

ΕΝΟΤΗΤΑ 8 : ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

Ευάγγελος Τυρλής

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Τομέας Φυσικής Περιβάλλοντος & Μετεωρολογίας

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΡΕΥΣΤΩΝ

- Ορισμός και κατηγορίες ρευστών
- Στατική & Δυναμική Ρευστών

1. ΙΔΕΑΤΑ ΡΕΥΣΤΑ

- Ορισμός
- Γραμμή ροής & συνάρτηση ροής για ιδεατά ρευστά

2. ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

- Απόδειξη
- Εφαρμογή

3. ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOLLI

- Απόδειξη
- Εφαρμογή

4. ΡΟΟΜΕΤΡΟ VENTOURI

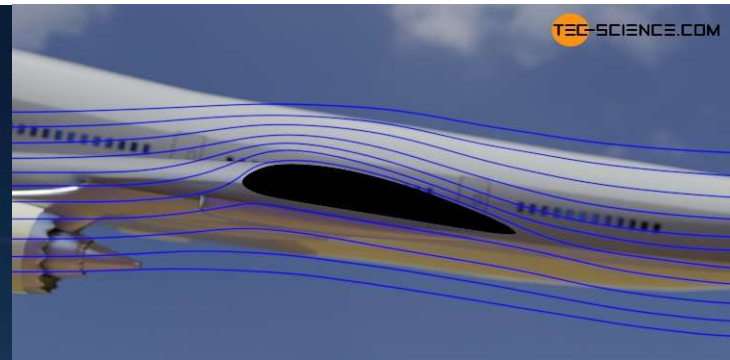
5. ΣΩΛΗΝΑΣ PITOT

Δυναμική Ρευστών

Δυναμική Ρευστών (Ρευστοδυναμική): Μελετά τη συμπεριφορά των ρευστών σε κίνηση.

Τα ρευστά συνήθως βρίσκονται σε συνεχή κίνηση. Οι μηχανικοί καλούνται να μελετήσουν τις συνέπειες της κίνησης των ρευστών ώστε:

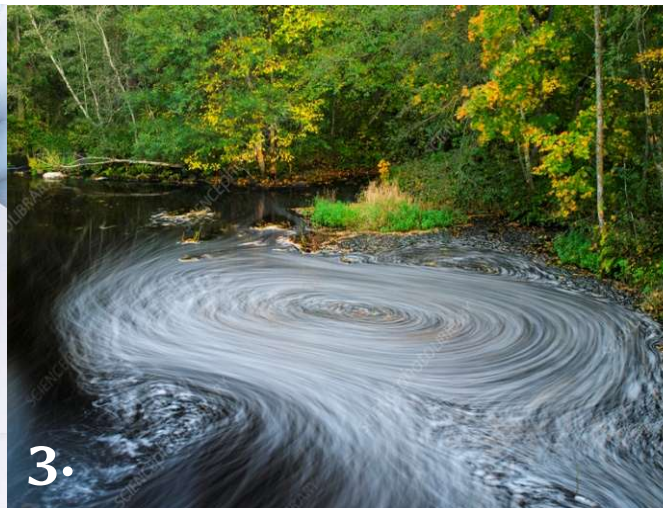
- Οι κατασκευές να μπορούν να αντέξουν τις συνέπειες πιέσεων λόγω της κίνησης ρευστών υπό ακραίες συνθήκες.
- Να εκμεταλλευτούν προς όφελος της ανθρωπότητας τα φαινόμενα που συνοδεύουν την κίνηση ρευστών.



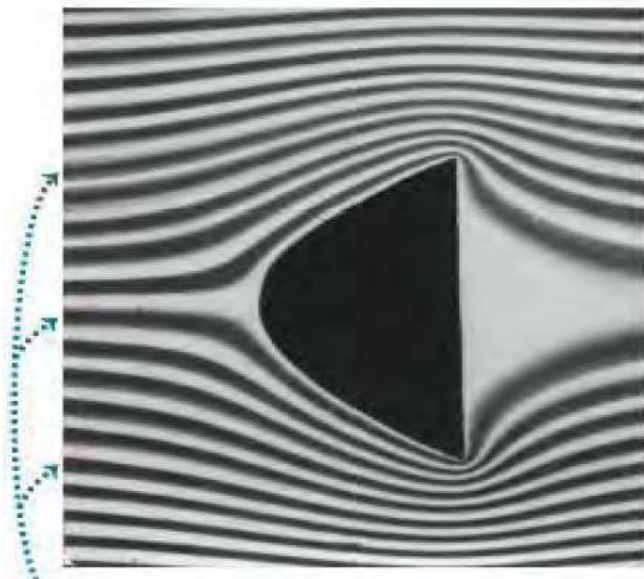
1. Ιδεατά Ρευστά

Τα **πραγματικά ρευστά** περιγράφονται από πολύπλοκες εξισώσεις που επιλύονται με Η/Υ. Παράδειγμα: *αριθμητική πρόγνωση καιρού*. Πολλές από τις ιδιότητές τους γίνονται κατανοητές με τη βοήθεια εξιδανικευμένων προτύπων **ιδεατών ρευστών**.

1. **Ασυμπιεστότητα** : σταθερή πυκνότητα ρευστού (ομογενές) $\Rightarrow \rho(x, y, z, t) = \rho_0$
2. **Χωρίς ιξώδες (no viscous drag)**: απουσία εσωτερικής τριβής μεταξύ των στρώσεων του ρευστού. Το ιξώδες αντιπροσωπεύει την αντίσταση ενός ρευστού στην κίνηση.
3. **Αστρόβιλη ροή** : δεν παρατηρείται περιστροφή τμημάτων του ρευστού.
4. **Μόνιμη ή στρωτή ροή (laminar)**: η ταχύτητα του κινούμενου ρευστού σε οποιοδήποτε σημείο του δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο $\Rightarrow \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(x, y, z)$.
Απότομη μεταβολή ταχύτητας ή εμπόδια οδηγούν στη μετάβαση σε **τυρβώδη ροή**.



1. Γραμμές ροής & σωλήνας ροής



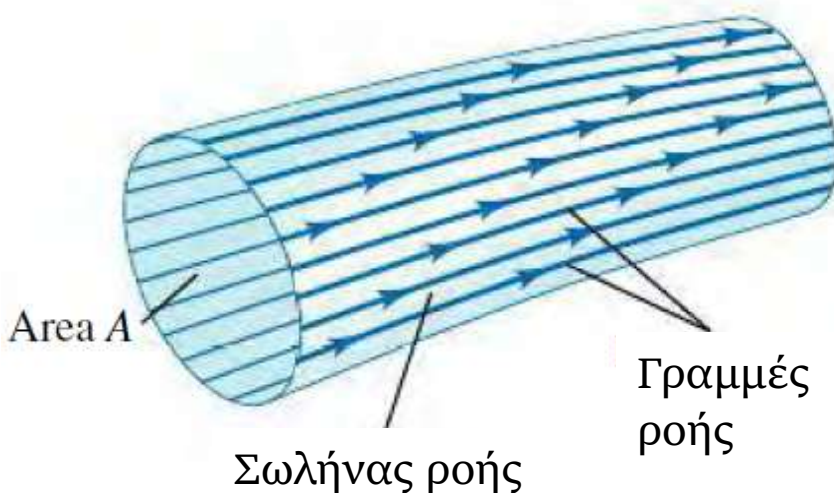
Dark-colored dye follows streamlines of laminar flow (flow is from left to right).

Γραμμή ροής (flow line) είναι η διαδρομή που ακολουθεί ένα “στοιχείο” του ρευστού. Σε σταθερή/μόνιμη ροή η εικόνα των γραμμών ροών δεν αλλάζει.

Η χρήση χρωματισμένου υγρού αποκαλύπτει τις γραμμές ροής.

Η διπλανή ροή είναι **στρωτή** (laminar).

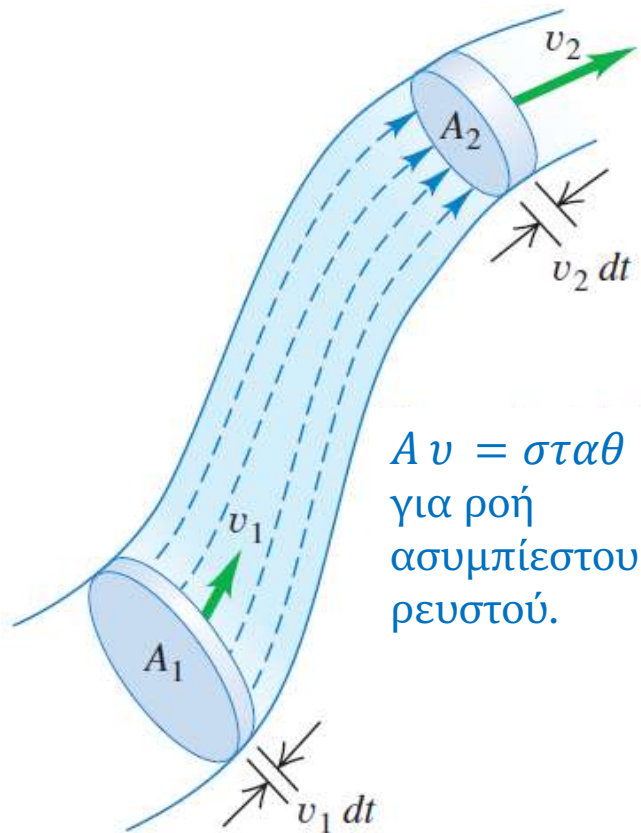
Μόνο σε μη μόνιμη/στρωτή ροή οι γραμμές ροής αλλάζουν.



Σωλήνας ροής: το σύνολο των γραμμών ροής οι οποίες διαπερνούν μια διατομή A και σχηματίζουν μια «φλέβα».

Σε στρωτή ροή οι γραμμές ροής δεν μπορούν να τέμνουν τον σωλήνα ροής

2. Εξίσωση συνέχειας



Θεωρούμε ένα σωλήνα ροής που ξεκινά από μια διατομή A_1 και καταλήγει γενικά σε διατομή A_2 .

Σε μικρό χρονικό διάστημα Δt , μόρια του ρευστού ακολουθούν τις γραμμές ροής και εισρέουν (εκρέουν) μέσω της A_1 (A_2) καλύπτοντας απόσταση $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$ ($\Delta x_2 = v_2 \Delta t$). Σχηματίζονται όγκοι εισροής $\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$ και εκροής $\Delta V_2 = A_2 v_2 \Delta t$.

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

Μάζα που εισρέει από την διατομή A_1 σε χρόνο Δt

$$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 \Delta x_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

Μάζα που εκρέει από την διατομή A_2 σε χρόνο Δt

Διατήρηση μάζας: Από τον ορισμό του σωλήνα ροής, σε μόνιμη ροή οι γραμμές ροής δεν διασχίζουν τα τοιχώματά του. Η μάζα ρευστού δεν μεταβάλλεται κατά τη ροή του.

Σε σωλήνα ροής $\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

$$\rho A v = \text{σταθ.}$$

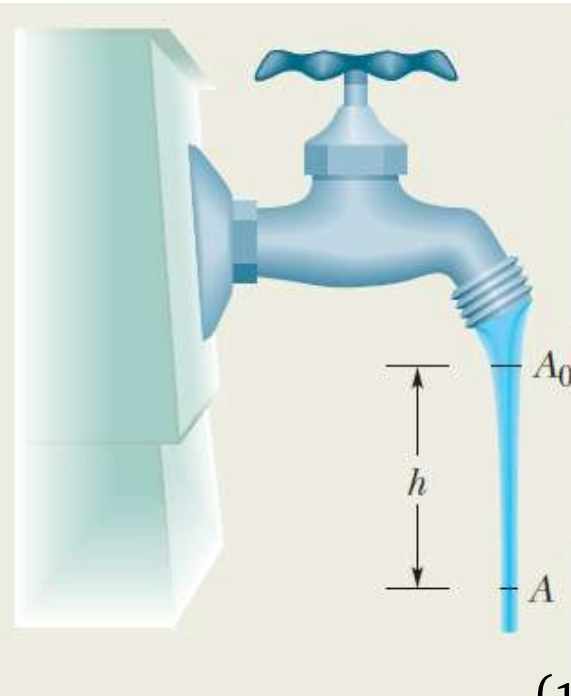
**Ασυμπίεστο
ρευστό**

$$A v = \text{σταθ.}$$

**Εξίσωση συνέχειας
ασυμπίεστου ρευστού**

Γενική μορφή εξίσωσης
συνέχειας συμπίεστου ρευστού

2. Εξίσωση συνέχειας: Παράδειγμα



Εξίσωση συνέχειας
ασυμπίεστου ρευστού

$$A_0 v_0 = A v \quad (1)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Λόγω του πεδίου
βαρύτητας

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A = A_0 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} < A_0$$

Παροχή όγκου:

$$\frac{dV}{dt} = A v$$

Η παροχή όγκου, δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο ο όγκος του ρευστού διέρχεται από μια διατομή A του σωλήνα, διατηρείται σταθερός.

Για να παραμείνει σταθερή η παροχή όγκου, όταν η διατομή του σωλήνα ροής μειώνεται τότε η ταχύτητα ροής αυξάνεται και αντιστρόφως. Παράδειγμα ποτάμι.

Καθώς το μέλι πέφτει,
η ταχύτητα ροής
αυξάνεται...



... και η
διατομή
της ροής
μειώνεται.

Η παροχή του ρευστού $\frac{dV}{dt} = A v$
παραμένει σταθερή.

3. Εξίσωση Bernoulli

$$A v = \text{σταθ.}$$

Η εξίσωση συνέχειας **ασυμπίεστου** ρευστού υποδεικνύει ότι η ταχύτητά του μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η διατομή του σωλήνα ροής.

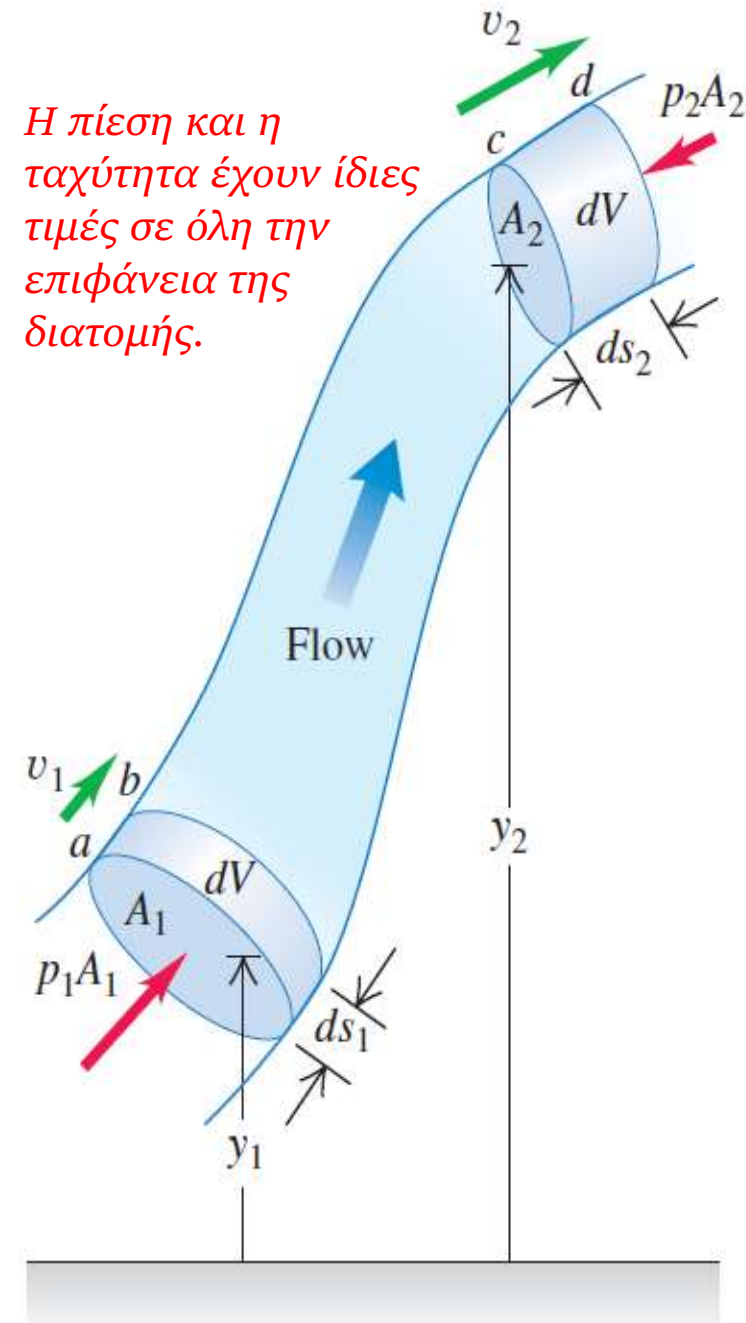
Θα δείξουμε ότι μεταβάλλεται και η πίεση, όχι μόνο εξαιτίας της μεταβολής του ύψους (στατική θεώρηση) αλλά λόγω της μεταβολής ταχύτητας του ρευστού.

Θεωρούμε στοιχείο του **ιδεατού** ρευστού σε τμήμα του σωλήνα ροής, το οποίο σε χρόνο Δt μετατοπίζεται από από τη θέση a - c (μεταξύ διατομών a & c) στη θέση b - d (μεταξύ b & d).

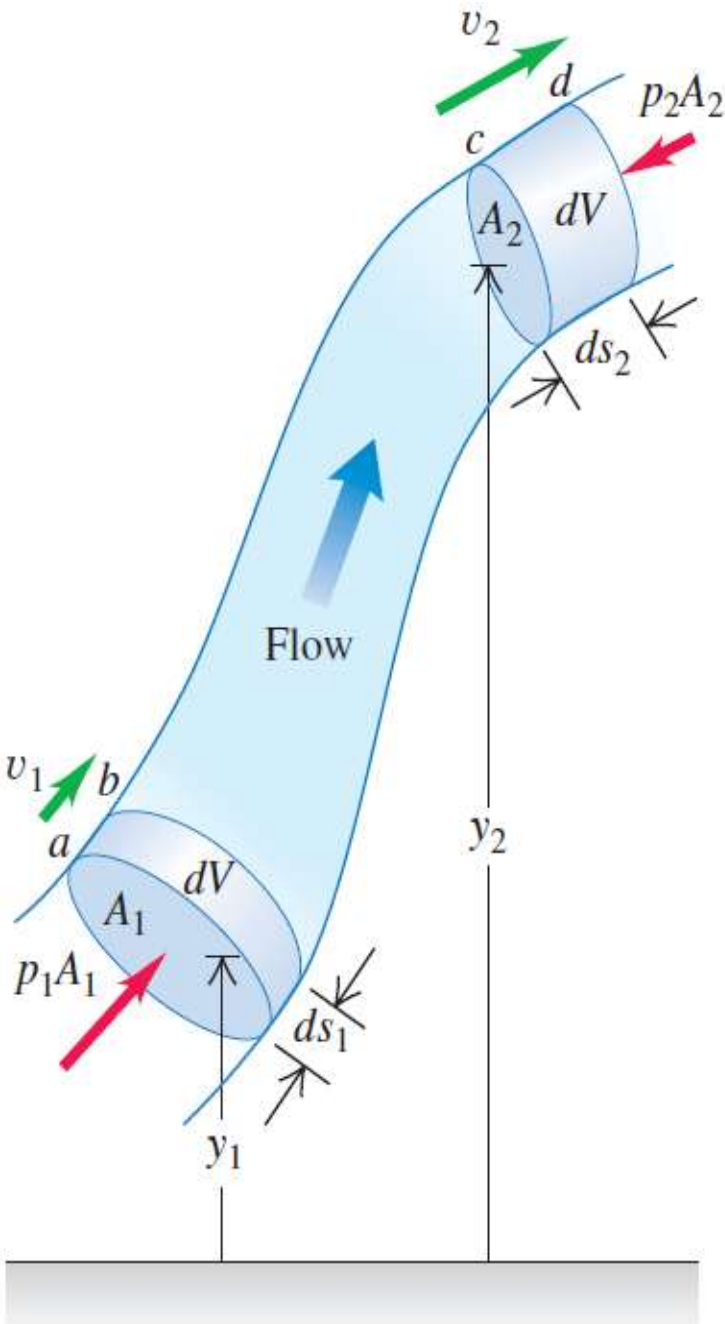
Η μετατόπιση ισοδυναμεί με μια συνολική **ανύψωση** του ρευστού μεταξύ διατομών a & b με μάζα $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A_1 v_1$ (ύψος y_1) στη θέση μεταξύ c & d (ύψος y_2).

Εξίσωση συνέχειας: $dV = A_1 ds_1 = A_2 ds_2$

Ο όγκος ρευστού που διέρχεται από την διατομή A_1 σε χρόνο Δt είναι ίσος με αυτόν που διέρχεται από την A_2 .



3. Εξίσωση Bernoulli



Θεώρημα έργου – ενέργειας: Το έργο που παράγεται επί ενός σώματος ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

$$W_{total} = K_{t+\Delta t} - K_t = \Delta K \quad (3)$$

Μεταβολή κινητικής ενέργειας

$$K_t = K_{a-b} + K_{b-c} \quad K_{t+dt} = K_{b-c} + K_{c-d}$$

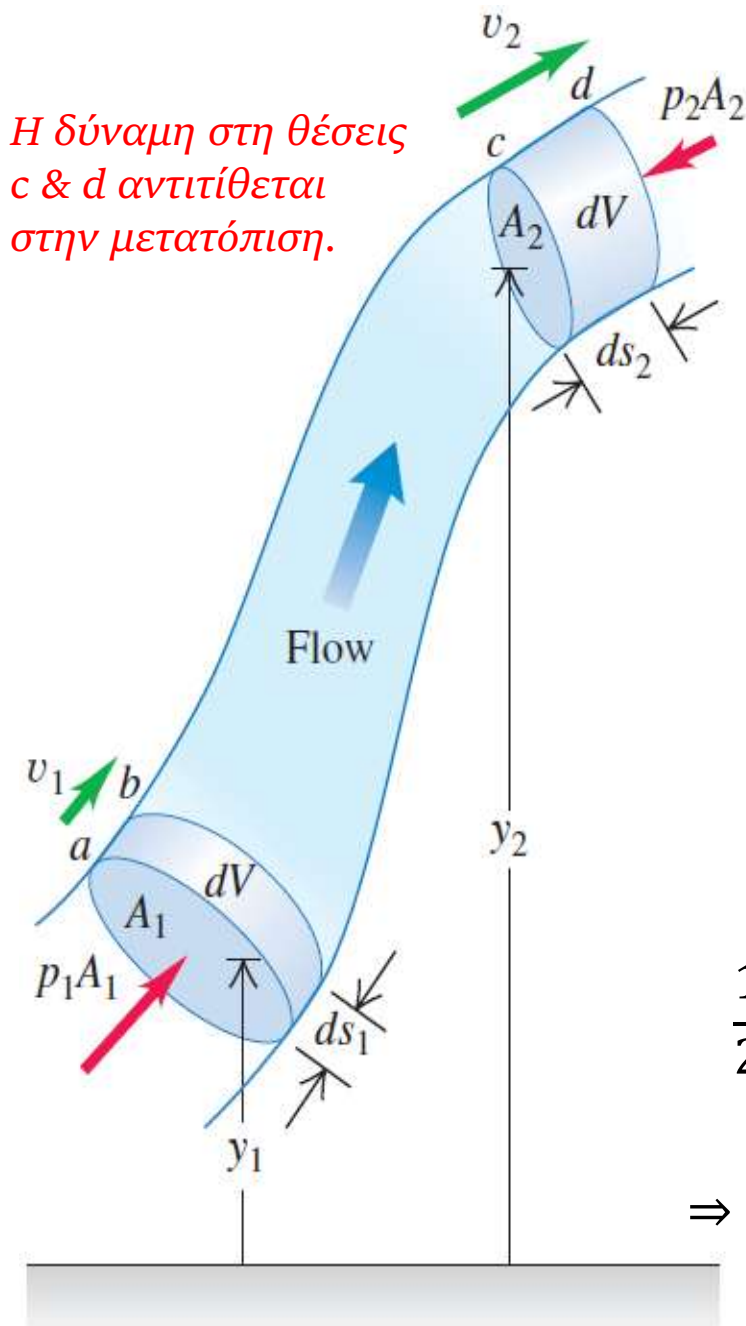
$$\Delta K = K_{b-c} + K_{c-d} - K_{a-b} - K_{b-c} = K_{c-d} - K_{a-b}$$

$$= \frac{1}{2} (dm) v_2^2 - \frac{1}{2} (dm) v_1^2 \quad (4)$$

Επειδή η ροή είναι μόνιμη, η κινητική ενέργεια στο τμήμα του ρευστού “b-c” παραμένει σταθερή στο χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$.

Θα μπορούσε να το δείξει αυτό κάποιος ‘τεμαχίζοντας’ το τμήμα αυτό σε μικρά dm .

3. Εξίσωση Bernoulli



Συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχείο του ρευστού από το περιβάλλον κατά την μετατόπιση (a-c $\Rightarrow$ b-d):

Βαρυτική δύναμη:

$$W_g = -(dm) g (y_2 - y_1) \quad (5)$$

Πίεση από το περιβάλλον ρευστό:

$$W_p = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 = p_1 dV - p_2 dV = (p_1 - p_2) dV \quad (6)$$

Εφαρμογή θεωρήματος έργου-ενέργειας

$$(3) - (6) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (dm) v_2^2 - \frac{1}{2} (dm) v_1^2 = -(dm) g (y_2 - y_1) + (p_1 - p_2) dV$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{dm}{dV} \right) v_2^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dm}{dV} \right) v_1^2 = - \left(\frac{dm}{dV} \right) g (y_2 - y_1) + (p_1 - p_2)$$

Η μετατόπιση του στοιχείου ισοδυναμεί με ανύψωση της μάζας dm από την a-b στη θέση c-d. Σε **μόνιμη ροή** οι ιδιότητες του ρευστού στο τμήμα b-c δεν αλλάζουν.

3. Εξίσωση Bernoulli

Η δύναμη στη θέσεις c & d αντιτίθεται στην μετατόπιση.

Μεταβολή πίεσης λόγω αλλαγής ταχύτητας

Μεταβολή πίεσης λόγω βάρους ρευστού και διαφορά ύψους στα άκρα.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1)$$

Δεν ισχύει μόνο για τα άκρα του σωλήνα αλλά και για οποιαδήποτε σημεία 1 και 2 του ρευστού

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Ύψος στοιχείου ρευστού πάνω από κάποιο σημείο αναφοράς

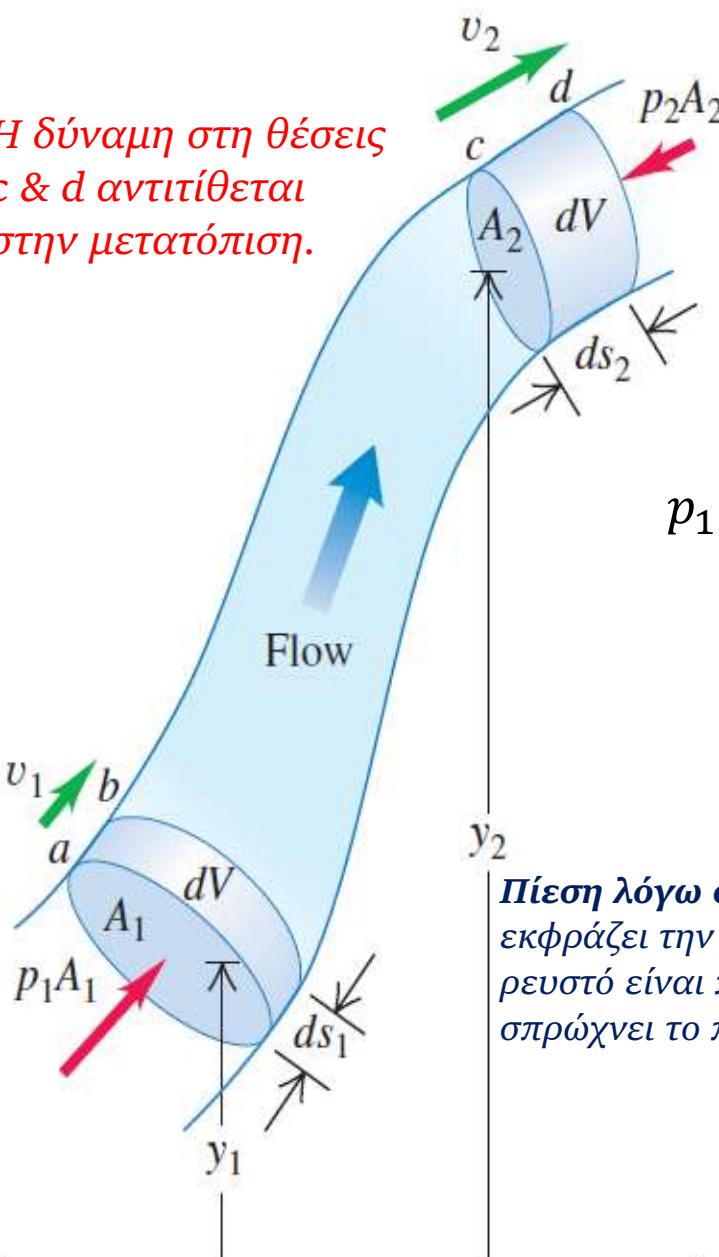
$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{σταθερό.}$$

Πίεση λόγω συμπίεσης: εκφράζει την πίεση επειδή το ρευστό είναι περιορισμένο και σπρώχνει το περιβάλλον του

Όρος θέσης: Η κίνηση επηρεάζει την πίεση.

Όρος θέσης: Το ύψος επηρεάζει την πίεση.

Εξίσωση Bernoulli: “Το άθροισμα των 3 όρων παραμένει σταθερό μήκος ενός σωλήνα ροής.”
Η πίεση σε ένα ρευστό προέρχεται από διαφορετικές αιτίες!
Η πίεση δεν χάνεται απλώς αλλάζει μορφή!



3. Εξίσωση Bernoulli

Η δύναμη στη θέσεις c & d αντιτίθεται στην μετατόπιση.

Μεταβολή πίεσης λόγω αλλαγής ταχύτητας

Μεταβολή πίεσης λόγω βάρους ρευστού και διαφορά ύψους στα άκρα.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1)$$

Δεν ισχύει μόνο για τα άκρα του σωλήνα αλλά και για οποιαδήποτε σημεία 1 και 2 του ρευστού

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{σταθερό.}$$

Στατική Πίεση: μετριέται με μανόμετρο, αρκεί να μην διαταραχθεί η ροή

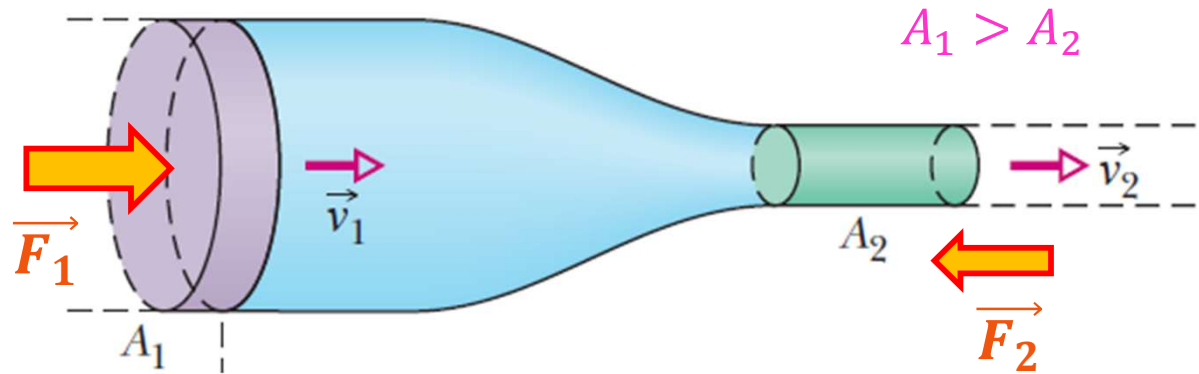
Αναδύεται λόγω ροής

Αναδύεται λόγω ύπαρξης πεδίου βαρύτητας

Εξίσωση Bernoulli: “Η πίεση μεταβάλλεται λόγω κίνησης και ύπαρξης πεδίου βαρύτητας.”
 Ισχύει μόνο για στρωτή ροή, ασυμπίεστου υγρού χωρίς ιξώδες! Δεν αναφέρεται στην μεταβολή της ταχύτητας αλλά στις αιτίες της πίεσης!

3. Εξίσωση Bernoulli: Διερεύνηση

Οριζόντιος σωλήνας μεταβλητής διατομής



$$F_2 = A_2 p_2$$

$$F_1 = A_1 p_1$$

Ασυμπίεστο ρευστό
ρέει στον σωλήνα.

Εξίσωση συνέχειας
ασυμπίεστου υγρού

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

Στοιχείο ιδανικού ρευστού που
ρέει σε οριζόντιο σωλήνα που
στενεύει πρέπει να επιταχύνει!

$$v_2 > v_1$$

Εξίσωση Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left\{ -1 + \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right\} \Rightarrow p_1 > p_2$$

$$F_1 = A_1 p_1 > A_2 p_2 = F_2$$

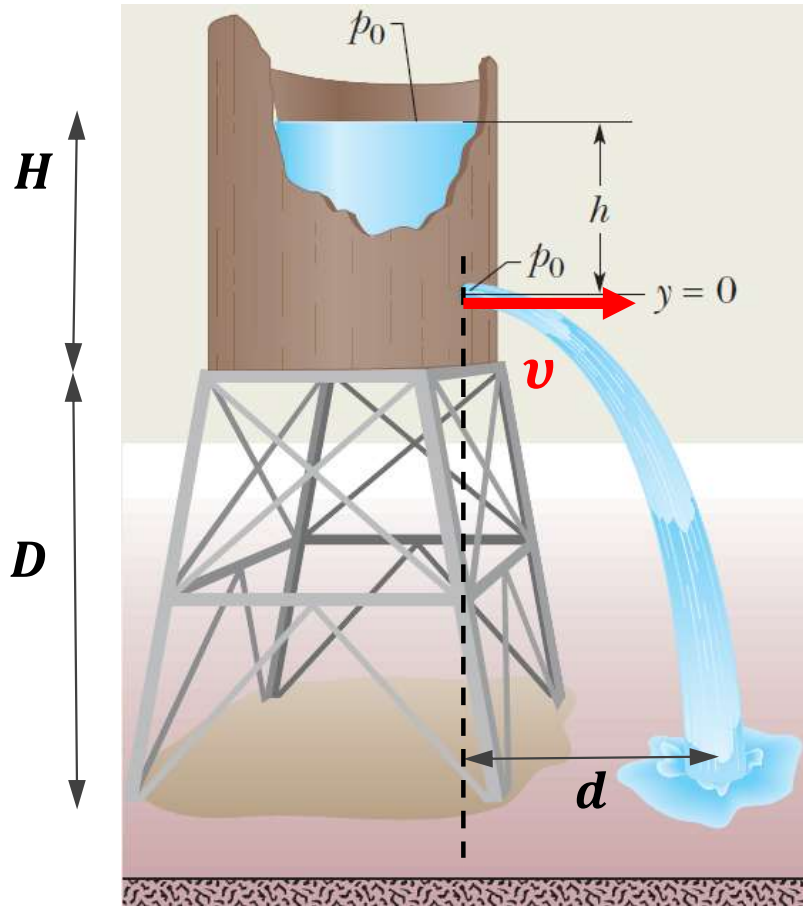
Ασκείται συνισταμένη δύναμη
προς τα εμπρός.

Η στατική πίεση ξοδεύεται για να σπρώξει το ρευστό: πρέπει να κινηθεί σε περιοχή χαμηλότερης στατικής πίεσης, ώστε να υπάρχει συνισταμένη δύναμη προς εμπρός που το επιταχύνει.

3. Εξίσωση Bernoulli: Εφαρμογή

Νερό διαρρέει από οπή σε δεξαμενή. Η οπή βρίσκεται απόσταση h κάτω από την επιφάνεια του νερού. Το ύψος νερού στη δεξαμενή είναι H . Η βάση της βρίσκεται σε ύψος D .

Να βρεθούν i) η ταχύτητα εκροής του νερού u και ii) ο χρόνος πτώσης έως το έδαφος.



Διατομή δεξαμενής: A

Διατομή οπής: α

Θεωρούμε ότι το νερό ρέει προς τα κάτω σε ένα σωλήνα ροής (δεξαμενή) με διατομή εισόδου A (ταχύτητα v_0) και διατομή εξόδου a (ταχύτητα v).

Επίσης η (στατική) πίεση στην επιφάνεια του νερού και στην οπή είναι p_0 . Και τα δύο σημεία σε ατμοσφαιρική πίεση.

i) Υπολογισμός ταχύτητα εκροής

$$\text{Εξίσωση συνέχειας: } A v_0 = \alpha v \Rightarrow v_0 = \frac{\alpha}{A} v \quad (7)$$

Επειδή $A \gg \alpha \Rightarrow v_0 \rightarrow 0$ *Ρευστό σχεδόν ακίνητο στο επάνω μέρος της δεξαμενής.*

Εξίσωση Bernoulli: $p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$ **(8)** *Επίπεδο αναφοράς με μηδενικό ύψος ($y=0$) είναι αυτό της οπής.*

Είσοδος: επιφάνεια

Έξοδος: οπή

3. Εξίσωση Bernoulli: Εφαρμογή

Από (7), (8) για $A \gg \alpha \Rightarrow v_0 \rightarrow 0$

$$v = \sqrt{2gh}$$

ii) Υπολογισμός χρόνου πτώσης τ & d

Μελέτη στη διεύθυνση y

$$mg = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow g \int_0^t dt' = \int_0^v \frac{dv'}{dt'} dt' \Rightarrow v = gt$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = gt \Rightarrow \int_0^y \frac{dy'}{dt'} dt' = g \int_0^t t' dt' \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2$$

Επομένως

$$\tau = \sqrt{\frac{2(H - h + D)}{g}}$$

Μελέτη στη διεύθυνση x

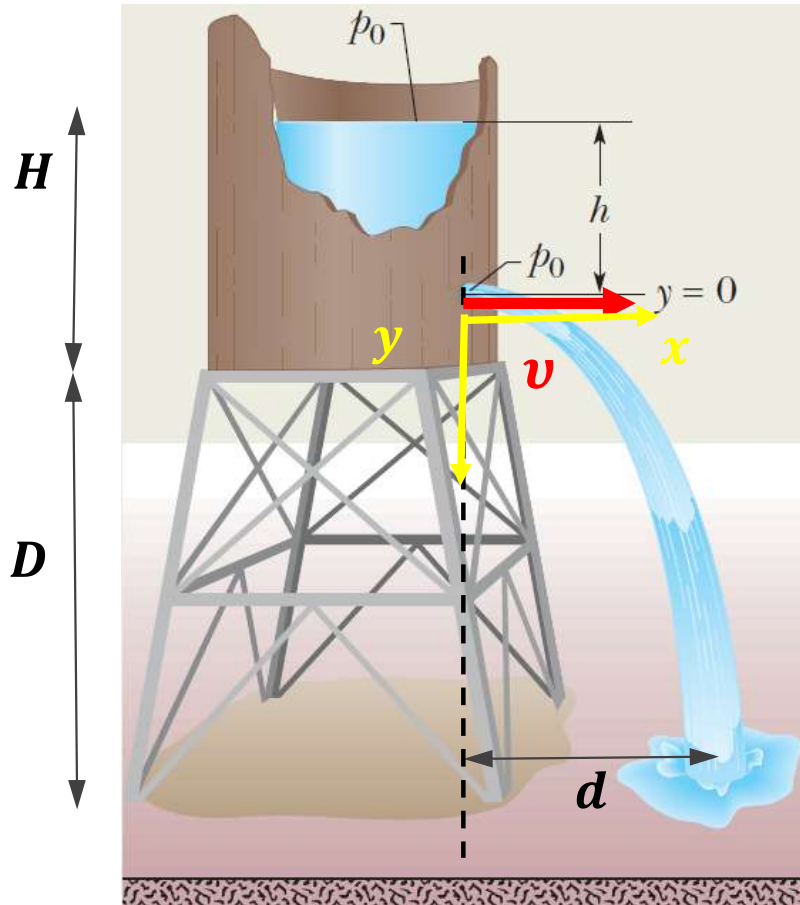
$$0 = m \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow \int_v^u \frac{du'}{dt'} dt' = 0 \Rightarrow u - v = 0$$

$$\Rightarrow u = v \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \int_0^x \frac{dx'}{dt'} dt' = v \int_0^t dt' \Rightarrow x = vt$$

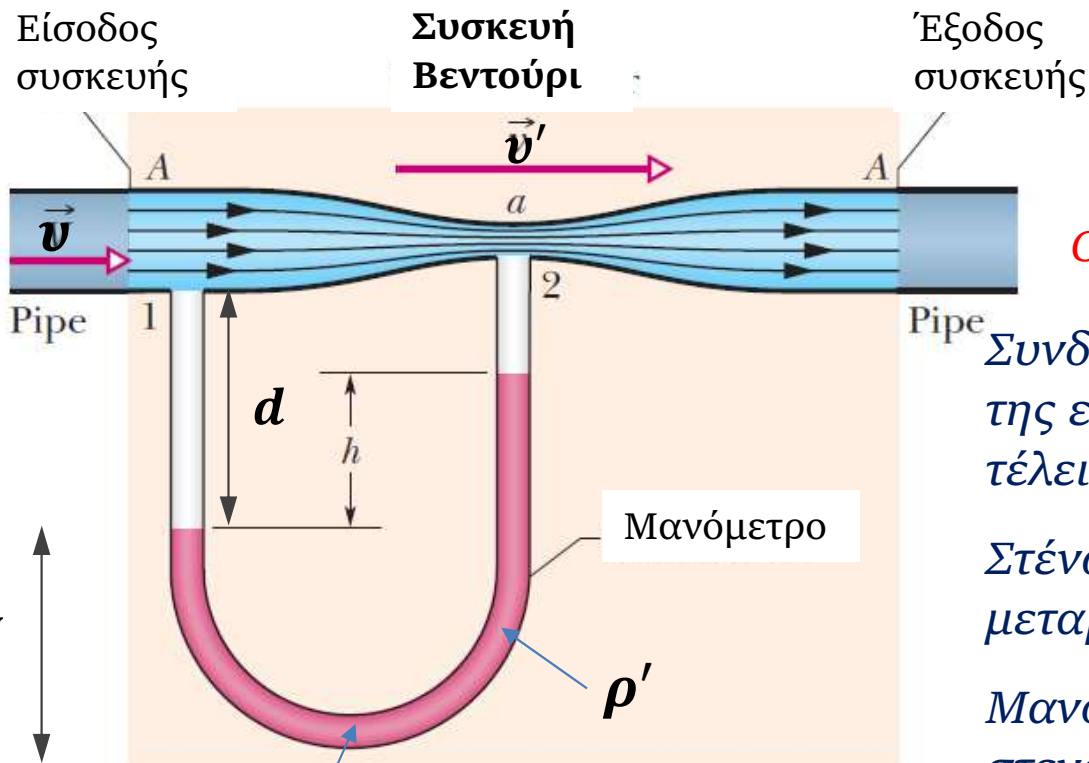
Επομένως $d = v\tau \Rightarrow$

$$d = 2\sqrt{h(H - h + D)}$$

$$\text{Αν } D = 0 \Rightarrow d = 2\sqrt{h(H - h)}$$



4. Ροόμετρο Ventouri (Βεντουρίμετρο)



Συσκευή μέτρησης της ταχύτητας ρευστού (v) σε σωλήνα διατομής A .

Οριζόντιος σωλήνας ($y_1 = y_2$)

Συνδέεται σε 2 σημεία στον σωλήνα. Η διατομή της εισόδου & εξόδου της συσκευής εφαρμόζει τέλεια στην διατομή του σωλήνα.

Στένωμα της συσκευής με διατομή a αναγκάζει μεταβολή της ταχύτητας ροής σε v' .

Μανόμετρο συνδέει το πλατύτερο με το στενότερο σημείο για μέτρηση πίεσης.

Η διαφορά στατικής πίεσης στα σημεία 1 & 2 προκαλεί διαφορά στο ύψος του ρευστού στις στήλες

Εξίσωση συνέχειας: $A v = a v'$ (9)

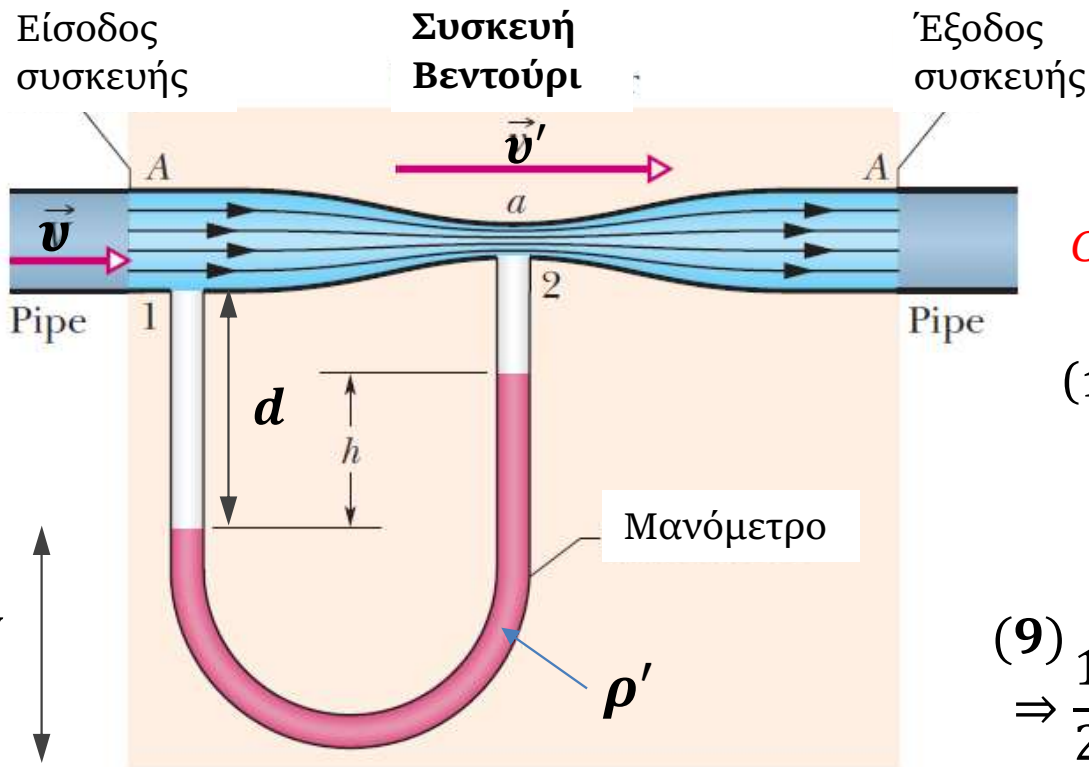
Εξίσωση Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v'^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v'^2 - v^2)$ (10)

Ρευστό σε στατική ισορροπία στο μανόμετρο $p_1 + \rho' g H + \rho g d = p_2 + \rho' g (H + h) + \rho g (d - h)$

$p = p_0 + \rho g h$

$\Rightarrow p_1 - p_2 = g h (\rho' - \rho)$ (11)

4. Ροόμετρο Ventouri (Βεντουρίμετρο)



Συσκευή μέτρησης της ταχύτητας ρευστού (v) σε σωλήνα διατομής A .

Οριζόντιος σωλήνας ($y_1 = y_2$)

(10), (11) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \rho (v'^2 - v^2) = gh(\rho' - \rho)$$

$$(9) \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 \left\{ \left(\frac{A}{a} \right)^2 - 1 \right\} = gh(\rho' - \rho)$$

Εναλλακτική έκφραση η οποία δεν κάνει χρήση της πυκνότητας ρευστού στο μανόμετρο (ρ').

$$\Delta p = p_2 - p_1 = gh(\rho - \rho') = -gh(\rho' - \rho)$$

$$gh(\rho' - \rho) = -\Delta p$$

$\nearrow > 0$
 $\nwarrow < 0$

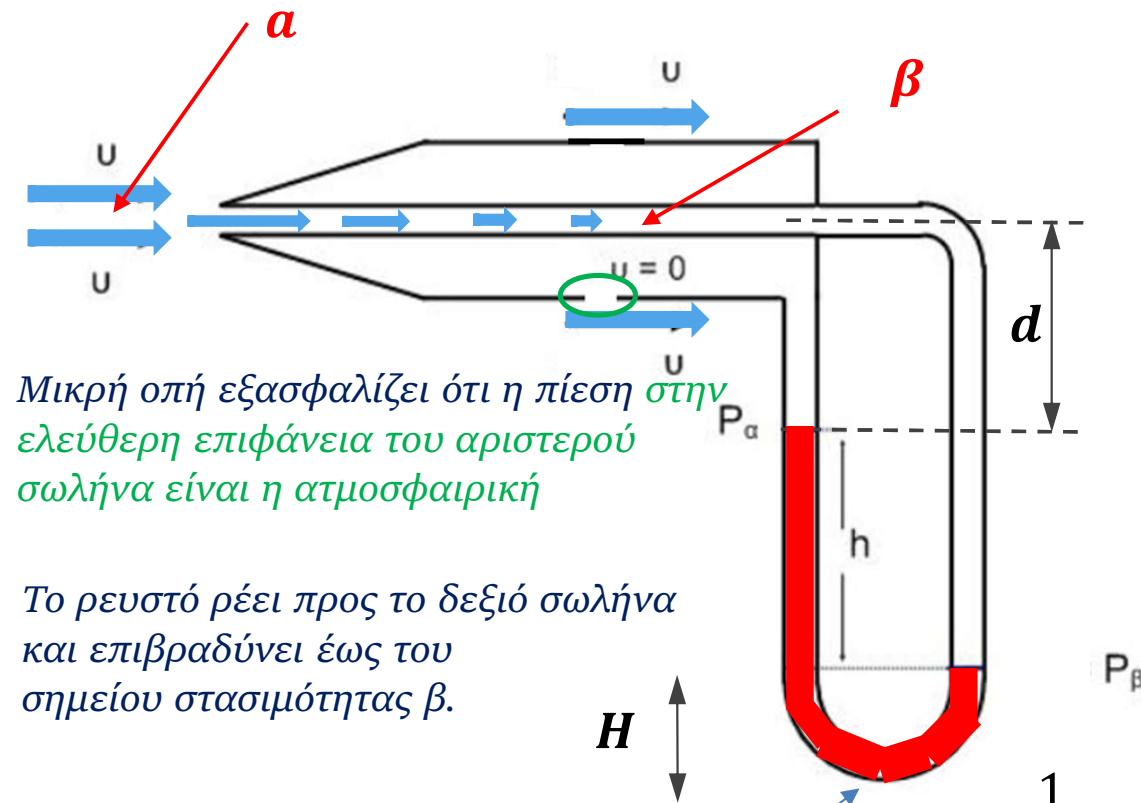
$$v = \alpha \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(\alpha^2 - A^2)}}$$

Προσοχή άλλαξε σε $\alpha^2 - A^2$

$$v = \alpha \sqrt{\frac{2gh(\rho' - \rho)}{\rho(A^2 - \alpha^2)}}$$

Με τη συσκευή εκμεταλλευόμαστε την **πτώση της στατικής πίεσης** στα σημεία της **ροής με μεγάλη ταχύτητα** ώστε να μετρήσουμε την ταχύτητα ροής μακριά τη στένωση.

5. Σωλήνας Pitot



Συσκευή μέτρησης της ταχύτητας ρευστού (u).

Σημείο α : ροή με ταχύτητα $u_\alpha = u$

Σημείο β : σημείο στασιμότητας $u_\beta = 0$

Μικρή οπή εξασφαλίζει ότι η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του αριστερού σωλήνα είναι η ατμοσφαιρική

Το ρευστό ρέει προς το δεξιό σωλήνα και επιβραδύνει έως του σημείου στασιμότητας β .

Η διαφορά στις στήλες του μανομέτρου είναι ανάλογη της διαφοράς μεταξύ της στατικής και ολικής πίεσης (στατική + δυναμική)

Εξίσωση Bernoulli για σημεία α & β :

Ρευστό σε στατική ισορροπία στο μανόμετρο

$$p_\alpha + \frac{1}{2} \rho u^2 = p_\beta \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_\beta - p_\alpha)} \quad (12)$$

$$p_\alpha + \rho' gh + \cancel{\rho' gH} = p_\beta + \cancel{\rho' gH} \Rightarrow p_\beta - p_\alpha = \rho' gh \quad (13)$$

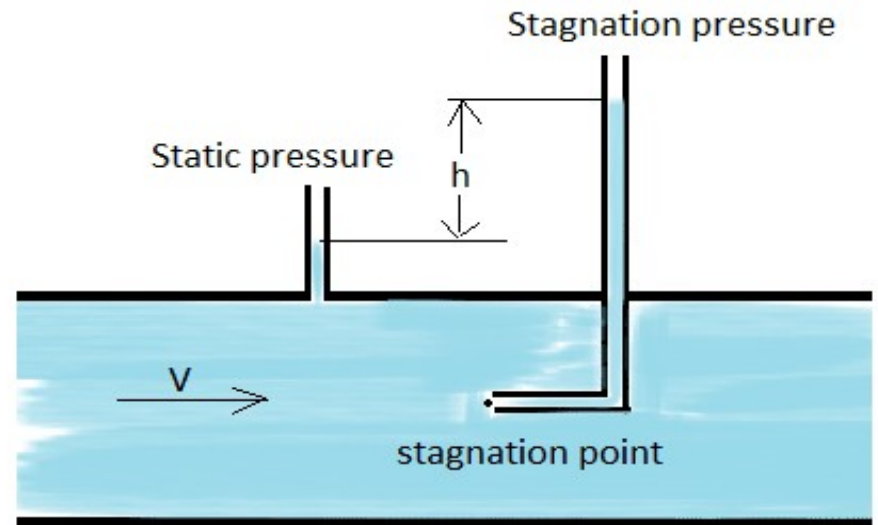
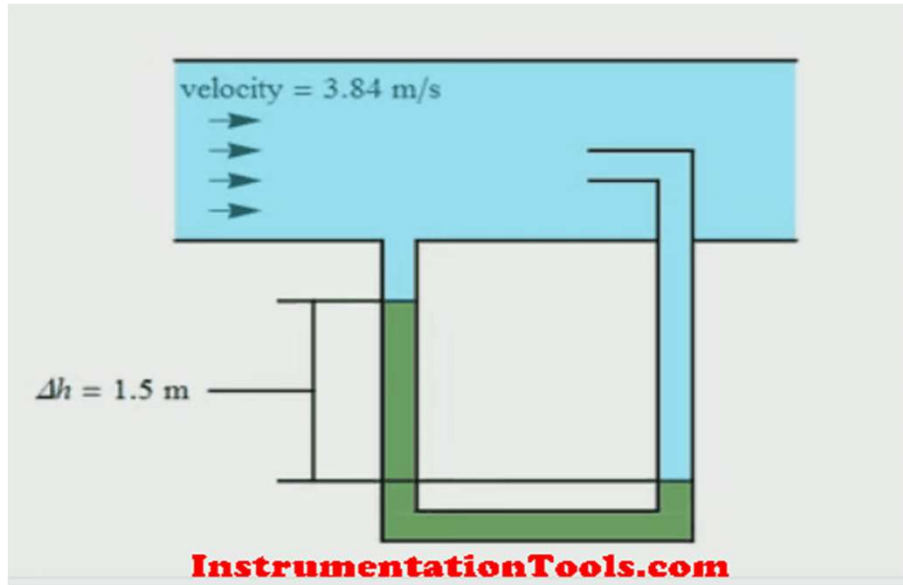
(12), (13) $\Rightarrow$

(12), (13) $\Rightarrow$

$$u = \sqrt{2gh \frac{\rho'}{\rho}}$$

5. Σωλήνας Pitot

Εναλλακτικές διατάξεις



Η διαφορά στις στήλες του μανομέτρου είναι ανάλογη της διαφοράς μεταξύ της στατικής και ολικής πίεσης (στατική + δυναμική).

Ο σωλήνας Pitot βρίσκει εφαρμογή στα αεροπλάνα για την μέτρηση της κίνησης του αεροπλάνου ως προς τα ατμοσφαιρικά στρώματα που το περιβάλλουν (όχι ως προς την επιφάνεια της Γης).

