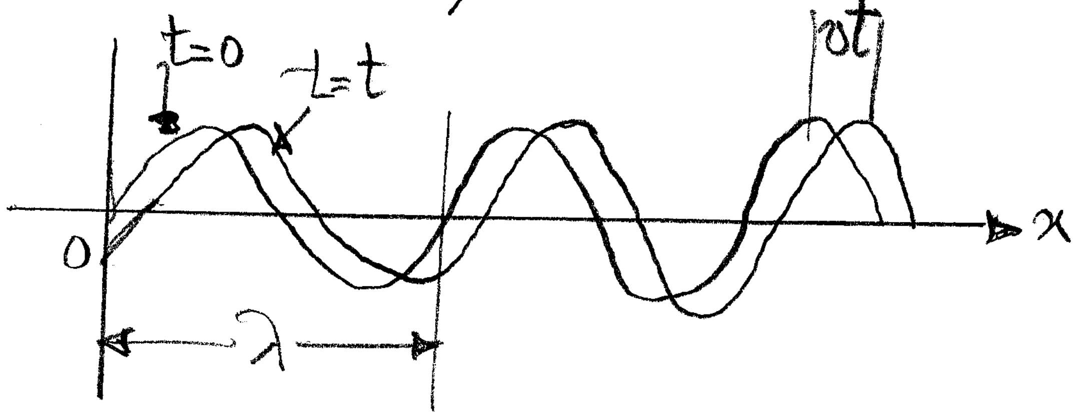
Αρμονικά κύματα

$\psi(x,t=0) = A \sin kx$, A: πλάτος



$$\psi(x,t) = A \sin k(x - \upsilon t)$$

Θα ισχύουν $\psi(x+\lambda, t) = \psi(x,t)$

$\psi(x, t+T) = \psi(x,t)$

$\longrightarrow \quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \quad$ και $\quad k\upsilon = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \omega$

$\longrightarrow \quad \psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$

Θα είναι: $\upsilon = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$

Γενικώς: $\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$

Φάση: $\varphi = kx - \omega t$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t = k \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x = -\omega$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi = \frac{-\left(\partial \varphi / \partial t\right)_x}{\left(\partial \varphi / \partial x\right)_t} = \frac{\omega}{k} = v \equiv v_g$$

<u>Μιγαδική ἀναπαράσταση ἁρμονικῶν κυμάτων</u>

Λόγω τοῦ $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

γράφουμε $\psi(x,t) = A\, e^{i(kx - \omega t)}$

τό ὁποῖο ἐπιτρέπει πιό εὔκολους ὑπολογισμούς μέ τά κύματα. Στό τέλος λαμβάνουμε τό $\mathrm{Re}\,\psi(x,t)$.

Πιό πολύπλοκα κύματα μπορούν νά γραφούν ὡς ὑπέρθεση (γραμμικός συνδυασμός) ἁρμονικών.

γενικώς: $\psi(x,t) = \int A(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk$

Στάσιμα κύματα

Ἄς θεωρήσουμε τόν συνδυασμό:

$$\psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t)$$

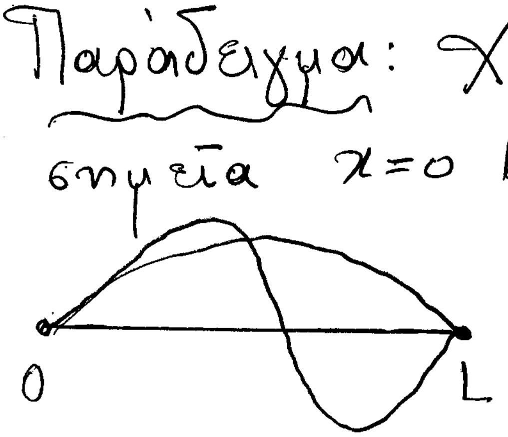
δηλ. δύο κύματα μέ ἴδιο πλάτος πού ταξιδεύουν σέ ἀντίθετες κατευθύνσεις.

$$\Rightarrow \quad \psi(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

τό ὁποῖο εἶναι ἕνα στάσιμο κῦμα.

Στά σημεῖα μέ $kx = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$ τό πλάτος εἶναι πάντα 0.

Παράδειγμα: Χορδή στερεωμένη ($\psi=0$) στά σημεῖα $x=0$ καί $x=L$



Πρέπει $L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$

Π.χ. φρέαρ : $\lambda = \frac{2L}{n}$

Επίσης $\frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{\lambda^2}\frac{1}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8 m L^2}$

Σωματίδια με κυματική φύση

Planck: $E = h \cdot \nu = \hbar \omega$

De Broglie: $\lambda = \frac{h}{p}$

$\longrightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \Longrightarrow p = \hbar k$ ή $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

$$\Psi(x,t) = A e^{i(kx-\omega t)} = A e^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\Psi(x,t) \Rightarrow i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$$

$$\rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{P^2}{2m} + V\right)\Psi$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{P^2}{\hbar^2}\Psi(x,t)$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{P^2\Psi}{2m} + V\Psi =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

$\longrightarrow$ Schrödinger

$$\text{3-D}: \quad \Psi(\vec{r},t) = A\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}$$

$$\rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\vec{r})\Psi$$

Πιθανότητα και ρεύμα πιθανότητος

$$dP(\vec{r},t) = |\Psi(\vec{r},t)|^2 d^3r$$

$$\frac{\partial P(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\Psi^* \cdot \Psi) = \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = \left(\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 + \frac{V}{i\hbar}\right)\Psi$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \left(-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 - \frac{V}{i\hbar}\right)\Psi^*$$

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \Psi\left(-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\right)\Psi^* - \frac{\Psi V \Psi^*}{i\hbar} +$$

$$+ \Psi^*\left(\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi\right) + \frac{\Psi^* V \Psi}{i\hbar} =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*\right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[\vec{\nabla}\cdot\left[(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi) - (\Psi\vec{\nabla}\Psi^*)\right]\right]$$

Θέτω: $$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\vec{\nabla}\Psi^* - \Psi^*\vec{\nabla}\Psi\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial P(\vec{r},t)}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)$$ Εξίσωση συνεχείας.

Π.χ. Σε μία διάσταση

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} j(x,t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}P_{ab} = \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b P\,dx = -\int_a^b \frac{\partial j(x,t)}{\partial x}dx = j(a,t) - j(b,t)$$

Τό ἐλεύθερο σωματίδιο

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -k^2\varphi(x), \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Λύση: $\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

$$\rightarrow \Phi(x,t) = \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx}\right) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

$$= A e^{i(kx-\omega t)} + B e^{-i(kx+\omega t)}$$

Δύο κύματα πού ταξιδεύουν $\xrightarrow{+x}$ και $\xleftarrow{-x}$

Τό ρεῦμα πιθανότητος: $j = j_+ + j_-$

$$j_+ = \frac{i\hbar}{2m}|A|^2\left(e^{+ikx}(-ik)e^{-ikx} - e^{-ikx}(ik)e^{ikx}\right)$$

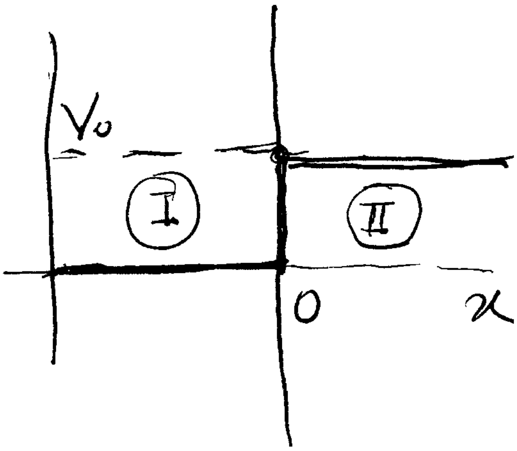
$$= \frac{\hbar k}{m}|A|^2$$

Ὁμοίως $j_- = -\frac{\hbar k}{m}|B|^2$

$$\left.\begin{matrix} j_+ = \frac{\hbar k}{m}|A|^2 \\ j_- = -\frac{\hbar k}{m}|B|^2 \end{matrix}\right\} \; j = \frac{\hbar k}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right)$$

Σκαλοπάτι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ V_0, & x>0 \end{cases}$$



1.) $E > V_0$

I $\quad \varphi_I(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}, \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

II $\quad \varphi_{II}(x) = A' e^{ik_2 x} + B' e^{-ik_2 x}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

Θέτουμε $B'=0$ διότι
δέν έρχεται σωματίδιο από δεξιά

Πρέπει στη θέση $x=0$: $\varphi_I(0) = \varphi_{II}(0)$

$\varphi_I'(0) = \varphi_{II}'(0)$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} A + B = A' \\ ik_1 A - ik_1 B = ik_2 A' \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} A+B = A' \\ k_1(A-B) = k_2 A' \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{B}{A} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}, \quad \frac{A'}{A} = \frac{2k_1}{k_1+k_2}$$

Ὁρίζω τόν συντελεστή ἀνακλάσεως (reflection)

$$R = \frac{j_-}{j_+} = \frac{\frac{k_1 \hbar}{m}|B|^2}{\frac{k_1 \hbar}{m}|A|^2} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$$

καί τόν συντελεστή διαπερατότητος (transmission)

$$T = \frac{\frac{k_2 \hbar}{m}|A'|^2}{\frac{k_1 \hbar}{m}|A|^2} = \frac{k_2}{k_1}\left|\frac{A'}{A}\right|^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει πιθανότης ἀνακλάσεως ἔστω καί ἄν $E > V_0$.

Βεβαίως ἐάν $E >> V_0$ τότε $k_1 \simeq k_2$

καί $R \simeq 0$ ἐνῶ $T \simeq 1$.

Ἰσχύει πάντα ὅτι $R + T = 1$.

2.) $E < V_0$

$$\varphi_I = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$$

II

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_{II}}{dx^2} + V_0\varphi_{II} = E\varphi_{II}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2\varphi_{II}}{dx^2} = \left(+\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\right)^2\varphi_{II}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2\varphi_{II}}{dx^2} = \rho^2\varphi_{II}$$

$$\longrightarrow \varphi_{II}(x) = A' e^{\rho x} + B' e^{-\rho x}$$

Πρέπει $A' = 0$ διότι αλλιώς γιά $x \to \infty$, $\varphi_{II} \to \infty$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} A + B &= B' \\ ik_1(A - B) &= -\rho B' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A + B &= B' \\ A - B &= \frac{i\rho}{k_1} B' \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{B}{A} = \frac{k_1 - i\rho}{k_1 + i\rho} \qquad \frac{B'}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + i\rho}$$

Παρατηρούμε: $R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{|k_1 - i\rho|^2}{|k_1 + i\rho|^2} = 1$

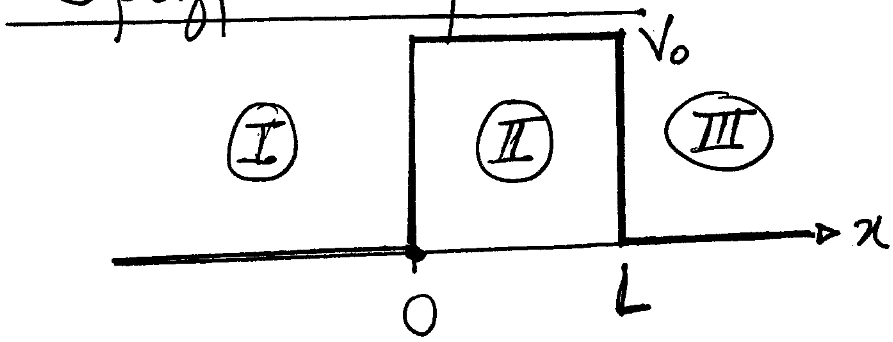
Δηλ. πάντα έχουμε ανάκλαση.

Όμως υπάρχει πιθανότητα τό σωματίδιο νά βρεθεί σέ $x > 0$: $P(x) = |B'|^2 e^{-2\rho x}$

Δηλαδή διεισδύει σέ κάποιο βάθος καί μετά επιστρέφει. Τοπική διείσδυση; ή εμβέλεια

$$\Delta x \sim \frac{1}{2\rho} \sim (V_0 - E)^{-1/2}$$

Φράγμα Δυναμικού



1.) $E < V_0$

$$\varphi_{I}(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$$
$$\varphi_{III}(x) = C e^{ik_1 x} + D e^{-ik_1 x} \quad , \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

όπου θέτουμε $D=0$.

II : $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_{II}}{dx^2} + V_0 \varphi_{II} = E\varphi_{II}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2\varphi_{II}}{dx^2} = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\varphi_{II} = \rho^2 \varphi_{II}$$

με $\rho = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

$$\longrightarrow \varphi_{II}(x) = F e^{\rho x} + G e^{-\rho x}$$

Συνοριακές συνθήκες.

$x=0 \qquad A+B=F+G$

$$ik_1(A-B)=\rho(F-G)$$

$x=L \qquad Fe^{\rho L}+Ge^{-\rho L}=Ce^{ik_1L}$

$$\rho(Fe^{\rho L}-Ge^{-\rho L})=ik_1Ce^{ik_1L}$$

συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις και απαλείφοντας τα F και G καταλήγουμε:

$$R=\left|\frac{B}{A}\right|^2=\left[1+\frac{4k_1^2\rho^2}{(k_1^2+\rho^2)^2\sinh^2(\rho L)}\right]^{-1}$$

$$T=\left|\frac{C}{A}\right|^2=\left[1+\frac{(k_1^2+\rho^2)^2\sinh^2(\rho L)}{4k_1^2\rho^2}\right]^{-1}$$

(όπου: $\sinh\varphi=\dfrac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}$, $\cosh\varphi=\dfrac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}$)

Τελικώς:

$$R=\frac{V_0^2\sinh^2(\rho L)}{4E(V_0-E)+V_0^2\sinh^2(\rho L)}$$

$$T=\frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E)+V_0^2\sinh^2(\rho L)}$$

Προφανῶς $R+T=1$.

Παρατηροῦμε ὅτι $T \neq 0$ δηλ. μὴ μηδενική πιθανότητα νὰ διασχίσει τὴν ἀπαγορευμένη περιοχὴ II καὶ νὰ ἐμφανισθεῖ στὴν III.

Αὐτό ὀνομάζεται tunnel effect.

Στὴν περίπτωση ὅπου $\rho L >> 1$

$$\sinh(\rho L) \simeq \frac{e^{\rho L}}{2}$$ καὶ θὰ ἔχουμε:

$$T \simeq \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-2\rho L}$$

τό ὁποῖο μειώνεται ἐκθετικὰ ἀλλὰ δὲν εἶναι μηδέν.

Π.χ γιὰ ἕνα ἠλεκτρόνιο ἡ ἐμβέλεια

$$\frac{1}{\rho} \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}} \simeq \frac{1.96}{\sqrt{V_0-E}} \mathring{A}$$

ὅπου τὰ V_0, E ἐκφράζονται σὲ eV.

Έτσι ένα ηλεκτρόνιο ενέργειας 1 eV πού συναντά ένα φράγμα $V_0 = 2eV$ πλάτους $L = 1 \mathring{A}$ θά έχει εμβέλεια (τού φθίνοντος κύματος) $\frac{1}{\rho} \simeq 1.96 \mathring{A}$ καί θά έχει μεγάλη πιθανότητα νά περάσει τό φράγμα.

Πράγματι χρησιμοποιώντας την σχέση γιά τό T βρίσκουμε $T \simeq 0.78$. δηλ. 78%

Άν στη θέση τού ηλεκτρονίου είχαμε πρωτόνιο η εμβέλεια

$$\frac{1}{\rho} \simeq \frac{1.96}{\sqrt{1840(V_0 - E)}} \simeq \frac{4.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{V_0 - E}} \mathring{A}$$

$$= 4.6 \times 10^{-2} \mathring{A}$$

Καί $T \simeq 4 \times 10^{-10}$

2. $E > 0$

→ Εδώ αλλάζει μόνο η $\varphi_{II}(x)$

$$\varphi_{II}(x) = F e^{ik_2 x} + G e^{-ik_2 x}$$

με $$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{-2m(V_0-E)}}{\hbar} = i\rho$$

Ξανακάνοντας όλους τούς υπολογισμούς είναι σάν νά αντικαταστήσουμε $\rho \to -ik_2$

$$\rightarrow \quad R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2-k_2^2)^2 \sin^2(k_2 L)}\right]^{-1}$$

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{(k_1^2-k_2^2)^2 \sin^2(k_2 L)}{4k_1^2 k_2^2}\right]^{-1}$$

ή $$T = \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0) + V_0^2 \sin^2(k_2 L)}$$

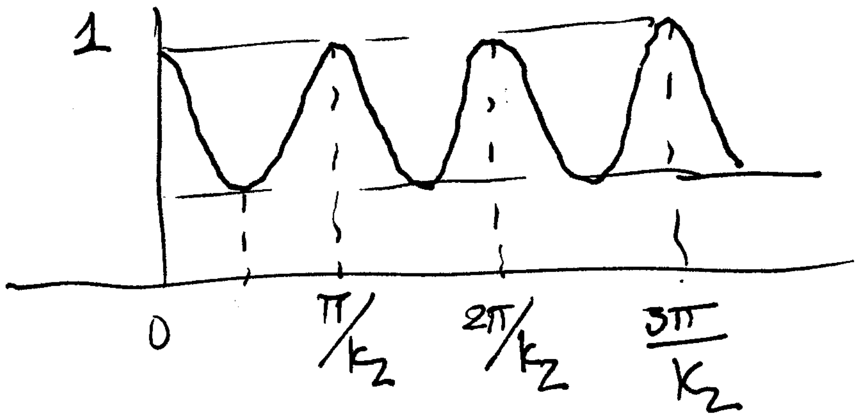
$$R = \frac{V_0^2 \sin^2(k_2 L)}{4E(E-V_0) + V_0^2 \sin^2(k_2 L)}$$

Προφανώς ισχύει: $R+T=1$

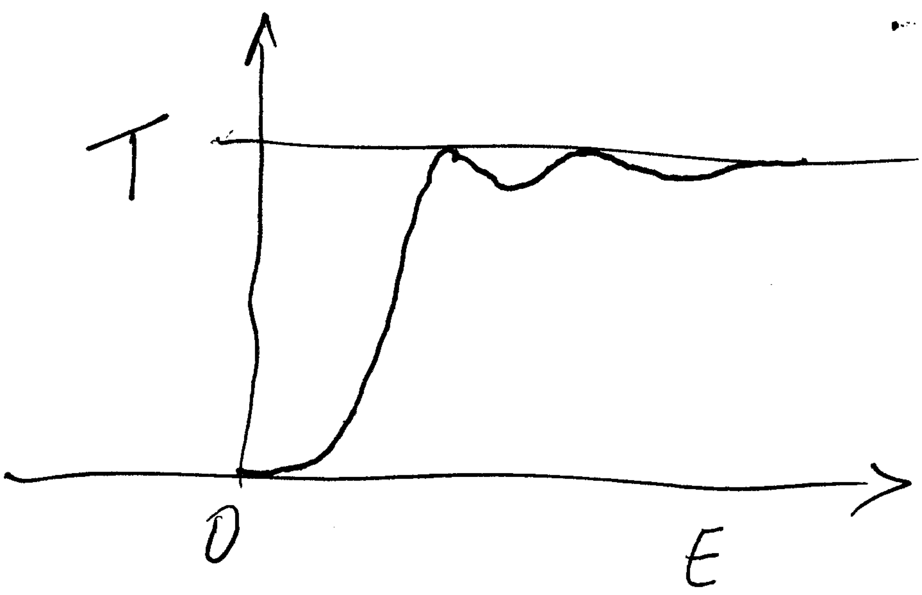
Τὸ $R=1$ για $\sin(k_2 L)=0$ δηλ. $k_2=\frac{n\pi}{L}$

ή $\lambda_2=\frac{2L}{n}$

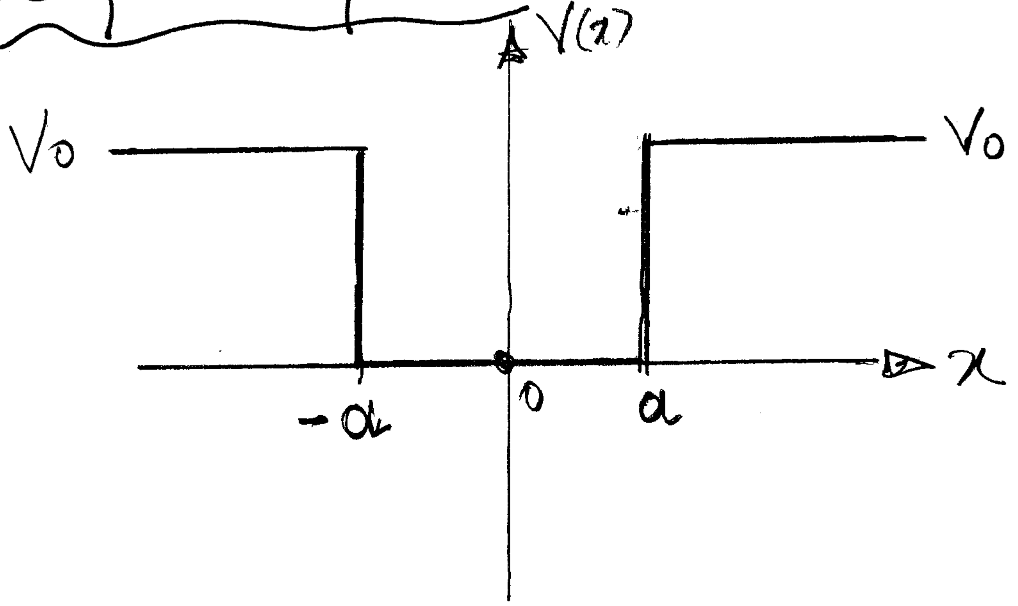
Γενικώς είναι $R<1$



Για $E>>V_0$ $\quad T\to 1$



Φρέαρ δυναμικού



1. $0 < E < V_0$

Παρατηρούμε ότι τό δυναμικό είναι συμμετρικό. Σε αυτή την περίπτωση ξέρουμε ότι οι λύσεις θα είναι ή άρτιες $(\varphi(x)=\varphi(-x))$ ή περιττές $(\varphi(-x)=-\varphi(x))$.

και θα ισχύει $|\varphi(x)|^2=|\varphi(-x)|^2$

α) $|x| \leq a$

$$\longrightarrow \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0 \quad , \quad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

$\longrightarrow$ ἄρτιες λύσεις: $A\cos(kx)$

περιττές λύσεις: $B\sin(kx)$

β) $|x| > \alpha$ (ἐκτὸς τοῦ φρέατος)

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \rho^2 \varphi(x) \quad , \quad \rho = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

$$\longrightarrow \varphi(x) = C e^{-\rho x}$$

Συνθῆκες: i) ἄρτιες λύσεις

$$A\cos(ka) = C e^{-\rho a}$$

$$-kA\sin(ka) = -\rho C e^{-\rho a}$$

$$\longrightarrow \underline{k\tan(ka) = \rho}$$

ii) περιττές λύσεις:

Ὁμοίως: $\underline{k\cot(ka) = -\rho}$

Οἱ τελευταῖες ἐξισώσεις λέγονται tranсedental (ὑπερβατικές;) καὶ λύνονται μόνο γραφικά

Τις μετασχηματίζουμε:

$$ka \tan(ka) = pa$$
$$ka \cot(ka) = -pa$$

Θέτοντας: $\xi = ka \quad , \eta = pa$

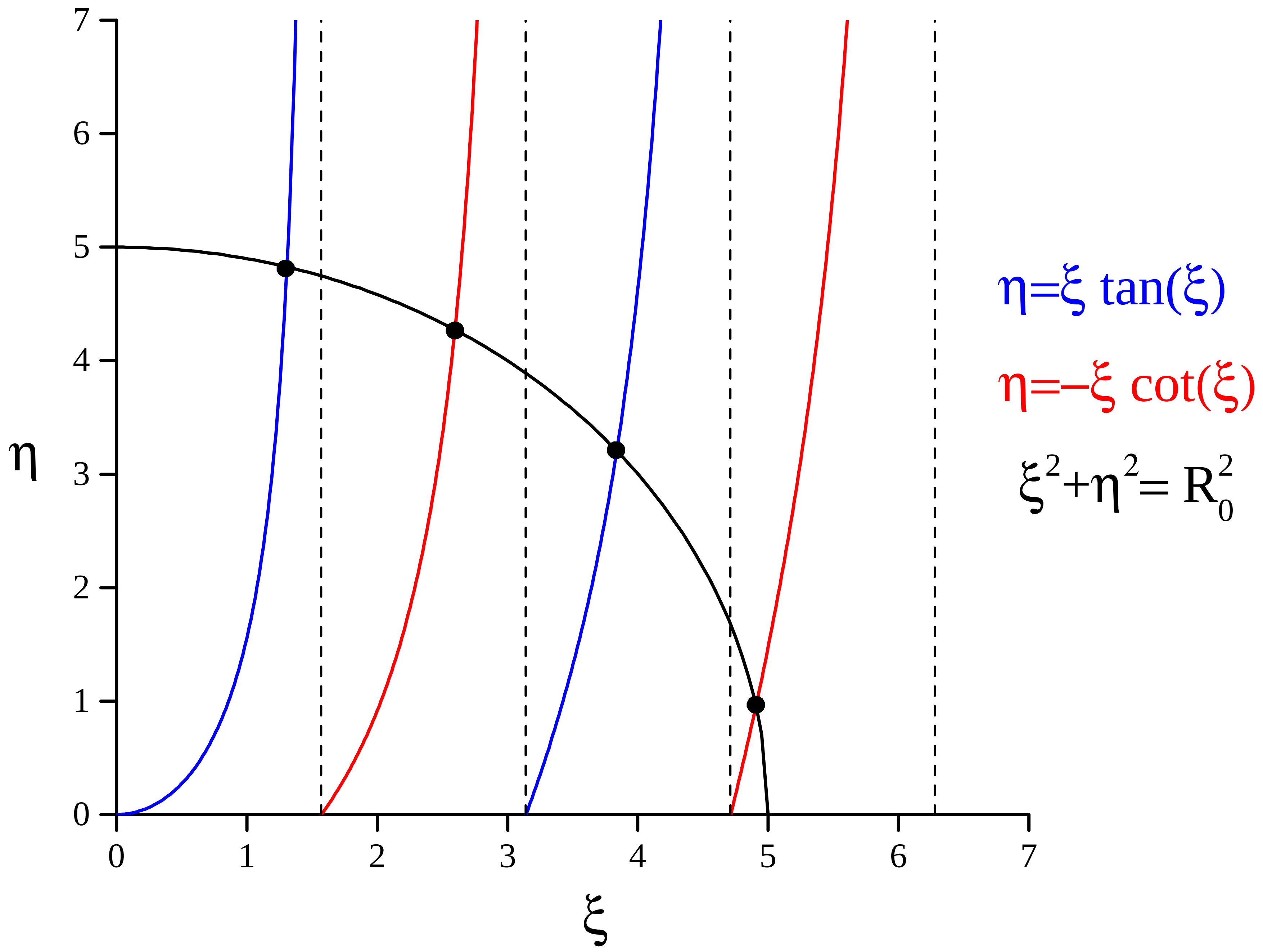
$$\rightarrow \quad \xi \tan(\xi) = \eta \quad (1)$$
$$\xi \cot(\xi) = -\eta \quad (2)$$

Επίσης θα ισχύει:

$$\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 (k^2 + p^2) = \alpha^2 \left[\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \alpha^2 = R_0^2 \quad (3)$$

Οι άρτιες λύσεις θα βρεθούν από τα σημεία τομής των (1) και (3) και οι περιττές από τις (2) και (3). Θα έχουμε:



η=ξ tan(ξ)
η=−ξ cot(ξ)
ξ²+η²= R₀²
η
ξ
0
1
2
3
4
5
6
7

Τώρα άν $V_0 \to \infty$ (φρέαρ άπείρου βάθους)

$\to R_0 = \infty$ καί έπίσης $\eta \to \infty$

i) άρτιες: $\tan(\xi) = \pm\infty \to \xi = n\pi + \frac{\pi}{2}$

ii) περιττές: $\cot(\xi) = \pm\infty \to \xi = n\pi$

Γενικώς οί άρτιες ή περιττές μπορούν νά είναι γιά $\xi = n\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\to \xi = ka = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow a\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 = \frac{n^2 h^2}{8m(2a)^2}$$

(δηλ. ή γνωστή σχέση)