



ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται $f(x) = \sin x - 4/5$. Εφαρμόστε δυο επαναλήψεις της μεθόδου Newton – Raphson για να προσεγγίσετε μια ρίζα της $f(x)$. Λάβετε $x_0 = 0.5$ και καταγράψτε τα x_1, x_2 με ακρίβεια τουλάχιστον 4 δεκαδ. ψηφίων.

2. Υπολογίστε το

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^n}.$$

3. Υπολογίστε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - \sum_{n=1}^6 \sin(nx + \pi/2)}{13x^2}.$$

4. Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{3x} dx$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simpson με βήμα $h = 1/4$. Χρησιμοποιείτε ακρίβεια τουλάχιστον 4 δεκ. ψηφίων.

5. Βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων $y = ax + b$ που διέρχεται από τα σημεία του επιπέδου $(1,1)$, $(2,2)$ και $(2,3)$.

6. Υπολογίστε το $\int_0^2 ||1 - x| - |x|| dx$.

7. Να υπολογιστεί το μήκος L της καμπύλης που δίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}$, στο διάστημα $[1,2]$.

8. Να υπολογιστεί ο όγκος V του στερεού που σχηματίζεται από την περιστροφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x\sqrt{x+1}$ στο διάστημα $[0,2]$ γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

9. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = \int \frac{4+x+x^2}{3+2x+x^2} dx$ σε σειρά Taylor στο $x = 0$, και να καταγράψετε τους συντελεστές των όρων x^2 και x^3 .

10. Δίνεται η $f(x) = x^2 + y^2 + 1$. Το επίπεδο $z = 6y - 8$ είναι εφαπτόμενο σε αυτή και διέρχεται από τα σημεία $(1,1,-2)$ και $(1,2,4)$ που δεν ανήκουν στην f . Ποιο άλλο επίπεδο διέρχεται από αυτά και εφάπτεται στην f ;

Γράψτε οκτώ από τα δέκα θέματα. Διάρκεια δύο ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις (συνοπτικά)

$$1. f'(x) = 2x - 3, x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sin x_0 - 0.8}{\cos x_0} = 0.865293$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_0 - \frac{\sin x_1 - 0.8}{\cos x_1} = 0.924999$$

$$2. d = -\frac{2}{3}, s = -2(d + d^2 + d^3 + \dots) = -2 * (-\frac{2}{5}). \text{ Άρα } s = \frac{4}{5}.$$

$$3. = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - \sum \cos nx}{13x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum n \sin nx}{26x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum n^2 \cos n^2 x}{26} = \frac{\sum n^2}{26} = 7/2$$

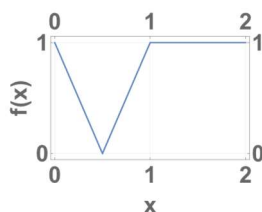
$$4. \int_0^1 e^{3x} dx \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot (e^{3 \cdot 0} + 4 \cdot e^{3 \cdot 0.25} + 2 \cdot e^{3 \cdot 0.5} + 4 \cdot e^{3 \cdot 0.75} + e^{3 \cdot 1}) \approx 6.37232$$

$$5. s = \sum (y_i - (ax_i + b))^2 = 14 - 22a + 9a^2 - 12b + 10ab + 3b^2,$$

$$\partial s / \partial a = -22 + 18a + 10b = 0, \partial s / \partial b = -12 + 10a + 6b = 0,$$

$$a \rightarrow \frac{3}{2}, b \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$6. = \int_0^{1/2} (1 - 2x) dx + \int_{1/2}^1 (2x - 1) dx + \int_1^2 dx = 0.25 + 0.25 + 1 = 1.5$$



$$7. L = \int_1^2 \sqrt{1 + (f')^2} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{4x^4} + \frac{x^4}{4}} dx \approx (\text{Simpson 4 βήματα}, h = 1/4) \\ \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot (1.414 + 4 \cdot 1.487 + 2 \cdot 1.678 + 4 \cdot 1.968 + 2.349) \approx 1.745$$

$$8. V = \int_0^2 \pi \cdot (x\sqrt{x+1})^2 dx = \pi \int_0^2 (x^3 + x^2) dx = 20\pi/3.$$

$$9. \int \frac{4 + x + x^2}{3 + 2x + x^2} dx \approx \int \left(\frac{4}{3} - \frac{5x}{9} + \frac{7x^2}{27} + \dots \right) dx = c + \frac{4x}{3} - \frac{5x^2}{18} + \frac{7x^3}{81} + \dots$$

$$10. fx = 2x, fy = 2y. \text{ επαφή στο } (x_0, y_0, z_0) = (2, 3, 14).$$

$$z = f(2, 3) + fx(2, 3) \cdot (x - 2) + fy(2, 3) \cdot (y - 3) = 4x + 6y - 12$$