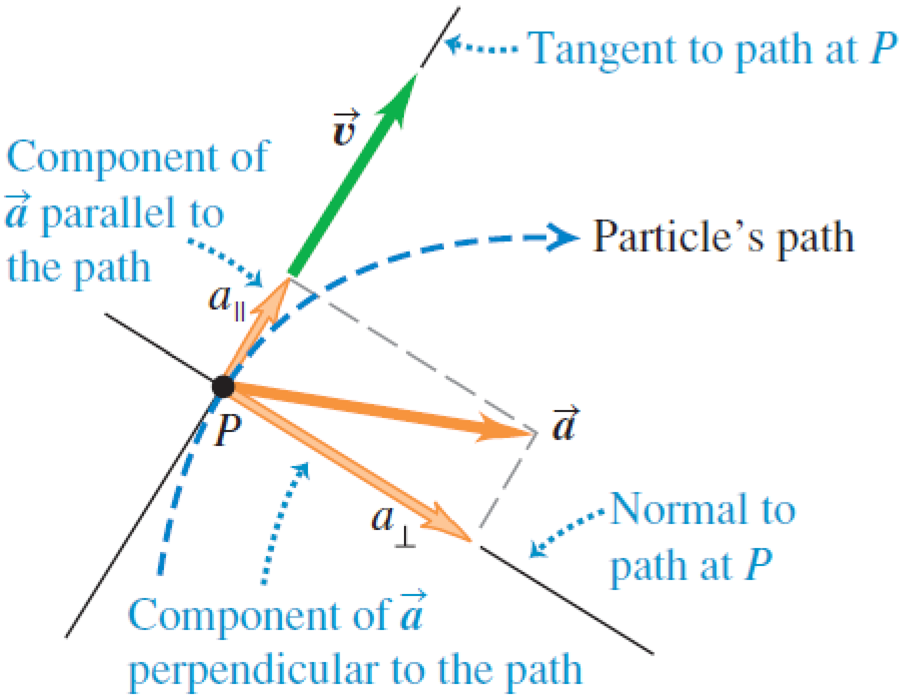
Αν το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $\vec{A}\ \&\ \vec{B}$ είναι $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ τότε $\vec{A}\perp\vec{B}$

Αφού $\dfrac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} \perp \widehat{u_T}(t)$ τότε γράφουμε $\dfrac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} = \left|\dfrac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|\widehat{u_N}(t)$

Όπου $\widehat{u_N}(t)$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην τροχιά (και στο $\boldsymbol{\widehat{u_T}(t)}$).
Έχει κατεύθυνση προς την κοίλη πλευρά της τροχιάς.

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Διάνυσμα επιτάχυνσης: Για καμπύλη τροχιά, το διάνυσμα της στιγμιαίας επιτάχυνσης $\vec{a}$(t) κατευθύνεται πάντα προς την κοίλη πλευρά της τροχιάς. Η επιτάχυνση είναι εφαπτόμενη στην τροχιά **μόνο** αν το κινητό κινείται σε ευθεία γραμμή.



$$\alpha_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

$$\alpha_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t)$$

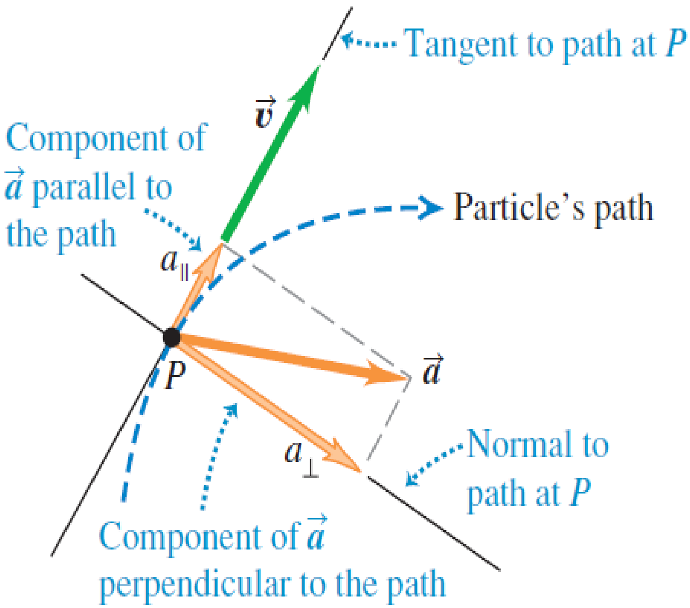
$$\alpha_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t)$$

Κάθε συνιστώσα του διανύσματος της στιγμιαίας **επιτάχυνσης** ενός κινητού ισούται με τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της **αντίστοιχης συνιστώσας της ταχύτητάς του**.

$$\vec{a}(\mathrm{t}) = \frac{dv_x(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dv_y(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dv_z(t)}{dt}\,\hat{\boldsymbol{k}} = a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + a_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Εφαρμογή 2: Να δειχθεί ότι η επιτάχυνση μπορεί να αναλυθεί σε 2 συνιστώσες :
$\vec{\alpha}(t) = \alpha_T \widehat{u_T}(t) + \alpha_N \widehat{u_N}$. Η πρώτη παράλληλη και η δεύτερη κάθετη στην τροχιά.



Εφαρμογή 1

$$\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)|\, \widehat{u_T}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}\right) \widehat{u_T}(t) + |\vec{v}(t)| \frac{d\widehat{u_T}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}(t) = \left(\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}\right) \widehat{u_T}(t) + |\vec{v}(t)| \left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| \widehat{u_N}(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \dfrac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \dfrac{dv(t)}{dt} \\ \alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = |\vec{v}(t)| \left|\dfrac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| = v(t) \left|\dfrac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| \end{cases}$$

Όπου $\quad v(t) \equiv |\vec{v}(t)|$

1. Βασικά μεγέθη: Διάνυσμα επιτάχυνσης

Εφαρμογή 3: Να δειχθεί ότι $\dfrac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \vec{\alpha}\,\widehat{u_T} = \dfrac{\vec{\alpha}\,\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$f = f(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$

Πραγματική συνάρτηση 3 μεταβλητών όπου η κάθε μια μεταβλητή είναι συνάρτηση του t

$\dot{x} = \dot{x}(t), \quad \dot{y} = \dot{y}(t), \quad \dot{z} = \dot{z}(t)$

$$f(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

Σύνθετη συνάρτηση **μιας μεταβλητής** $|\vec{v}|(t) \rightarrow$ *h(t)=f(*$\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)$ *).* **Ολική παράγωγος** της *g* **ως προς *t***

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}(2\dot{x})\ddot{x} + \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}(2\dot{y})\ddot{y} + \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}(2\dot{z})\ddot{z} =$$

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}\,2(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{2}\frac{(2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}+2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = \frac{1}{|\vec{v}|}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}\,\vec{\alpha} = \vec{\alpha}\,\widehat{u_T}$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε τις 2 συνιστώσες της επιτάχυνσης ως εξής:

$$\alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \vec{\alpha}\,\widehat{u_T} \qquad \alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = |\vec{v}(t)|\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|$$

Ουσιαστικά είναι η προβολή της επιτάχυνσης στη διεύθυνση του $\widehat{u_T}$

1. Επεξηγηματικό μαθηματικό συμπλήρωμα

$$|\vec{v}| = f(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι μια συνάρτηση f, η οποία έχει 3 μεταβλητές όπου η κάθε μια μεταβλητή είναι συνάρτηση του t

$$|\vec{v}|(t) = f(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$f = f(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

$$\dot{x} = \dot{x}(t), \quad \dot{y} = \dot{y}(t), \quad \dot{z} = \dot{z}(t)$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx}, \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dx}, \quad \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dx},$$

Πώς να υπολογίσω τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}$ $\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}$

Προς στιγμή θεώρησε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Η f είναι μια σύνθετη συνάρτηση $f = F\big(h(x,y,z)\big)$ Όπου

$$h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$
$$F(h) = \sqrt{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F(h(x,y,z))}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial h}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dF}{dh}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{h}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$(F(h(x)))' = F'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Θυμήσου τον γενικό κανόνα που είχαμε δώσει για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Γενικεύεται και για συναρτήσεις f πολλών μεταβλητών αλλά ο 2ος όρος θα είναι μερική παράγωγος!

Αντικατέστησε τώρα $x \to \dot{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}\,(\dot{x})$$

Ανάλογα

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}\,(\dot{y})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{-1/2}\,(\dot{z})$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης μιας μεταβλητής

Έστω συνάρτηση $f = f(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$ όπου με τη σειρά τους οι μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι και αυτές συναρτήσεις **μιας άλλης μεταβλητής *t***. Δηλαδή ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \\ x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots\ldots,\ x_n = x_n(t) \end{array}\right\}$$

Ορίζεται **σύνθετη** συνάρτηση **μιας μεταβλητής** $h(t) = f(\ x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\ )$

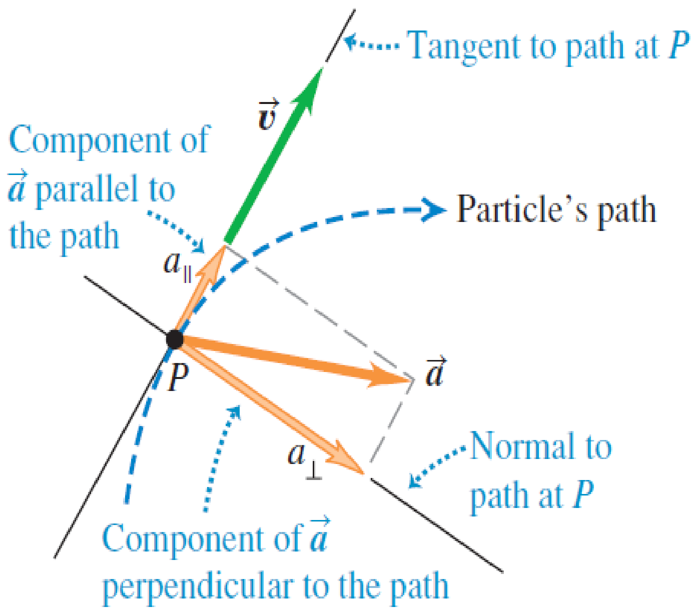
Η **ολική παράγωγος** της συνάρτησης g **ως προς *t*** είναι η εξής:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

1. Συνιστώσες επιτάχυνσης : Σύνοψη

Επομένως, το διάνυσμα της επιτάχυνσης μπορεί να αναλυθεί ως εξής



$$\vec{\alpha} = \alpha_T(t)\widehat{u_T}(t) + \alpha_N(t)\widehat{u_N}(t)$$

Προβολή του $\vec{\alpha}$ στη διεύθυνση του $\widehat{u_T}$. (Εσ. γινόμενο είναι βαθμωτό).

$$\alpha_T(t) \equiv \alpha_{\parallel}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \boldsymbol{\vec{\alpha}\,\widehat{u_T}}$$

$$\alpha_N(t) \equiv \alpha_{\perp}(t) = \boldsymbol{|\vec{v}(t)|}\left|\boldsymbol{\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}}\right| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\boldsymbol{R}}$$

Ακτίνα καμπυλότητας

<u>Συμπεράσματα</u>

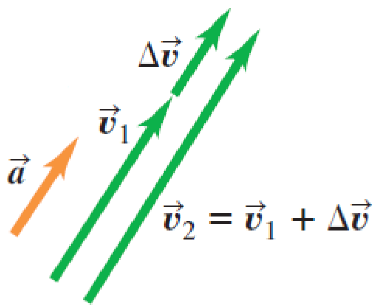
- Η **μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας** (δηλαδή $\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} \neq 0$) εισάγει συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά τη διεύθυνση του διανύσματος της $\vec{v}$ ή $\widehat{u_T}$. Δηλαδή $\alpha_T(t) \neq 0$.

- Στην περίπτωση που το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό ($|\vec{v}(t)|$=c), τότε η αλλαγή και **μόνο στη διεύθυνση της ταχύτητας** (αλλαγή διεύθυνσης $\widehat{u_T}$ & $\widehat{u_N}$) εισάγει συνιστώσα της επιτάχυνσης κάθετη στην ταχύτητα. Δηλαδή $\alpha_{\mathrm{N}}(t) \neq 0$.

1. Συνιστώσες επιτάχυνσης : Σύνοψη

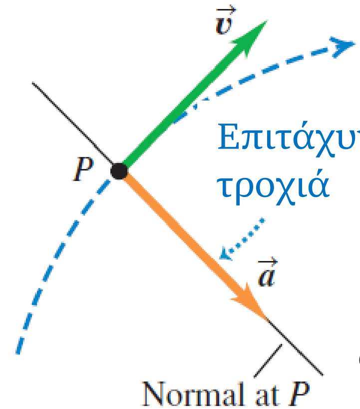
(α) Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ παράλληλη στην ταχύτητα $\vec{v}$

Μέτρο ταχύτητας αλλάζει αλλά όχι η διεύθυνση



$$\alpha_N(t) = |\vec{v}(t)| \underbrace{\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|}_{\to \mathbf{0}} = \underbrace{\frac{|\vec{v}(t)|^2}{R}}_{R \to \infty} = 0$$

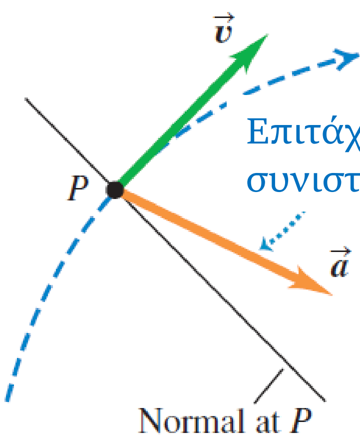
(β) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}|$ = c κατά μήκος καμπύλης τροχιάς. Αλλάζει μόνο η κατεύθυνσή της



Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ κάθετη στην τροχιά

$$\alpha_T(t) = \underbrace{\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}}_{\to \mathbf{0}} = 0$$

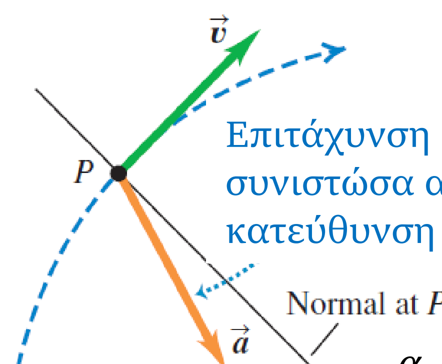
(γ) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}|$ αυξάνει κατά μήκος καμπύλης τροχιάς



Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει και μικρή συνιστώσα στην κατεύθυνση $\widehat{u_T}$

$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} > 0$$

(δ) Μέτρο ταχύτητας $|\vec{v}|$ μειώνεται κατά μήκος καμπύλης τροχιάς



Επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει και μικρή συνιστώσα αντίθετη στην κατεύθυνση $\widehat{u_T}$

$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} < 0$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, a_N και α_T.

$$\widehat{\boldsymbol{u_T}} = \widehat{u_T}(t) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} \quad \text{όπου } \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \text{ και } \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{\boldsymbol{d\widehat{u_T}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{d}{dt}\left\{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\right\}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} + (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\right\}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} + (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\begin{bmatrix}\frac{d\dot{x}}{dt}\\ \frac{d\dot{y}}{dt}\end{bmatrix}$$

$$= +\frac{-1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-3/2}(2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y})\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} + (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\begin{bmatrix}\dot{x}^2\ddot{x}+\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\\ \dot{x}\ddot{x}\dot{y}+\dot{y}^2\ddot{y}\end{bmatrix}$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = f(\dot{x},\dot{y}) = g(t)$$

Εφάρμοσε τους ίδιους κανόνες όπως στην διαφάνεια #9 για να υπολογίσεις το

$$\frac{d}{dt}\left\{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\right\}$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, a_N και α_T.

$$\widehat{\boldsymbol{u_T}} = \widehat{u_T}(t) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \quad \kappa\alpha\iota\ \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{\boldsymbol{d\widehat{u_T}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}\begin{bmatrix}\dot{x}^2\ddot{x}+\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\\ \dot{x}\ddot{x}\dot{y}+\dot{y}^2\ddot{y}\end{bmatrix}$$

$$= (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-3/2}\begin{bmatrix}\cancel{\ddot{x}\dot{x}^2}+\ddot{x}\dot{y}^2-\cancel{\dot{x}^2\ddot{x}}-\dot{x}\dot{y}\ddot{y}\\ \ddot{y}\dot{x}^2+\cancel{\ddot{y}\dot{y}^2}-\dot{x}\ddot{x}\dot{y}-\cancel{\dot{y}^2\ddot{y}}\end{bmatrix} = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-3/2}\begin{bmatrix}-\dot{y}(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\\ \dot{x}(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\begin{bmatrix}-\dot{y}\\ \dot{x}\end{bmatrix}$$

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, a_N και α_T.

$$\widehat{u_T} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \left| \frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} \right| \widehat{u_N}(t)$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \boldsymbol{K} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} \right| = \sqrt{(\boldsymbol{K})^2 \frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (-\dot{y})^2 + (\boldsymbol{K})^2 \frac{1}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\dot{x})^2} = |\boldsymbol{K}| \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = |\boldsymbol{K}| = \begin{cases} K, & K>0 \\ -K, & K<0 \end{cases}$$

$$\widehat{u_N} = \frac{\frac{d\widehat{u_T}}{dt}}{\left| \frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt} \right|} = \frac{\boldsymbol{K} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}{|\boldsymbol{K}|} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Προσοχή: το πρόσημο εξαρτάται από το πρόσημο του K και ουσιαστικά από το πρόσημο του “$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$ ”. Επιλέγεται το “+” αν K>0

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, α_N και α_T.

$$\alpha_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}$$

$$\alpha_N(t) = |\vec{v}(t)|\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right|$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| = \left|\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right| = |K|$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$f(\dot{x},\dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Εφάρμοσε τους ίδιους κανόνες όπως στη διαφάνεια #9 για να υπολογίσεις το

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}(2\dot{x})\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}(2\dot{y})\ddot{y} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\alpha_T(t) = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\alpha_N(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\left|\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{|\dot{x}^2 + \dot{y}^2|} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}}|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| =$$

$$= \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \pm\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του Κ και άρα του “$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$”. Επιλέγεται το “+” αν Κ>0

2. Βασικά μεγέθη σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εφαρμογή 4: Για κίνηση σε επίπεδο να βρεθούν σε καρτεσιανές συντεταγμένες τα $\widehat{u_T}$, $\frac{d\widehat{u_T}}{dt}$, $\widehat{u_N}$, α_N και α_T.

$$\widehat{u_T} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{u_N} = \pm \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του K και άρα του “$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$ ”. Επιλέγεται το “+” αν K>0

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{K} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\alpha_T(t) = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\alpha_N(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}\,| = \pm \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Το πρόσημο εξαρτάται από αυτό του K και άρα του “$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$ ”. Επιλέγεται το “+” αν K>0

3. Παράδειγμα υπολογισμών: Κυκλική τροχιά

Παράδειγμα: Έστω κυκλική τροχιά με ακτίνα R > 0:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} R\cos\varphi(t) \\ R\sin\varphi(t) \\ z_0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} -R\sin\varphi(t)\ \dfrac{d\varphi(t)}{dt} \\ R\cos\varphi(t)\dfrac{d\varphi(t)}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = R\,\dot{\varphi}(t)\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

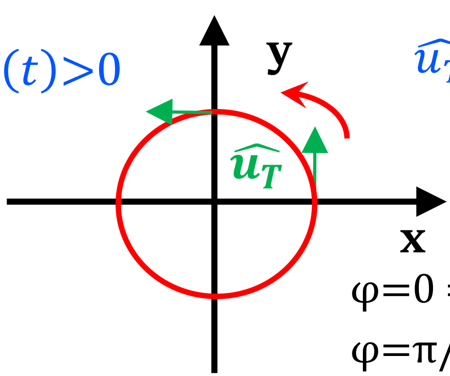
$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R\,\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t))^2 + (R\,\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t))^2 + 0} = \sqrt{(R\,\dot{\varphi}(t))^2} = R\,|\dot{\varphi}(t)|$$

$$\widehat{u_T} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{R\,\dot{\varphi}(t)}{R\,|\dot{\varphi}(t)|}\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} +\ldots, & \dot{\varphi}(t) > 0 \\ -\ldots, & \dot{\varphi}(t) < 0 \end{cases}$$

Κίνηση αντίθετα με αυτή δεικτών ρολογιού. Η φάση αυξάνει με το χρόνο.

Κίνηση σύμφωνα με αυτή δεικτών ρολογιού. Η φάση μειώνεται με το χρόνο.

$\dot{\varphi}(t) > 0$

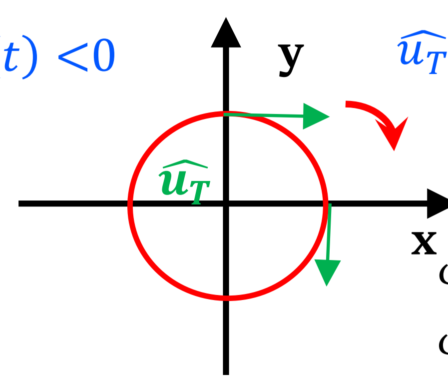


$$\widehat{u_T} = +\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\varphi = 0 \Rightarrow \widehat{u_T} = [0, 1, 0]$

$\varphi = \pi/2 \Rightarrow \widehat{u_T} = [-1, 0, 0]$

$\dot{\varphi}(t) < 0$



$$\widehat{u_T} = -\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\varphi = 0 \Rightarrow \widehat{u_T} = [0, -1, 0]$

$\varphi = \pi/2 \Rightarrow \widehat{u_T} = [1, 0, 0]$

3. Παράδειγμα υπολογισμών: Κυκλική τροχιά

Παράδειγμα: Έστω κυκλική τροχιά με ακτίνα R > 0:

$$|\vec{v}(t)| = R\,|\dot{\varphi}(t)| \begin{cases} +R\,\dot{\varphi}(t), & \dot{\varphi}(t) > 0 \\ -R\,\dot{\varphi}(t), & \dot{\varphi}(t) < 0 \end{cases} \qquad \widehat{u_T} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad \frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \begin{cases} \dot{\varphi}(t) \begin{bmatrix} -\cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, & \dot{\varphi}(t) > 0 \\ -\dot{\varphi}(t) \begin{bmatrix} -\cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, & \dot{\varphi}(t) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = |\dot{\varphi}(t)| \begin{bmatrix} -\cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{R}|\vec{v}(t)| \begin{bmatrix} -\cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{R}|\vec{v}(t)|\widehat{u_N} \qquad \widehat{u_N} = -\begin{bmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

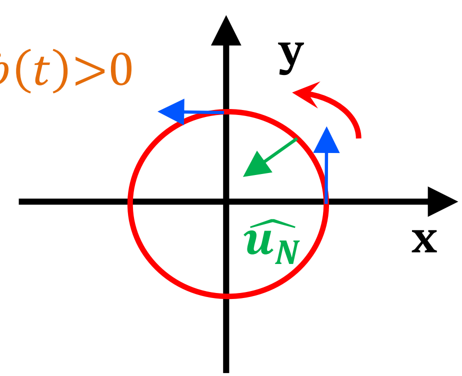
$$\boxed{\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \left|\frac{d\widehat{u_T}(t)}{dt}\right| \widehat{u_N}(t)}$$

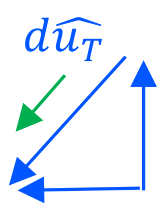
***Τοπική καμπυλότητα** της τροχιάς.*
Αντίστροφο της ακτίνας R του κύκλου

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right|}$$

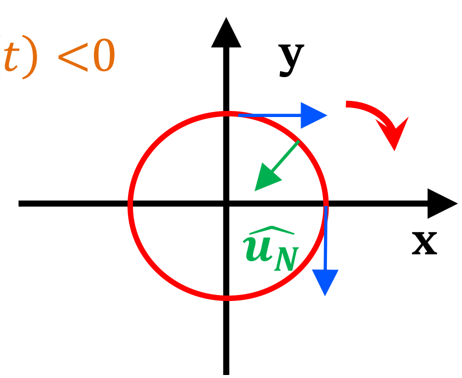
$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{1}{R}|\vec{v}(t)|\widehat{u_N} \qquad \frac{d\widehat{u_T}}{dt} \parallel d\widehat{u_T} \qquad \frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{1}{R}|\vec{v}(t)|\widehat{u_N}$$

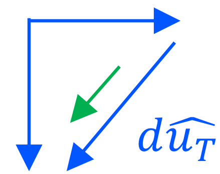
$\dot{\varphi}(t) > 0$





$\dot{\varphi}(t) < 0$





$\varphi = 0 \Rightarrow \widehat{u_N} = [-1, 0, 0]$

$\varphi = \pi/2 \Rightarrow \widehat{u_N} = [0, -1, 0]$

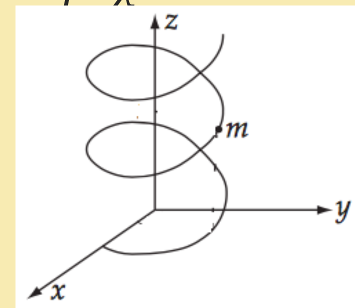
$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} \parallel d\widehat{u_T}$$

4. Κίνηση κατά μήκος έλικας

Εφαρμογή: *Κινητό κινούμενο κατά μήκος έλικας έχει την παρακάτω τροχιά*

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ bt \end{bmatrix} \quad με \;\; \omega > 0$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right|$$



Να υπολογισθούν τα μεγέθη $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t), \widehat{u_T}(t), \widehat{u_N}(t)$ *καθώς και η καμπυλότητα κ(t) της τροχιάς.*

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \\ b \end{bmatrix}, \qquad |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2 + b^2} = \sqrt{(R\omega)^2 + b^2}$$

$$\widehat{u_T} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{(R\omega)^2+b^2}}\begin{bmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \frac{R\omega^2}{\sqrt{(R\omega)^2+b^2}}\begin{bmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right| = \frac{R\omega^2}{\sqrt{(R\omega)^2+b^2}}, \; \widehat{u}_{\mathrm{N}} = \frac{\frac{d\widehat{u_T}}{dt}}{\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right|} = \begin{bmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix} \; και \;\; \kappa = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right| = \frac{R\omega^2}{(R\omega)^2+b^2} = σταθ.$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -R\omega^2\begin{bmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix} = R\omega^2\,\widehat{u}_{\mathrm{N}}$$

Η επιτάχυνση δεν έχει συνιστώσα παράλληλη στην τροχιά (επιτρόχια). Αναμενόμενο επειδή η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο και αλλάζει μόνο διεύθυνση.

4. Κίνηση κατά μήκος έλικας

$$\widehat{u_N} = \begin{bmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(R\,\omega)^2 + b^2}$$

$$\kappa = \frac{R\,\omega^2}{(R\,\omega)^2 + b^2}$$

---

* Εάν b=o $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\kappa = \frac{R\,\omega^2}{(R\,\omega)^2} = \frac{1}{R}}$,

Κίνηση σε κύκλο ακτίνας α

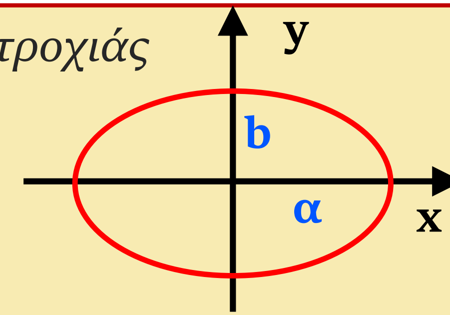
$$s(t) = \int_0^t |\vec{v}(t')|dt' = \sqrt{(R\,\omega)^2 + b^2}\,t$$

Διανυόμενη απόσταση

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

Εφαρμογή: *Μελέτη κινητού κινούμενου κατά μήκος ελλειπτικής τροχιάς*

$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix}, \qquad \omega > 0,$



$\vec{v}(t) = \omega\begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix}, \qquad$ Μέτρο ταχύτητας $\;|\vec{v}(t)| = \omega\sqrt{\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}$

Εφαπτόμενο μοναδιαίο $\quad \widehat{u_T} = \dfrac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}}\begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix}$

ή αλλιώς γραφουμε $\;\widehat{u_T} = \mathrm{A(t)}\begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A(t)} = (\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{-1/2}$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = \dot{\mathrm{A}}(t)\begin{bmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \end{bmatrix} - \omega\,\mathrm{A(t)}\begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathrm{A}}(t) = -\frac{1}{2}(\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{-\frac{3}{2}}(2\omega\alpha^2\sin\omega t\cos\omega t - 2\omega b^2\cos\omega t\sin\omega t)$$

$$= -\frac{1}{2}[(\alpha^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{-\frac{1}{2}}]^3\,[2\omega(\alpha^2 - b^2)\sin\omega t\cos\omega t]$$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

$$\dot{A}(t) = -\frac{1}{2}\left[(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-\frac{1}{2}}\right]^3 \left[2\omega(\alpha^2 - b^2)\sin \omega t \cos \omega t\right]$$

$$= -\omega(\alpha^2 - b^2)A(t)^3 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$\boxed{A(t) = (\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-1/2}}$$

Επομένως $\dfrac{d\widehat{u_T}}{dt} = \dot{A}(t)\begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix} - \omega\, A(t) \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix}$

$$= A(t)^3 \left\{ [-\omega(\alpha^2 - b^2)] \sin \omega t \cos \omega t \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix} - \omega \frac{1}{A(t)^2} \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix} \right\}$$

$$= A(t)^3 \left\{ [-\omega(\alpha^2 - b^2)] \sin \omega t \cos \omega t \begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix} - \omega [\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t] \begin{bmatrix} a \cos \omega t \\ b \sin \omega t \end{bmatrix} \right\}$$

$$= A(t)^3 (-\omega) \begin{bmatrix} \cancel{-\alpha^3 \sin^2 \omega t \cos \omega t} + ab^2 \sin^2 \omega t \cos \omega t + \cancel{\alpha^3 \sin^2 \omega t \cos \omega t} + ab^2 \cos^3 \omega t \\ ba^2 \sin \omega t \cos^2 \omega t \cancel{- b^3 \sin \omega t \cos^2 \omega t} + ba^2 \sin^3 \omega t \cancel{+ b^3 \sin \omega t \cos^2 \omega t} \end{bmatrix}$$

$$= A(t)^3 (-\omega) \begin{bmatrix} ab^2 \cos \omega t \,(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \\ ba^2 \sin \omega t \,(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \end{bmatrix} = A(t)^3 (-\omega) \begin{bmatrix} ab^2 \cos \omega t \\ ba^2 \sin \omega t \end{bmatrix}$$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

$$\boxed{A(t) = (\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{-1/2}}$$

$$\frac{d\widehat{u_T}}{dt} = A(t)^3\,(-\omega)\begin{bmatrix} ab^2 \cos \omega t \\ ba^2 \sin \omega t \end{bmatrix} = \frac{-\omega ab}{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}\begin{bmatrix} b \cos \omega t \\ a \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\omega ab}{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)}}\begin{bmatrix} b \cos \omega t \\ a \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right| = \frac{\omega ab}{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

$$\widehat{u_N} = -\frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 sin^2 \omega t + b^2 cos^2 \omega t)}}\begin{bmatrix} b\, cos\, \omega t \\ a\, sin\, \omega t \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\widehat{u_N} = \frac{\frac{d\widehat{u_T}}{dt}}{\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right|}}$$

$$\widehat{u_T} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}}\begin{bmatrix} -a \sin \omega t \\ b \cos \omega t \end{bmatrix}$$

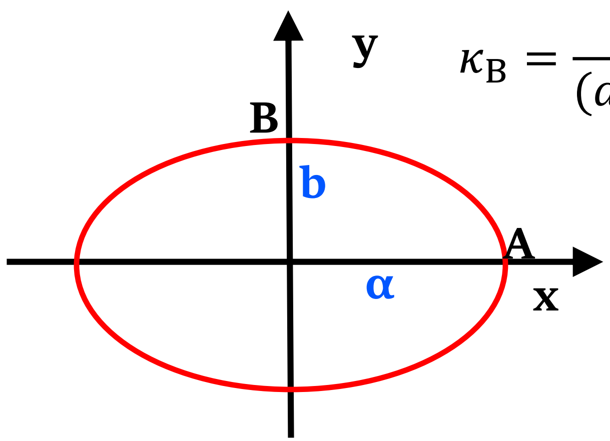
Εύκολα δείχνουμε $\widehat{u_N} \cdot \widehat{u_T} = 0 \Rightarrow \widehat{u_N} \perp \widehat{u_T}$

5. Κίνηση κατά μήκος έλλειψης

Άρα η καμπυλότητα είναι

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\left|\frac{d\widehat{u_T}}{dt}\right| = \frac{1}{\omega\sqrt{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}} \frac{\omega ab}{\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

$$= \frac{ab}{(\alpha^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{3/2}}$$



$$\kappa_B = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$$

$$\kappa_A = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$$

Αν α>b (π.χ. α=2b) τότε $\kappa_A = \frac{2}{b}$ & $\kappa_B = \frac{1}{4b}$. Άρα $\kappa_A = 8\kappa_B$. Στα υπόλοιπα σημεία της τροχιάς ισχύει $\kappa_B < \kappa < \kappa_A$. Άρα $\kappa \in [\frac{b}{a^2}, \frac{a}{b^2}]$

*Στο σημείο Α η μεγαλύτερη καμπυλότητα της τροχιάς είναι εμφανής. Εξαρτάται **<u>και</u>** από το b, όχι μόνο από το α/b. Όσο μειώνεται το b τόσο αυξάνεται η καμπυλότητα στο Α.*

- Στο σημείο Α έχουμε τη μέγιστη καμπυλότητα.
- Στο σημείο Β έχουμε την ελάχιστη καμπυλότητα.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{bmatrix}, \qquad \omega > 0}$$