Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

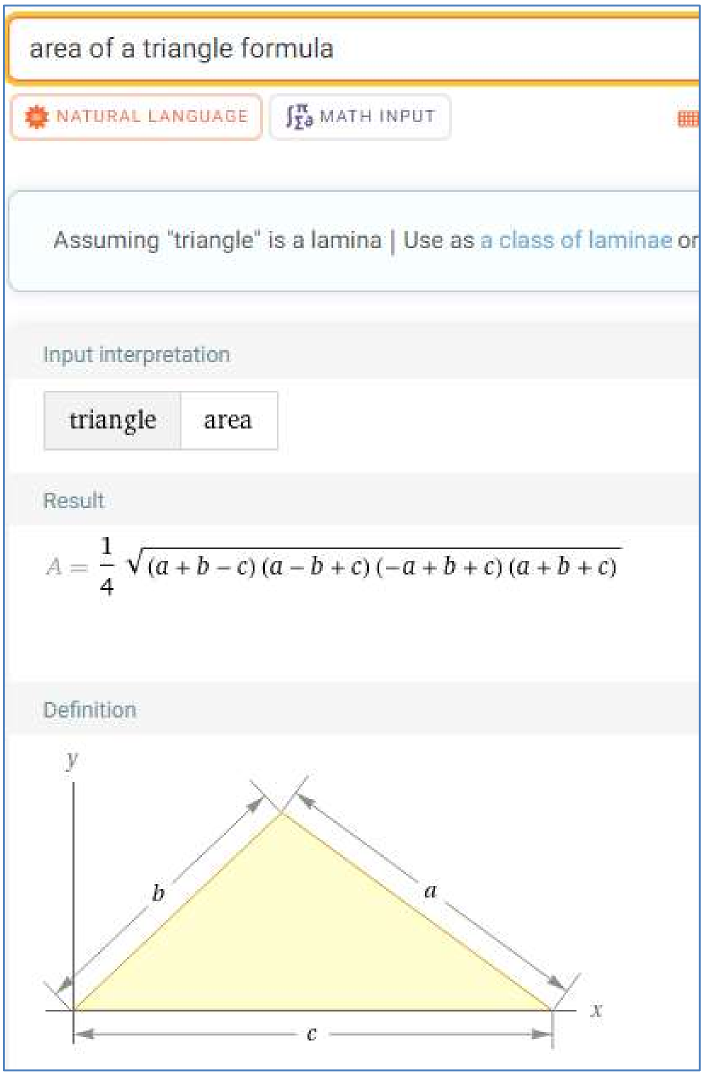
Συναρτήσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$

Στην πράξη πολλά φαινόμενα περιγράφονται από συναρτήσεις με δύο ή περισσότερες μεταβλητές.

►**Παράδειγμα:** Το εμβαδό ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με μήκος x και πλάτος y δίνεται από τον τύπο:

$$E = xy.$$

Δηλαδή σε κάθε ζεύγος, (x, y) αντιστοιχεί μια συγκεκριμένη τιμή E. Το E είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. ◄



►**Παράδειγμα 1.3:** Το εμβαδό ενός τριγώνου με πλευρές a, b και c, δίνεται από τον τύπο του Ήρωνα:

$$E = \sqrt{\tau(\tau - a)(\tau - b)(\tau - c)},$$

όπου $\tau = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Το E είναι μια συνάρτηση τριών μεταβλητών. Στην περίπτωση αυτή είναι φανερό ότι οι πλευρές δεν μπορεί να πάρουν αυθαίρετα οποιαδήποτε τιμή. Θα πρέπει

$$a + b > c,$$
$$a + c > b,$$
$$b + c > a.$$

Στο σχήμα αριστερά βλέπουμε τον ίδιο τύπο χρησιμοποιώντας την εφαρμογή **WolframAlpha** στην δια-δυκτιακή διεύθυνση https://www.wolframalpha.com/

◄

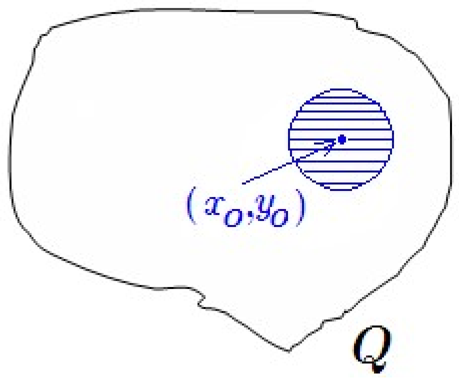
Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση

$$f(x, y)$$

με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) σε ένα πραγματικό αριθμό $z = f(x, y)$. □

Αν κάθε ζεύγος (x, y) αντιστοιχισθεί με ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου $x - y$ τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αντιστοιχίζεται σε ένα σύνολο σημείων του επιπέδου.

Μπορούμε να καλούμε και αυτό ως πεδίο ορισμού. Έτσι τα πεδία ορισμού είναι πολλές φορές μέρη του επιπέδου ορισμένα μέσα σε καμπύλες γραμμές. Γενικότερα αυτά καλούνται χωρία. Οι καμπύλες γραμμές που οριοθετούν ένα χωρίο λέγονται σύνορο. Τα σημεία του χωρίου που δεν ανήκουν στο σύνορο λέγονται εσωτερικά σημεία.



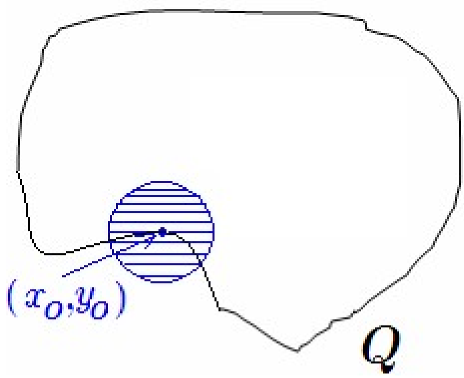
Ειδικότερα:

Ορισμός: Ένα σημείο (x_0, y_0) λέγεται **εσωτερικό σημείο** ενός χωρίου Q εφόσον είναι κέντρο ενός κυκλικού δίσκου ο οποίος ανήκει εξ ολοκλήρου στο Q (Σχήμα – 1). □

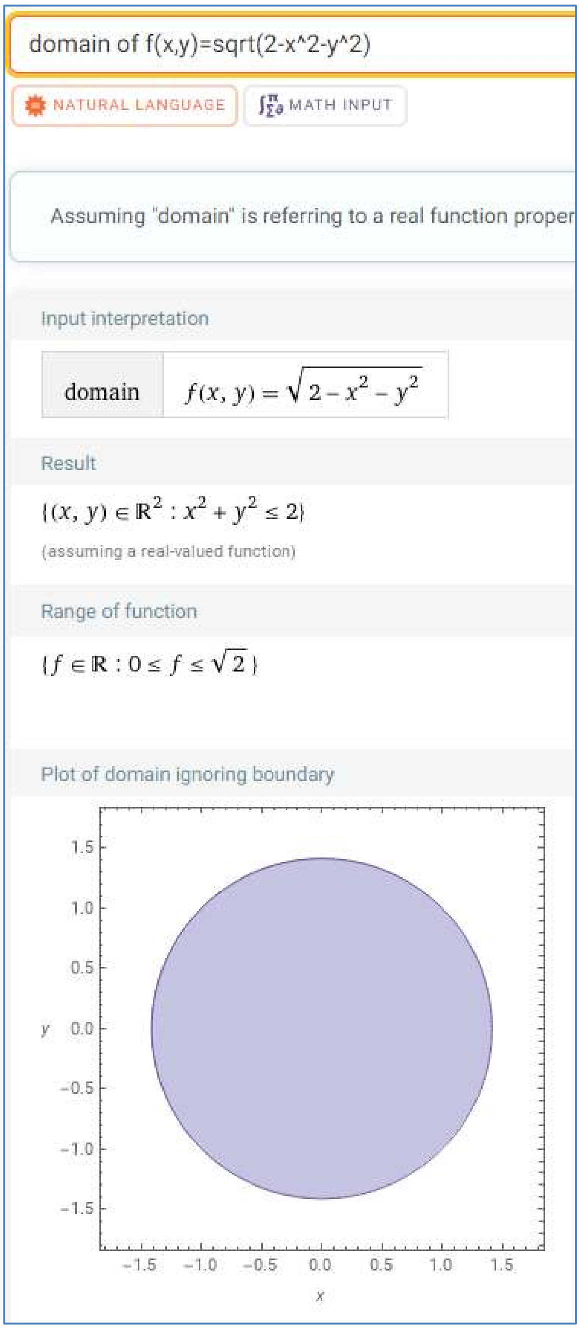
Αυτός ο κυκλικός δίσκος εφόσον έχει ακτίνα r, τότε λέγεται r–**γειτονιά** του σημείου (x_0, y_0) ακτίνας r. Επίσης :

Ορισμός: Ένα σημείο (x_0, y_0) λέγεται **συνοριακό σημείο** ενός χωρίου Q εφόσον κάθε κυκλικός δίσκος που το έχει ως κέντρο δεν ανήκει εξ ολοκλήρου στο Q (Σχήμα – 2). □

Ένα χωρίο αποτελούμενο μόνο από εσωτερικά σημεία λέγεται **ανοικτό** χωρίο ενώ αν περιέχει όλα τα σημεία του συνόρου λέγεται **κλειστό** χωρίο.



Χωρίο το οποίο μπορεί να περικλεισθεί από κάποιο δίσκο με πεπερασμένη ακτίνα είναι **φραγμένο**.



►**Άσκηση**: Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

Λύση: Για να έχει πραγματική τιμή η συνάρτηση θα πρέπει να μην είναι αρνητική η ποσότητα μέσα στη ρίζα. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει η ανισότητα

$$2 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ ή } 2 \geq x^2 + y^2.$$

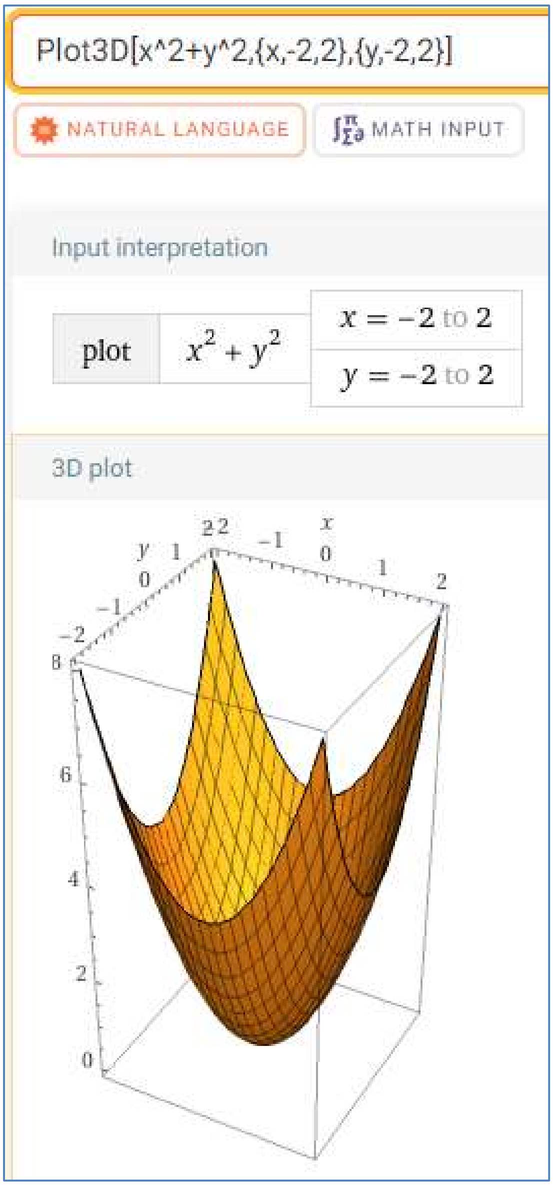
Παρατηρούμε ότι τα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα ορίζονται από ένα κλειστό χωρίο με σύνορο τον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{2}$.

Στο σχήμα αριστερά βλέπουμε το απότέλεσμα στην εφαρμογή WolframAlpha ◄

►**Άσκηση**: Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.

Λύση: Για να έχει πραγματική τιμή η συνάρτηση θα πρέπει να μην είναι αρνητική η ποσότητα μέσα στη ρίζα. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει η ανισότητα $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$ ή $x^2 + y^2 \geq 3^2$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα ορίζονται από ένα κλειστό χωρίο με σύνορο τον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3. Δηλαδή και τα σημεία του κύκλου και όσα ευρίσκονται εκτός του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου αποτελούν το ζητούμενο πεδίο ορισμού.◄



►**Παράδειγμα:** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$z = x^2 + y^2,$$

είναι το παραβολοειδές εκ περιστροφής που εμφανίζεται στο διπλανό σχήμα. ◄

Συνέχεια συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Έστω ένα σημείο $M_0(x_0, y_0)$ σε ένα χωρίο Q ή στο σύνορό του.

Ορισμός: Ένας αριθμός ξ καλείται το όριο της συνάρτησης $f(x,y)$ καθώς το $M(x,y)$ πλησιάζει το σημείο $M\,(x_0,y_0)$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε έτσι ώστε για κάθε σημείο στη δ −γειτονιά του $M\,(x_0,y_0)$ να ισχύει:

$$|f(x,y) - \xi| < \varepsilon. \square$$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \xi.$

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $M_0(x_0,y_0)$ το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της, όταν:

i) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ii) Το $M(x,y)$ πλησιάζει το σημείο $M(x_0,y_0)$ με οποιοδήποτε τρόπο παραμένοντας όμως στο πεδίο ορισμού της f. □

Πρακτικά μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο όταν δεν υπάρχουν "τρύπες" ή "πηδήματα". Η γραμμή με την οποία $x \to x_0$ και $y \to y_0$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε.

►**Παράδειγμα**: Η συνάρτηση $z = x^2 + y^2$ είναι συνεχής για κάθε τιμή των x, y δηλαδή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του επιπέδου $x - y$. Πράγματι έχουμε:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} x^2 + y^2 = \lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \left(x_0 + \delta x\right)^2 + \left(y_0 + \delta y\right)^2 =$$

$$= \lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \left(x_0^2 + 2x_0\delta x + \left(\delta x\right)^2\right) + \left(y_0^2 + 2y_0\delta y + \left(\delta y\right)^2\right) =$$

$$= \left(x_0^2 + y_0^2\right) + \lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \left(\begin{array}{l} 2x_0\delta x + \left(\delta x\right)^2 \\ +2y_0\delta y + \left(\delta y\right)^2 \end{array}\right) = \left(x_0^2 + y_0^2\right).$$

Άρα ικανοποιείται ο ορισμός ανεξάρτητα από τον τρόπο επιλογής των $\delta x, \delta y$. ◄

►**Άσκηση**: Βρείτε το όριο $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^4+3y^4}$ και εξετάστε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $M(0,0)$.

Λύση: Ας πλησιάσουμε το επίμαχο σημείο $(0,0)$ από τον άξονα των x. Γνωρίζουμε ότι τότε $y = 0$. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2 0^2}{x^4+3\cdot 0^4} = 0\,.$$

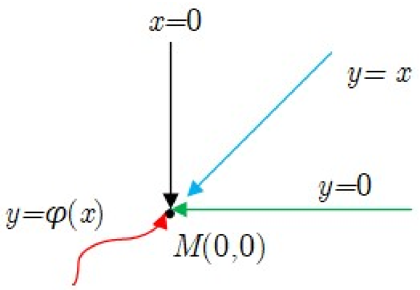
.

Ας πλησιάσουμε το σημείο (0, 0) από τον άξονα των y. Γνωρίζουμε ότι τότε $x = 0$. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} \frac{x^2 y^2}{x^4+3y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0^2\, y^2}{0^4+3\cdot y^4} = 0\,.$$

Έχουμε το ίδιο όριο πλησιάζοντας από δύο κατευθύνσεις. Όμως αυτό δεν αρκεί στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές. Αν κινηθούμε προς το σημείο (0, 0) από την κατεύθυνση $y = 2x$ τότε:

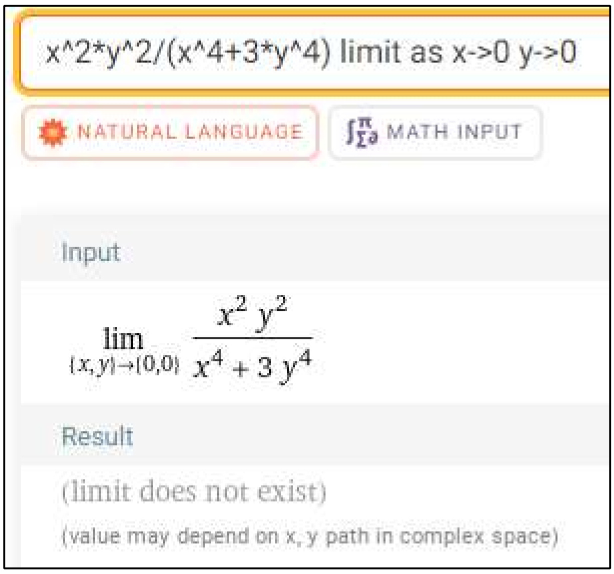
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 2x}} \frac{x^2 y^2}{x^4+3y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(2x)^2}{x^4+3\cdot(2x)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{x^4+3\cdot 16x^4} = \frac{4x^4}{49x^4} = \frac{4}{49}.$$



Σχήμα

Στο σχήμα βλέπουμε τις τρεις κατευθύνσεις από τις οποίες προσεγγίσαμε το σημείο M. Αν έστω και σε δύο κατευθύνσεις έχουμε διαφορετικό αποτέλεσμα τότε δεν υπάρχει όριο. Οι κατευθύνσεις μπορεί να είναι και άλλου είδους καμπύλες εκτός από ευθείες.

Συνεπώς δεν μπορεί να υπάρχει το όριο στο σημείο (0, 0) και η συνάρτηση $\frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}$ δεν είναι συνεχής εκεί.Επίσης δεν είναι δυνατό να ορίσουμε διαφορετικά τη συνάρτηση στο σημείο αυτό έτσι ώστε να γίνει συνεχής. Αυτό διότι π.χ.



$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 3x}} \frac{x^2 y^2}{x^4+3y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(3x)^2}{x^4+3\cdot(3x)^4}$$

Έτσι αν για παράδειγμα θέταμε $f(0,0) = 0$, δεν θα καλύπταμε την περίπτωση που είδαμε προηγουμένως με $y = 2x$.◄

Μερική παράγωγος πρώτης τάξης

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x,y) = 2x^2 x^3$, και ας υπολογίσουμε το ρυθμό με τον οποίο η f διαφοροποιείται σε ένα σημείο (a,b), αν κρατήσουμε το y σταθερό και επιτρέψουμε στο x να αλλάζει. Αφού το $y{=}b$ σταθερό, τότε έχουμε να ασχοληθούμε με μια συνάρτηση μιας μεταβλητής, την $q(x) = f(x,b) = 2b^3x^2$. Ποιο είναι το $q'(a)$; Αφού η q είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής έχουμε πως: $q'(a) = 4\alpha b^3$

Ονομάζουμε το $q'(a)$ την μερική παράγωγο της f ως προς x στο σημείο (a,b) και το συμβολίζουμε f_x ή $\frac{\partial f}{\partial x}$. Συνήθως δεν χρησιμοποιούμε τις τιμές a,b όταν αναφερόμαστε στη μερική παράγωγο. Ο πιο καθιερωμένος συμβολισμός είναι να συνεχίσουμε τη χρήση των μεταβλητών x,y. Έτσι γράφουμε $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3$.

Κατά την ίδια λογική μπορεί κανείς να υπολογίσει $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2 y^2$.

Από το παράδειγμα βλέπουμε πως για να υπολογίσουμε παραγώγους συναρτήσεων με πολλές μεταβλητές δουλεύουμε περίπου όπως στην απλή περίπτωση συνάρτησης με μια μεταβλητή. Η διαφορά είναι ότι θεωρούμε όλες τις μεταβλητές εκτός από μια, ως σταθερές. Οι παράγωγοι αυτές λέγονται πρώτης τάξης.

Ο ορισμός της μερικής παραγώγου είναι παρόμοιος με αυτόν της παραγώγου για μια μεταβλητή.

Ορισμός: Η μερική παράγωγος της συνάρτησης $z = f(x,y)$ ως προς τη μεταβλητή x, συμβολίζεται με f_x ή $\frac{\partial f}{\partial x}$, και είναι:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Όμοια η μερική παράγωγος της συνάρτησης $z = f(x,y)$ ως προς τη μεταβλητή y, συμβολίζεται με f_y ή $\frac{\partial f}{\partial y}$, και είναι:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

► **Άσκηση**: Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $\cos\left(x^2 + y^2\right)$ (β) $\sin(x + y)$

Λύση:

(α) Μερική παράγωγος ως προς x

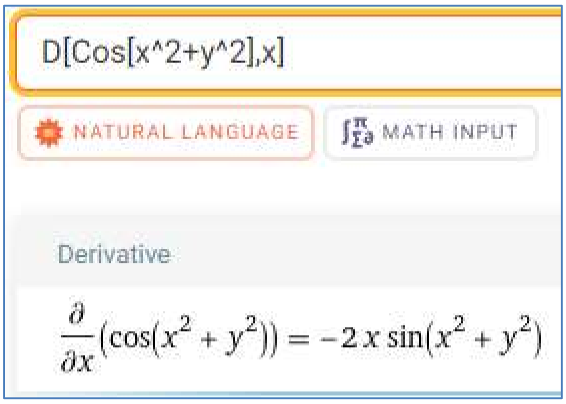
$$\frac{\partial\left(\cos\left(x^2+y^2\right)\right)}{\partial x}=-\sin\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x}=$$

$$=-\sin\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(\frac{\partial x^2}{\partial x}+\frac{\partial y^2}{\partial x}\right)=-\sin\left(x^2+y^2\right)(2x)=-2x\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Μερική παράγωγος ως προς y

$$\frac{\partial\left(\cos\left(x^2+y^2\right)\right)}{\partial y}=-\sin\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial y}=$$

$$=-\sin\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(\frac{\partial x^2}{\partial y}+\frac{\partial y^2}{\partial y}\right)=-\sin\left(x^2+y^2\right)(2y)=-2y\sin\left(x^2+y^2\right).$$



(β) $\dfrac{\partial\sin(x+y)}{\partial x}=\cos(x+y)=\dfrac{\partial\sin(x+y)}{\partial y}$. ◀

Άσκηση. Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $2x^3y^2+5x^3$ **(ii)** $x^2+3xy^2+y^3-1$ **(iii)** $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

(iv) e^{x+2xy} **(v)** $x+y+z+1$ **(vi)** e^z+x^2y+z+5

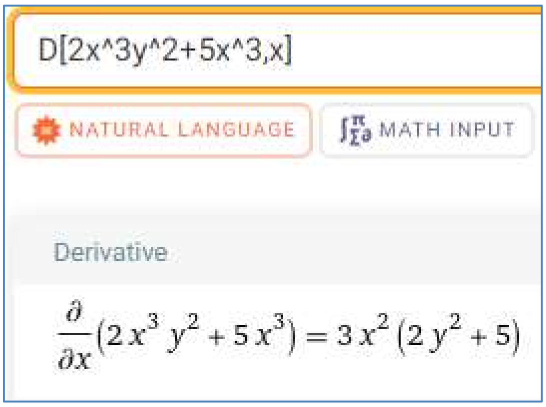
Λύση:

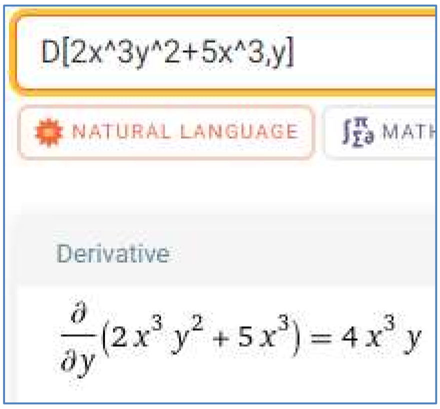
(i) Για την εύρεση της μερικής παραγώγου ως προς x, θεωρώ σταθερά τα πάντα εκτός από το x. Έχω λοιπόν:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(2x^3y^2+5x^3)}{\partial x}=\frac{\partial(2x^3y^2)}{\partial x}+\frac{\partial(5x^3)}{\partial x}=(2y^2)\cdot 3x^2+5\cdot 3x^2$$
$$=6x^2y^2+15x^2$$

Για την εύρεση της μερικής παραγώγου ως προς y, θεωρώ σταθερά τα πάντα εκτός από το y. Έχω λοιπόν:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(2x^3y^2+5x^3)}{\partial y}=\frac{\partial(2x^3y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(5x^3)}{\partial y}=2x^3\cdot 2y+0=4x^3y$$





(ii)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+3xy^2+y^3-1)}{\partial x}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(3xy^2)}{\partial x}+\frac{\partial(y^3)}{\partial x}-\frac{\partial(1)}{\partial x}=2x+3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+3xy^2+y^3-1)}{\partial y}=\frac{\partial(x^2)}{\partial y}+\frac{\partial(3xy^2)}{\partial y}+\frac{\partial(y^3)}{\partial y}-\frac{\partial(1)}{\partial y}$$
$$=6xy+3y^2$$

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2},$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}$$

(iv) Για να βρούμε τη μερική παράγωγο ως προς x κρατάμε σταθερά όλα τα υπόλοιπα και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για σύνθετες συναρτήσεις έχουμε:

$$\frac{\partial e^{x+2xy}}{\partial x}=\frac{\partial(x+2xy)}{\partial x}\cdot\frac{\partial e^{x+2xy}}{\partial(x+2xy)}=(1+2y)e^{x+2xy}.$$

Όμοια για την παράγωγο ως προς y, έχουμε:

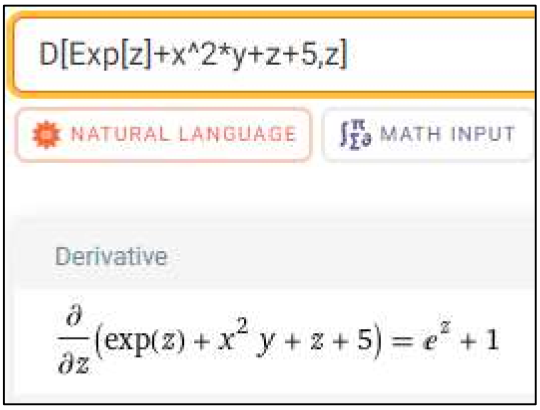
$$\frac{\partial e^{x+2xy}}{\partial y}=\frac{\partial(x+2xy)}{\partial y}\cdot\frac{\partial e^{x+2xy}}{\partial(x+2xy)}=2xe^{x+2xy}.$$

(v) $$\frac{\partial(x+y+z+1)}{\partial x}=\frac{\partial(x+y+z+1)}{\partial y}=\frac{\partial(x+y+z+1)}{\partial z}=1$$

(vi) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(e^z+x^2y+z+5)}{\partial x}=\frac{\partial(e^z)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y)}{\partial x}+\frac{\partial(z)}{\partial x}+\frac{\partial(5)}{\partial x}=0+2xy+0+0=2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(e^z+x^2y+z+5)}{\partial y}=\frac{\partial(e^z)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}+\frac{\partial(z)}{\partial y}+\frac{\partial(5)}{\partial y}=0+x^2+0+0=x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial(e^z+x^2y+z+5)}{\partial z}=\frac{\partial(e^z)}{\partial z}+\frac{\partial(x^2y)}{\partial z}+\frac{\partial(z)}{\partial z}+\frac{\partial(5)}{\partial z}=e^z+0+1+0=e^z+1.$$◄



Ορισμός: (Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης) Αν $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις και $z=f(u,v)$ επίσης διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση, τότε οι μερικές παράγωγοι της σύνθετης συνάρτησης z δίνονται από

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta x}=\frac{\vartheta f}{\vartheta u}\cdot\frac{\vartheta u}{\vartheta x}+\frac{\vartheta f}{\vartheta v}\cdot\frac{\vartheta v}{\vartheta x},\quad \frac{\vartheta z}{\vartheta y}=\frac{\vartheta f}{\vartheta u}\cdot\frac{\vartheta u}{\vartheta y}+\frac{\vartheta f}{\vartheta v}\cdot\frac{\vartheta v}{\vartheta y}.$$

□

Αν $z=f(u,v,w)$ τότε

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta x}=\frac{\vartheta f}{\vartheta u}\cdot\frac{\vartheta u}{\vartheta x}+\frac{\vartheta f}{\vartheta v}\cdot\frac{\vartheta v}{\vartheta x}+\frac{\vartheta f}{\vartheta w}\cdot\frac{\vartheta w}{\vartheta x},\quad \frac{\vartheta z}{\vartheta y}=\frac{\vartheta f}{\vartheta u}\cdot\frac{\vartheta u}{\vartheta y}+\frac{\vartheta f}{\vartheta v}\cdot\frac{\vartheta v}{\vartheta y}+\frac{\vartheta f}{\vartheta w}\cdot\frac{\vartheta w}{\vartheta y}.$$

Ορισμός: (Παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης) Αν $u(t)$ και $v(t)$ είναι διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις και $z=f(u(t),v(t))$ επίσης διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση, τότε οι μερικές παράγωγοι της σύνθετης συνάρτησης z δίνονται από

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta t}=\frac{\vartheta f}{\vartheta u}\cdot\frac{\vartheta u}{\vartheta t}+\frac{\vartheta f}{\vartheta v}\cdot\frac{\vartheta v}{\vartheta t}.$$

□

►**Παράδειγμα:** Έστω $z=\ln(u^2+v)$, $u=e^{x+y^3}$, $v=x^3+2y$.

Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v},\ \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^3},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2e^{x+y^3},\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=3x^2,\ \ \frac{\partial v}{\partial y}=2.$$

Οπότε,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{u^2+v}\cdot\left(2ue^{x+y^3}+3x^2\right)=\frac{2e^{2x+2y^3}+3x^2}{e^{2x+2y^3}+x^3+2y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2}{u^2+v}\cdot\left(3ue^{x+y^3}+1\right)=\frac{2(1+3e^{2x+2y^3}y^2)}{e^{2x+2y^3}+x^3+2y}.$$

Κάτι που θα μπορούσε βέβαια να υπολογισθεί απευθείας αφού

$$\mathrm{z}=\ln\left(e^{2(x+y^3)}+x^3+2y\right).\ ◀$$

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Όπως στις συναρτήσεις με μια μεταβλητή ορίζονται παράγωγοι υψηλότερης τάξης, όμοια και εδώ έχουμε μερικές παραγώγους υψηλότερης τάξης. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση με δύο μεταβλητές:

$$z = f(x, y).$$

Αφού και οι δύο πρώτες μερικές παράγωγοι είναι και αυτές συναρτήσεις των x, y μπορούμε με τη σειρά τους να τις παραγωγίσουμε ως προς αυτά. Ο συμβολισμός που ακολουθούμε για να τις παραστήσουμε είναι:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \; f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

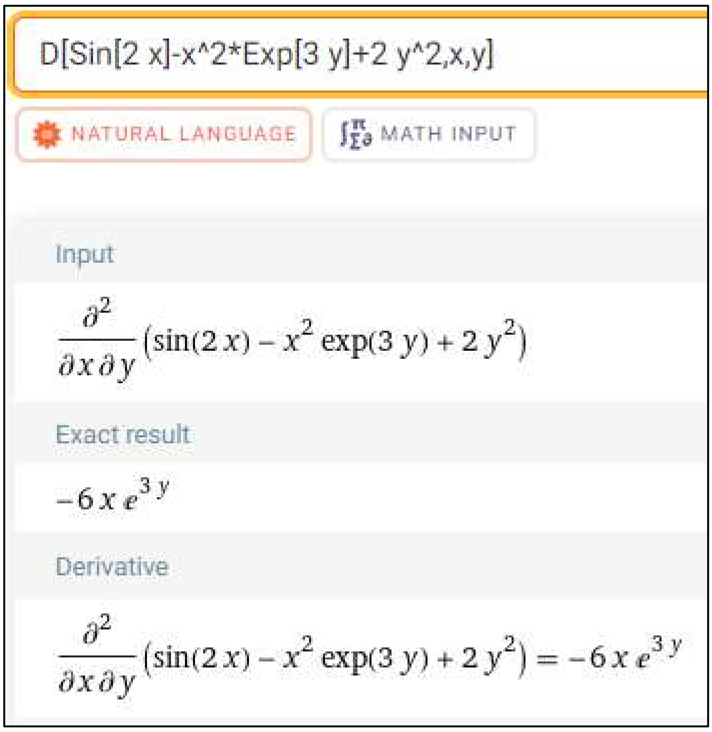
$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \; f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Οι f_{xy} και f_{yx} ονομάζονται και μεικτές παράγωγοι δεύτερης τάξης της συνάρτησης f

►**Παράδειγμα**: Βρείτε τις παραγώγους 2ης τάξης για την

$$f(x,y) = \sin(2x) - x^2 e^{3y} + 2y^2.$$

Απάντηση: Αρχικά θα βρούμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.



$$f_x = 2\cos(2x) - 2xe^{3y},$$

$$f_y = -3x^2 e^{3y} + 4y.$$

Στη συνέχεια μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των παραγώγων 2ης τάξης.

$$f_{xx} = 4\sin(2x) - 2e^{3y},$$

$$f_{xy} = -6xe^{3y}, f_{yx} = -6xe^{3y}, \; f_{yy} = -9x^2e^{3y} + 4.$$ ◄

►**Παράδειγμα.** Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 y + y^3$. Τότε οι πρώτες και οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της $f(x,y)$ είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(x^2+3y^2)}{\partial y} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(x^2+3y^2)}{\partial x} = 2x$$

◄

Παρατηρείστε ότι για την περίπτωση αυτή $f_{xy} = f_{yx}$. Αυτό εξασφαλίζεται πάντα αν οι συναρτήσεις f_{xy} και f_{yx} είναι συνεχείς.

Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση $f(x,y)$ έχει μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης συνεχείς σε μια περιοχή ενός σημείου $M(x_0,y_0)$, τότε οι μεικτές μερικές παράγωγοι στο σημείο αυτό είναι ίσες. □

►**Άσκηση**: Βρείτε την παράγωγο f_{xxyyw} της συνάρτησης, $f(x,y,w) = e^{-y \sin w} x^2$

Λύση: Κατά τα γνωστά έχουμε,

$$f_x = 2e^{-y\sin w}x,\ \ f_{xx} = 2e^{-y\sin w},\ \ f_{xxy} = -2e^{-y\sin w}\sin w,$$

$$f_{xxyy} = 2e^{-y\sin w}\sin^2 w,\ \ f_{xxyyw} = -2e^{-y\sin w}\cos w \sin w(-2 + y\sin w).$$ ◄

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Ας θεωρήσουμε την σχέση $F(x,y) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές x, y δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά η μία είναι συνάρτηση της άλλης. Δηλαδή έστω ότι $y = y(x)$. Τότε ισχύει το παρακάτω.

Θεώρημα: Αν μια συνεχής συνάρτηση $y = y(x)$ ορίζεται πεπλεγμένα

$$F(x,y) = 0,$$

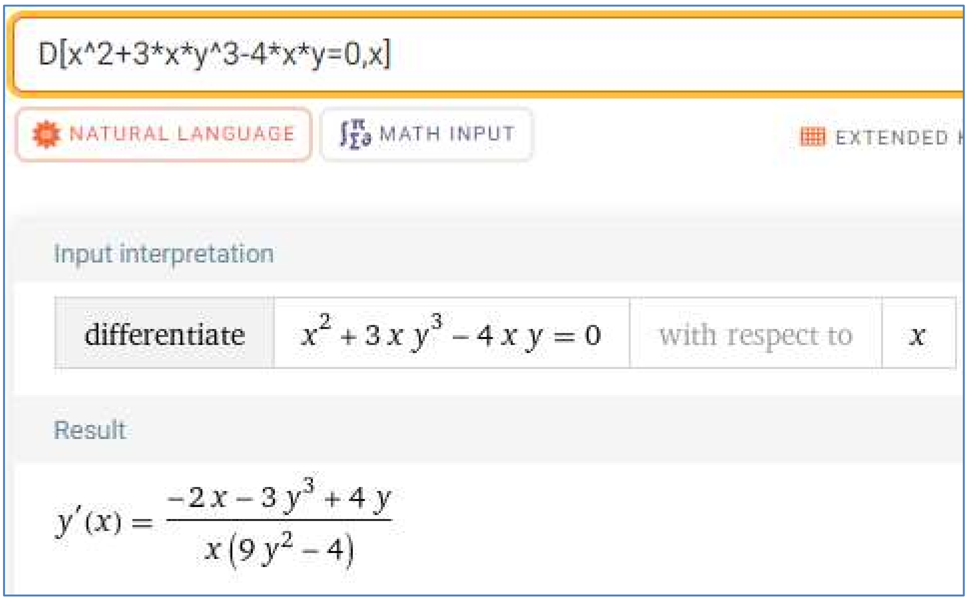
και αν η $F(x,y)$ και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ είναι συνεχείς σε κάποιο χωρίο, τότε έχουμε με $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$□

►**Παράδειγμα**: Βρείτε το $\frac{dy}{dx}$ όταν $x^2 + 3xy^3 - 4xy = 0$.

Απάντηση: Έστω $F(x,y) = x^2 + 3xy^3 - 4xy$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y^3 - 4y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 9xy^2 - 4x.$$

Κατά συνέπεια έχουμε: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+3y^3-4y}{4x-9xy^2}$.

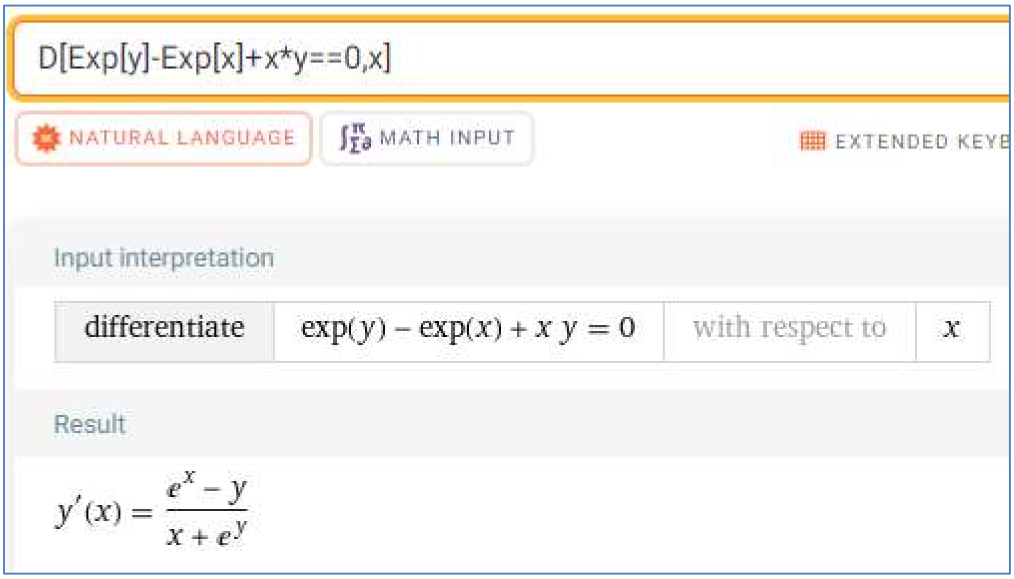


►**Άσκηση**: Βρείτε το $\frac{dy}{dx}$ όταν $e^y - e^x + xy = 0$.

Λύση: Έστω $F(x,y) = e^y - e^x + xy$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x$. Κατά συνέπεια έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x+y}{e^y+x} = \frac{e^x-y}{e^y+x}.$$



Διαφορικά

Αν η συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τότε το λεγόμενο διαφορικό df δίνεται από τη σχέση,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{1}$$

Πολλες φορές αυτά τα διαφορικά λέγονται και ολικά διαφορικά.

Ο ορισμός επεκτείνεται και για συναρτήσεις με περισσότερες μεταβλητές. Έτσι για μια συνάρτηση $f(x, y, \omega)$ έχουμε,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial \omega}d\omega.$$

►**Παράδειγμα**: Βρείτε το διαφορικό της συνάρτησης

$$f(x, y) = 3x^2 - 6x^3y^4.$$

Απάντηση: Έχουμε

$$f_x = 6x - 18x^2y^4 \text{ και } f_y = -24x^3y^3.$$

Συνεπώς $df = (6x - 18x^2y^4)dx + (-24x^3y^3)dy$. ◄

Γενικότερα αν έχουμε μια συνάρτηση $z = f\big(x, y(x)\big)$, διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με dx παίρνουμε την **ολική παράγωγο** ως προς x,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y y'.$$

►**Άσκηση**: Βρείτε το ολικό διαφορικό και την ολική παράγωγο της συνάρτησης $z = xy$.

Λύση: Έχουμε $\frac{\partial z}{\partial x} = y, \ \frac{\partial z}{\partial y} = x.$

Οπότε το ολικό διαφορικό είναι: $df = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy.$

Η ολική παράγωγος είναι: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$◄

Τύπος του Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Γνωρίζουμε ότι ο τύπος του Taylor για συναρτήσεις με μια μεταβλητή γράφεται

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0)+\cdots$$

Θυμίζουμε ότι $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot (n-1)\cdot n$.

Ο αντίστοιχος τύπος για συναρτήσεις με δύο μεταβλητές προσεγγίζει το $f(x_0+h,y_0+k)$.

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω αναπτύσσουμε πρώτα κατά Taylor ως προς x θεωρώντας το y σταθερό. Αν λοιπόν αναπτύξουμε μέχρι δεύτερη τάξη έχουμε

$$f(x_0+h,y_0+k)\approx f(x_0,y_0+k)+h\frac{\partial f(x_0,y_0+k)}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial f(x_0,y_0+k)}{\partial x^2}$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε ως προς y μέχρι δεύτερη τάξη.

$$f(x_0+h,y_0+k)\approx f(x_0,y_0)+h\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$$
$$+k\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}+h\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}+\frac{h^2\partial^3 f(x_0,y_0)}{2\partial x^2\partial y}\right)+\frac{1}{4}k^2\left(2\frac{\partial f^2(x_0,y_0)}{\partial y^2}+2h\frac{\partial f^3(x_0,y_0)}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial f^4(x_0,y_0)}{\partial x^2\partial y^2}\right).$$

Παραλείπουμε τις εκφράσεις με ∂^3,∂^4 διότι μπορεί να εμφανιστούν αν αναπτύξουμε σε 3η και 4η τάξη αλλά και διότι θεωρούμε

$$1\gg h>0,\ 1\gg k>0,$$

οπότε όταν εμφανίζονται υψηλότερες δυνάμεις αυτές έχουν αρκετά μικρότερο μέγεθος. Έτσι ο παραπάνω τύπος αν αντικαταστήσουμε το

$$f(x_0,y_0) \text{ με } f,\quad \text{το } \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \text{ με } f_x,\quad \text{το } \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \text{ με } f_y, \text{ κ.ο.κ.}$$

απλοποιείται σε

$$f(x_0+h,y_0+k)\approx f+hf_x+\tfrac{1}{2}h^2f_{xx}+kf_y+khf_{xy}+\tfrac{1}{2}k^2f_{yy} \qquad (1)$$

►**Άσκηση**: Χρησιμοποιώντας τον ακριβώς παραπάνω τύπο προσεγγίστε την τιμή $\sqrt{3.03^2+3.98^2}$.

Λύση: Έχουμε $\sqrt{3^2+4^2}=5.$

Η τιμή που ζητάμε είναι αρκετά κοντά στην παραπάνω. Μας ενδιαφέρει η τιμή αφού θεωρήσουμε $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$f(3+0.03,4-0.02)=\sqrt{(3+0.03)^2+(3+0.98)^2}$$

Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\ \text{και}\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}.$$

Αφού εδώ έχουμε $x_0=3,\ y_0=4, h=0.03,\ k=-0.02$ υπολογίζουμε.

$$f=5, f_x=0.6, f_y=0.8, f_{xx}=0.128, f_{yy}=0.072 \text{ και } f_{xy}=-0.096$$

Ο τύπος (1) γίνεται

$$\sqrt{3.03^2+3.98^2}\approx 5+0.03\cdot 0.6+\frac{1}{2}0.03^2\cdot 0.128-0.02\cdot 0.8$$
$$-0.03\cdot 0.02\cdot(-0.096)\ +\frac{1}{2}(-0.02)^2\cdot 0.072=5.00213$$

πολύ κοντά στην ακριβή τιμή $\sqrt{3.03^2+3.98^2}\approx 5.00212954$◀

Μπορούμε να συνεχίσουμε και κατ' αναλογία του τύπου (1) να βρούμε υψηλότερης τάξης προσεγγίσεις. Για παράδειγμα

$$f(x_0+h,y_0+k)\approx f+hf_x+\frac{1}{2}h^2f_{xx}+\frac{1}{6}h^3f_{xxx}+\frac{1}{24}h^4f_{xxxx}$$
$$+k\left(f_y+hf_{xy}+\frac{1}{2}h^2f_{xxy}+\frac{1}{6}h^3f_{xxxy}\right)+\frac{1}{4}k^2\left(2f_{yy}+2hf_{xyy}+h^2f_{xxyy}\right) \qquad (2)$$
$$+\frac{1}{6}k^3\left(f_{yyy}+hf_{xyy}\right)+\frac{1}{24}k^4f_{yyyy}.$$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο (x_0,y_0).

Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Ορισμός: Μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει **μέγιστο** σε ένα σημείο $M_0(x_0, y_0)$ αν

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

για όλα τα σημεία (x, y) αρκούντως κοντά στο M_0 αλλά διάφορα από αυτό. □

Ορισμός: Μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει **ελάχιστο** σε ένα σημείο $M_0(x_0, y_0)$ αν

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

για όλα τα σημεία (x, y) αρκούντως κοντά στο M_0 αλλά διάφορα από αυτό. □

Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ακρότατα** σημεία.

►**Παράδειγμα**: Βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 3.$$

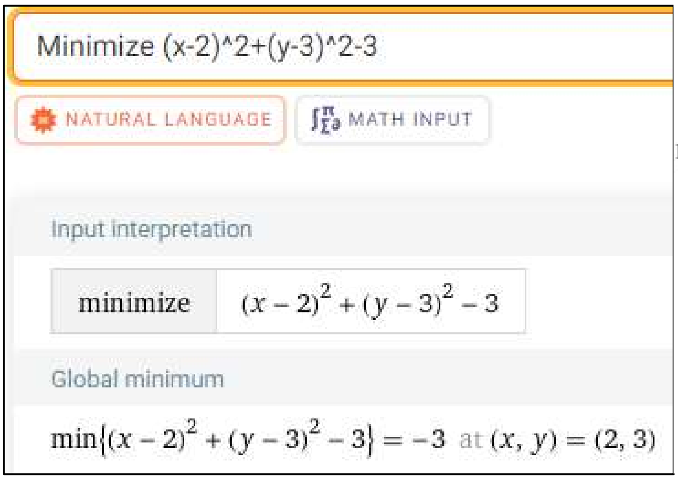
Απάντηση: Είναι φανερό ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο για

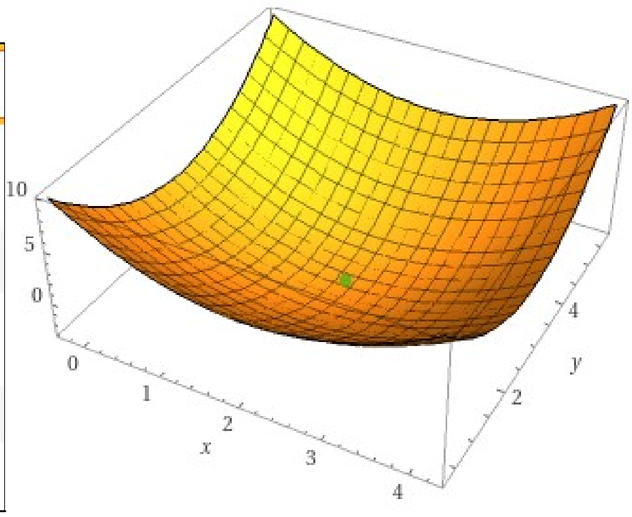
$$x_0 = 2,\ y_0 = 3.$$

Πράγματι οι παραστάσεις $(x - 2)^2$ και $(y - 3)^2$ είναι πάντα θετικές για $x_0 \neq 2,\ y_0 \neq 3$. Έτσι

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 3 \geq -3,$$

που σημαίνει $f(x, y) > f(2,3)$.





◄

► **Παράδειγμα:** Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4x + 2$$

Εξετάζουμε αν υπάρχουν ακρότατα σημεία στην συνάρτηση αυτή. Οι πρώτες μερικές παράγωγοι της $f(x,y)$ είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

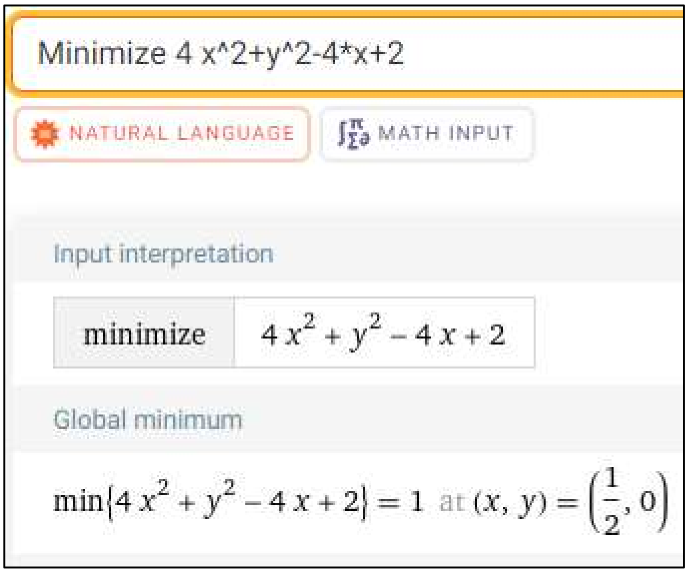
Επομένως επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{matrix} 8x - 4 = 0 \\ 2y = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{matrix}$$

Εξετάζουμε αν το σημείο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f\left(\frac{1}{2}, 0\right) &\\ &= 4x^2 + y^2 - 4x + 2 \\ &- \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} + 2\right] \\ &= (2x-1)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. ◄



► **Παράδειγμα:** Η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2 - y^2,$$

έχει μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y,$$

οι οποίες μηδενίζονται για (x_0, y_0)=(0,0).

Είναι όμως φανερό ότι στο σημείο αυτό δεν υπάρχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο σημείο. Πράγματι έχουμε $f(0,0) = 0$, ενώ για ένα οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$ διαπιστώνουμε ότι

$$f(\varepsilon, 0) > 0, \quad f(0, \varepsilon) < 0.$$

Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά στο κρίσιμο σημείο έχουμε θετικές και αρνητικές τιμές. Οπότε αυτό δεν μπορεί να είναι ακρότατο. ◄

Θεώρημα: Όταν μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως τρίτης τάξης σε μια περιοχή του κρίσιμου σημείου $M_0(x_0, y_0)$, τότε

α) η $f(x, y)$ έχει μέγιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

και

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0,$$

β) η $f(x, y)$ έχει ελάχιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

και

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$$

γ) η $f(x, y)$ δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$$

δ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε και απαιτείται περεταίρω διερεύνηση αν

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0. \ \square$$

►**Παράδειγμα**: Η συνάρτηση $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, έχει μερικές παραγώγους

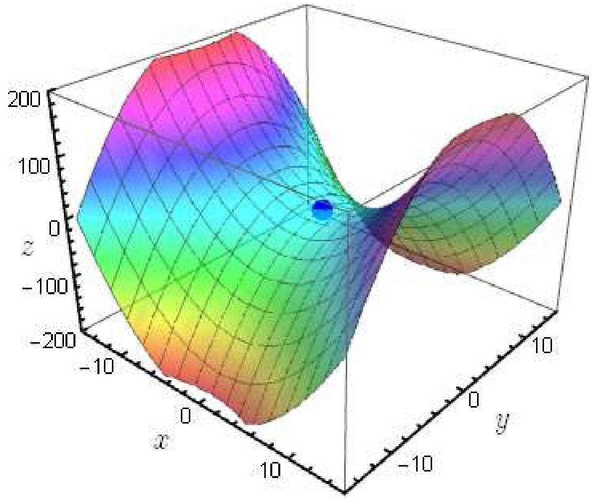
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,$$

οι οποίες μηδενίζονται για (x_0, y_0)=(0,0).

Είναι όμως φανερό ότι στο σημείο αυτό δεν υπάρχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο σημείο. Πράγματι έχουμε $f(0,0) = 0$, ενώ για ένα οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$ διαπιστώνουμε ότι

$$f(\varepsilon, 0) > 0, \ f(0, \varepsilon) < 0.$$

Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά στο κρίσιμο σημείο έχουμε θετικές και αρνητικές τιμές όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Οπότε αυτό δεν μπορεί να είναι ακρότατο. Το σημείο αυτό λέγεται **σαγματικό**.◄



►**Παράδειγμα**: Η συνάρτηση

$$z = f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 5x - 3y + 1,$$

έχει κρίσιμα σημεία που βρίσκονται λύνοντας το γραμμικό σύστημα

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 5 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 3 = 0.$$

Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο της απαλοιφής του Gauss,

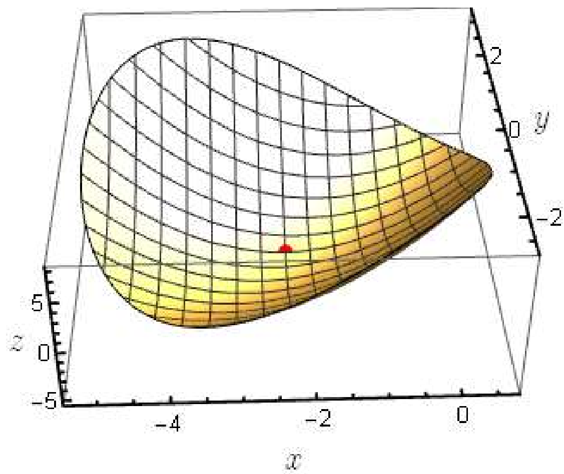
$$2x - y = -5, \quad -x + 2y = 3,$$

ή

$$2x - y = -5,$$

$$-x + \frac{1}{2}\cdot 2x + 2y + \frac{1}{2}\cdot(-y) = 3 + \frac{1}{2}\cdot(-5),$$

ή $2x - y = -5, \quad 0x + 1.5y = 0.5$



Οπότε λαμβάνουμε ως κρίσιμο σημείο

$$x_0 = -\frac{7}{3}, \; y_0 = \frac{1}{3}.$$

Οι μερικές παράγωγοι στο κρίσιμο σημείο είναι

$$P = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = 2$$

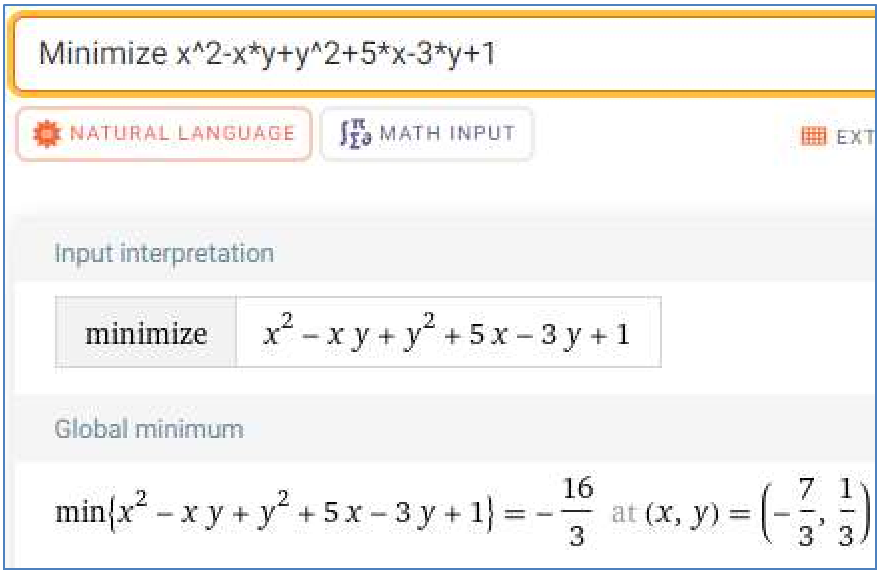
$$Q = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = 2,$$

$$R = \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 = -1.$$

Οπότε από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ότι

$$PQ - R^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 5 > 0,\ \ P > 0.$$

Επομένως η συνάρτηση έχει ελάχιστο το οποίο είναι $f\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{16}{3}$.



►**Άσκηση**: Βρείτε το μήκος το πλάτος και το ύψος ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου που οι πλευρές του έχουν συνολικά εμβαδό 54 m² και το μέγιστο δυνατό όγκο.

Λύση: Έστω x, y, ω αντίστοιχα το μήκος, πλάτος και ύψος του παραλληλεπίπεδου. Το εμβαδόν των 6 πλευρών είναι

$$2xy + 2x\omega + 2y\omega = 54.$$

Άρα έχουμε $\omega = \frac{27-}{x+y}$. Ο όγκος είναι $V = xy\omega = \frac{xy(27-x\ \ )}{x+y}$.

Οι πρώτες παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(27-x^2-2xy)}{(x+y)^2},\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(27-y^2-2xy)}{(x+y)^2}.$$

Επειδή δεν έχουν νόημα μηδενικά μήκη και πλάτη, θα πρέπει

$$27 - x^2 - 2xy = 0 \ \text{ και } \ 27 - y^2 - 2xy.$$

Το παραπάνω σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων έχει μια πραγματική θετική λύση, $x_0 = 3,\ y_0 = 3$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε και $\omega_0 = 3$. Άρα το ζητούμενο είναι κύβος με ακμή 3m. ◄

►**Άσκηση.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3.$$

Βρείτε τα ακρότατα σημεία της.

***Λύση*:**

Η συνάρτηση που δόθηκε έχει κρίσιμα σημεία που βρίσκονται λύνοντας το γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\partial (x^3 - 6xy + \ ^3)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial (x^3 - 6xy + y^3)}{\partial y} = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 3y^2 = 0 \end{array}\right|$$

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y

$$3x^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow 6y = 3x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 (1)$$

και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση

$$-6x + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow -6x + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = 0.$$

Στη συνέχεια κατά σειρά έχουμε:

$$\frac{3}{4}x^4 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0,$$

η οποία έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x_1 = 0,\ x_2 = 2$.

Λαμβάνοντας υπόψη την (1) καταλήγουμε σε δύο κρίσιμα σημεία. Τα $(0,0),\ (2,2)$.

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f είναι:

$$P = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (x^3 - 6xy + y^3)}{\partial x^2} = \frac{\partial (3x^2 - 6y)}{\partial x} = 6x,$$

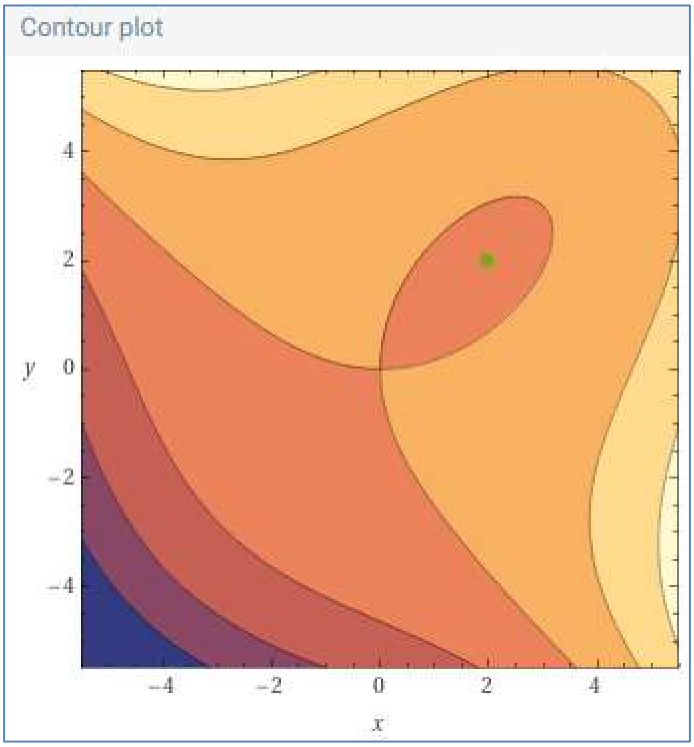
$$Q = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (x^3 - 6xy + y^3)}{\partial y^2} = \frac{\partial (-6x + 3y^2)}{\partial y} = 6y,$$

$$R = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial (x^3 - 6xy + \ ^3)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial (3x^2 - 6y)}{\partial y} = -6.$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα, βλέπουμε ότι για το πρώτο σημείο $(0,0)$ έχουμε

$$\begin{vmatrix} P & R \\ R & Q \end{vmatrix} = PQ - R^2 = (6 \cdot 0) \cdot (6 \cdot 0) - (-6)^2 = -36 < 0,$$

άρα η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο.



Για το δεύτερο σημείο έχουμε

$$\begin{vmatrix} P & R \\ R & Q \end{vmatrix} = PQ - R^2$$
$$= (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) - (-6)^2$$
$$= 108 > 0 \quad \text{και} \quad P = 12 > 0.$$

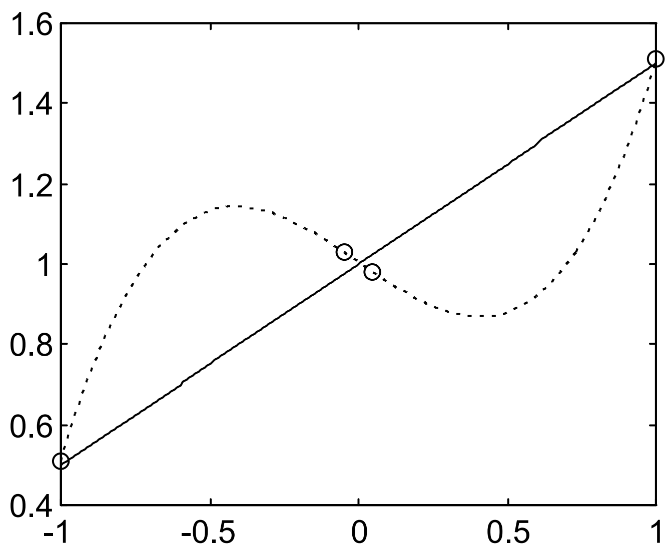
Επομένως η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο για $x_0 = 2, \;\; y_0 = 2$ το οποίο είναι $f(2{,}2) = -16$.

Στο σχήμα αριστερά βλέπουμε τις ισοϋψείς της συνάρτησης. Όσο πιο αρνητική γίνεται τόσο πιο σκουρόχρωμη εμφνίζεται. Το τοπικό ελάχιστο εμφανίζεται ως πράσινο σημείο εντός του «τοπικού βυθίσματος» στη θέση (2,2).◄

► **Παράδειγμα:** *Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα υπολογισμού της τιμής μιας συνάρτησης σε ενδιάμεσα σημεία όταν δίνονται τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα*

i	x_i	y_i
1	-1	0.51
2	$-1/25$	1.03
3	$1/20$	0.98
4	1	1.51

Όπως φαίνεται από τον πίνακα και όπως πολλές φορές υποθέτουμε (π.χ. $U = R \cdot i$ στον νόμο του *Ohm*) τα δεδομένα έχουν μια γραμμική σχέση.



Το μοναδικό πολυώνυμο 3ου βαθμού που παρεμβάλει τα δεδομένα είναι

$$p(x) = 1.007752 - 0.557799x + 0.002248x^2 + 1.057799x^3$$

Παρατηρώντας όμως το παραπάνω σχήμα, διαπιστώνουμε ότι μια ευθεία γραμμή π.χ. η $y(x) = 0.5x + 1$ "ταιριάζει" καλύτερα στα δεδομένα του πίνακα.

Μια καλή αντιμετώπιση αυτού του είδους προβλημάτων θα ήταν να βρούμε τη "*βέλτιστη*" ευθεία η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν μια προσεγγιστική συνάρτηση σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο, ακόμα και όταν αυτή δεν συμφωνεί ακριβώς με τα δεδομένα.

Η μέθοδος των **Ελαχίστων Τετραγώνων** (*least squares*) υπολογίζει τη βέλτιστη προσεγγιστική ευθεία όταν το σφάλμα προσέγγισης είναι το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των τιμών της ευθείας αυτής και των αντίστοιχων πειραματικών δεδομένων (data).

Για να γίνει εύκολα κατανοητή η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, θεωρούμε αρχικά τα δεδομένα του πίνακα, και τη γραμμική συνάρτηση

$$y(x) = ax + b$$

Αν με y_i παραστήσουμε τις πειραματικές τιμές στα x_i, $i = 1,2,3,4$ και με

$$y(x_i) = ax_i + b$$

τις αντίστοιχες τιμές πάνω στην προσδιοριστέα προσεγγιστική ευθεία, τότε το σφάλμα της προσέγγισης μπορεί να εκφραστεί:

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{4} (y_i - (a \cdot x_i + b))^2.$$

Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό των a, b ώστε το σφάλμα να γίνει ελάχιστο. Η συνάρτηση σφάλματος είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών Οι αναγκαίες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση είναι:

$$\frac{\partial}{\partial a} E(a,b) = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{4} \left(y_i - (a \cdot x_i + b)\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial b} E(a,b) = \frac{\partial}{\partial\ b} \sum_{i=1}^{4} (y_i - (a \cdot x_i + b))^2 = 0$$

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, η εξίσωση του σφάλματος γράφεται:

$$E(a,b) = \{0.51 - (-a + b)\}^2 + \{1.03 - (-0.04a + b)\}^2 + \\ +\{0.98 - (0.05a + b)\}^2 + \{1.51 - (a + b)\}^2$$

ή

$$E(a,b)=\frac{9123}{2000}-\frac{5039a}{2500}+\frac{20041a^2}{10000}-\frac{403b}{50}+\frac{ab}{50}+4b^2.$$

Από την παραπάνω εξίσωση σφάλματος οι συνθήκες ελαχιστοποίησης δίνουν τις παρακάτω εξισώσεις

$$-2.0156+4.0082a+0.02b=0$$

$$-8.06+0.02a+8.b=0$$

Η λύση του γραμμικού συστήματος είναι:

$$a\sim 0.497848, b\sim 1.00625$$

Οπότε η βέλτιστη ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα του πίνακα είναι η

$$y(x)=0.497848x+1.00625 \blacktriangleleft$$

Γραμμική προσέγγιση

Το γενικό πρόβλημα προσαρμογής της βέλτιστης ευθείας σε ένα σύνολο δεδομένων (x_i, y_i) $i=1,2,..,n$ με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση της παράστασης

$$E(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a\cdot x_i+b))^2$$

Τούτο έχει σαν συνέπεια τις αναγκαίες συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial a}E(a,b)=\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a\cdot x_i+b))^2=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial b}E(a,b)=\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a\cdot x_i+b))^2=0$$

ή

$$2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)(-x_i)=0, \qquad 2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)(-1)=0$$

Οι εξισώσεις αυτές απλοποιούνται στις λεγόμενες κανονικές εξισώσεις

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i, \qquad a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

Το παραπάνω σύστημα επιλυμένο ως προς a και b μας δίνει

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}, \qquad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}.$$

Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών με περιορισμό

Έστω ότι δίνεται μια συνάρτηση $z = f(x, y)$

με την υπόθεση ότι οι μεταβλητές x, y συνδέονται με την σχέση $p(x, y) = 0$.

Από την παραπάνω συνάγεται ότι μόνο η μια μεταβλητή είναι ανεξάρτητη. Έστω λοιπόν ότι η μεταβλητή y εξαρτάται από την x. Αν επιλύσουμε την εξίσωση $p(x, y) = 0$ ως προς y και αντικαταστήσουμε στη συνάρτηση z, τότε καταλήγουμε σε μια συνάρτηση με μια μεταβλητή, τη x. Το πρόβλημα έτσι μετασχηματίζεται στην περίπτωση όπου ζητείται ακρότατο συνάρτησης με μια μεταβλητή.

Το πρόβλημα όμως μπορεί να λυθεί και με άλλο τρόπο. Έτσι λαμβάνοντας υπόψη ότι η μεταβλητή y εξαρτάται από την μεταβλητή x και ανακαλώντας τα λεγόμενα περί ολικής παραγώγου στην παράγραφο 6 έχουμε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Οπότε στα ακρότατα ισχύει

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \tag{1}$$

Όμοια για την συνάρτηση περιορισμών $p(x, y)$ ισχύει

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2) με έναν συντελεστή λ και την προσθέτουμε στην (1) λαμβάνοντας

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right) + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$$

ή

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial p}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Η παραπάνω ικανοποιείται για όλα τα ακρότατα. Εξασφαλίζουμε την ισχύ της όταν ταυτόχρονα

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0, \ \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0.$$

Συνυπολογίζοντας την (1) καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα τριών (μη γραμμικών) εξισώσεων με αγνώστους τα x, y, λ:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0, \quad p(x, y) = 0 \tag{3}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε τα x, y, λ. Το λ παίζει βοηθητικό ρόλο και δεν χρειάζεται για κάτι περαιτέρω.

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι αναγκαίες για την ύπαρξη ακροτάτων. Δηλαδή τα σημεία αυτά πρέπει να τις ικανοποιούν. Δεν είναι σίγουρο ότι δεν ικανοποιούνται και από άλλα σημεία που δεν είναι ακρότατα. Αυτά που ανήκουν στην κατηγορία των κρίσιμων σημείων. Γι' αυτό χρειάζεται επιπλέον έρευνα για τις ιδιότητες των σημείων που ικανοποιούν τις εξισώσεις αυτές.

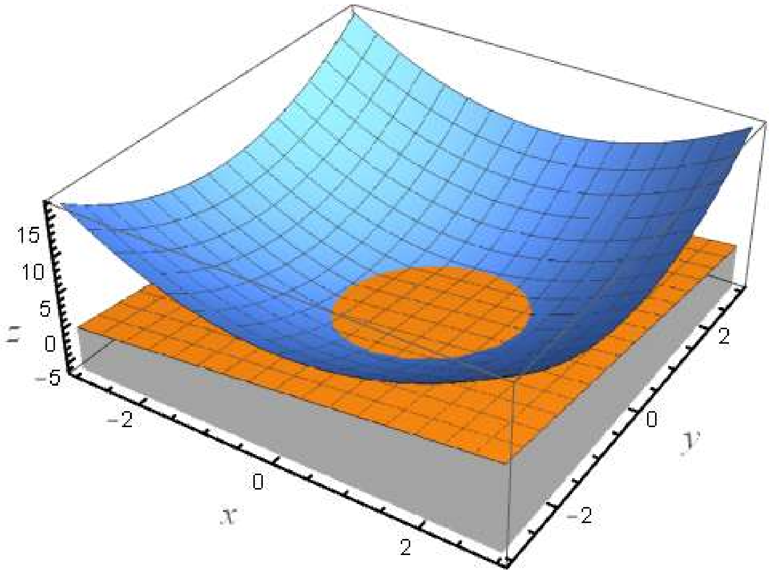
Παρατηρώντας εκ νέου τις τρεις εξισώσεις (3) βλέπουμε ότι μπορεί να προκύψουν από την απλή βελτιστοποίηση (αναζήτηση ακροτάτων) της συνάρτησης

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda p(x, y).$$

Θεωρώντας λοιπόν τη βοηθητική συνάρτηση Φ το πρόβλημά μας μετασχηματίζεται στην εύρεση ακροτάτων για την Φμόνο. Στα αποτελέσματα θα βρούμε και τιμές για την βοηθητική μεταβλητή λ.

►**Παράδειγμα**: Δίνεται η συνάρτηση $z = f(x, y) = x - y$, και ο περιορισμός

$$p(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$



Το ελάχιστο βρίσκεται κατά μήκος του κεκλιμένου κύκλου στον οποίο τέμνονται οι δύο επιφάνειες f και p.

Για να βρούμε τα ακρότατα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Phi(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Παραγωγίζουμε την Φ ως προς τις τρεις μεταβλητές x, y, λ και παίρνουμε

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + 2\lambda x,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1 + 2\lambda y,\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1.$$

Κατά συνέπεια πρέπει να λύσουμε το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$1 + 2\lambda x = 0,\ -1 + 2\lambda y = 0,\ x^2 + y^2 = 1.$$

Λύνουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις και έχουμε $x = -\frac{1}{2\lambda}, y = \frac{1}{2\lambda}$.

Αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση $\frac{1}{(-2\lambda)^2}+\frac{1}{(2\lambda)^2}=1$ ή $\frac{1}{2\lambda^2}=1$,

και τελικά $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Εν τέλει οι λύσεις είναι

$$\left(x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{και} \quad \left(x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}, y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Προχωράμε εξετάζοντας τα δύο κρίσιμα σημεία.

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα 8.2 υπολογίζουμε τις μερικές παράγωγους

$$P=\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}=2\lambda, \qquad Q=\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2}=2\lambda, \qquad R=\left(\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

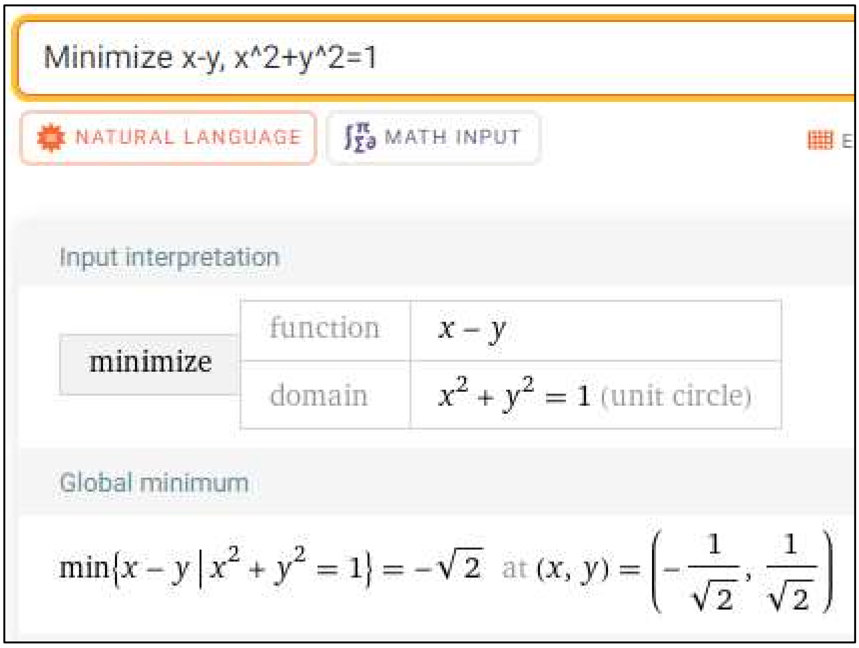
Για όλα τα σημεία έχουμε $PQ-R^2=2\lambda\cdot 2\lambda-(1)^2=4\lambda^2>0$.

Για το πρώτο σημείο έχουμε $\quad P=2\lambda_1>0$

οπότε παρουσιάζεται τοπικό ελάχιστο όταν $\left(x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Για το δεύτερο σημείο έχουμε $\quad P=2\lambda_1<0$

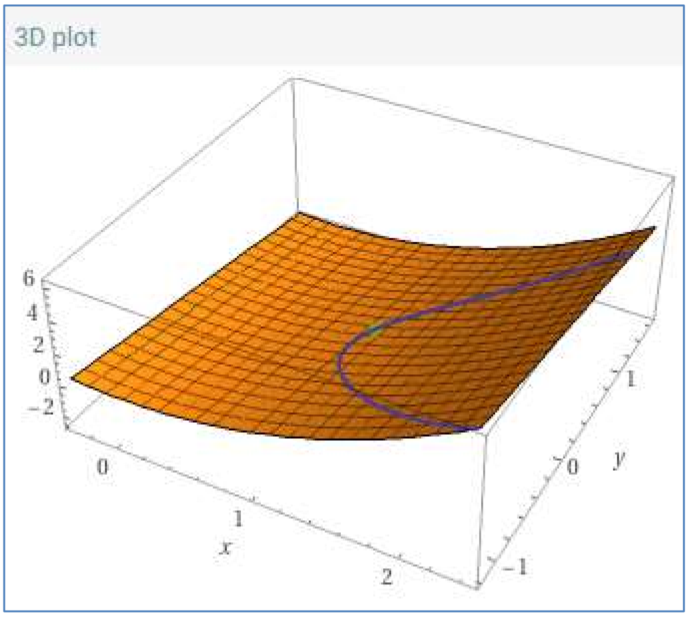
οπότε παρουσιάζεται τοπικό ελάχιστο όταν $\left(x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



►**Άσκηση**: Δίνεται η συνάρτηση $z=f(x,y)=x^2-y-1$. Βρείτε τα ακρότατα σημεία της όταν είναι περιορισμένη από την

$$p(x,y)=x-y^2-1=0.$$

Λύση: Τα ακρότατα βρίσκονται κατά μήκος της έλλειψης στην οποίο τέμνονται οι δύο επιφάνειες f και p.



Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$\Phi(x,y,\lambda) = x^2 - y - 1 \\ +\lambda(x - y^2 - 1).$$

Παραγωγίζουμε την Φ ως προς τις τρεις μεταβλητές x, y, λ και παίρνουμε

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \lambda + 2x$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -1 - 2\lambda y$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = -1 + x - y^2$.

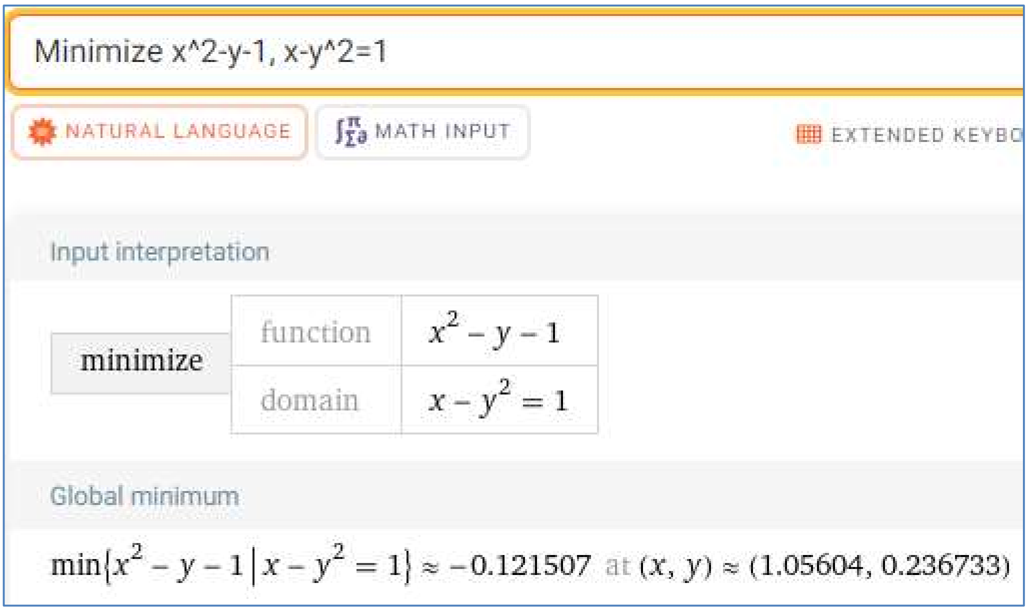
Λύνουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις και έχουμε $x = \frac{1}{4y}, \lambda = -\frac{1}{2y}$.

Αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση και έχουμε $-\frac{4y^3+4y-1}{4y} = 0$.

Η $4y^3 + 4y - 1 = 0$ έχει μια πραγματική ρίζα. Αυτή μπορεί να βρεθεί με την μέθοδο Newton Raphson (δείτε: Χ. Μασούρος & Χ. Τσίτουρας, Γενικά Μαθηματικά, 2014, εκδ. Τσότρας, σελ. 506). Τελικά βρίσκουμε

$$y_0 \approx 0.2367329038645631 \text{ και } x_0 \approx 1.056042467772148$$

Το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο αφού με βάση το θεώρημα 8.2, $\frac{\partial^2\Phi(x_0,y_0)}{\partial x^2} = 2 > 0$.



►**Άσκηση**: Δίνεται η συνάρτηση $z = f(x, y) = 4x^2 + 10y^2$, περιορισμένη από την $x^2 + y^2 \leq 9$.

Βρείτε τα ακρότατα σημεία της.

Λύση: Τα ακρότατα μπορεί να βρίσκονται είτε εντός του κυκλικού δίσκου $x^2 + y^2 < 9$ είτε επί του συνόρου $x^2 + y^2 = 9$.

Στην πρώτη περίπτωση εργαζόμαστε με την f όπως στην προηγούμενη ενότητα και εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία που βρίσκονται εντός του $x^2 + y^2 < 9$. ′Εχουμε $f_x = 8x, f_y = 20y$, οπότε το πρώτο κρίσιμο σημείο είναι το $(x_1, y_1) = (0,0)$ το οποίο είναι αποδεκτό αφού είναι εντός του κυκλικού δίσκου που μας ενδιαφέρει.

Για τον χειρισμό στο σύνορο (δηλαδή την ισότητα) προχωράμε με τη χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange. Δημιουργούμε τη συνάρτηση

$$\Phi(x, y, \lambda) = 4x^2 + 10y^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 9).$$

Λαμβάνοντας τις μερικές παραγώγους καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα που πρέπει να λυθεί

$$8x - 2\lambda x = 0, \qquad 20y - 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

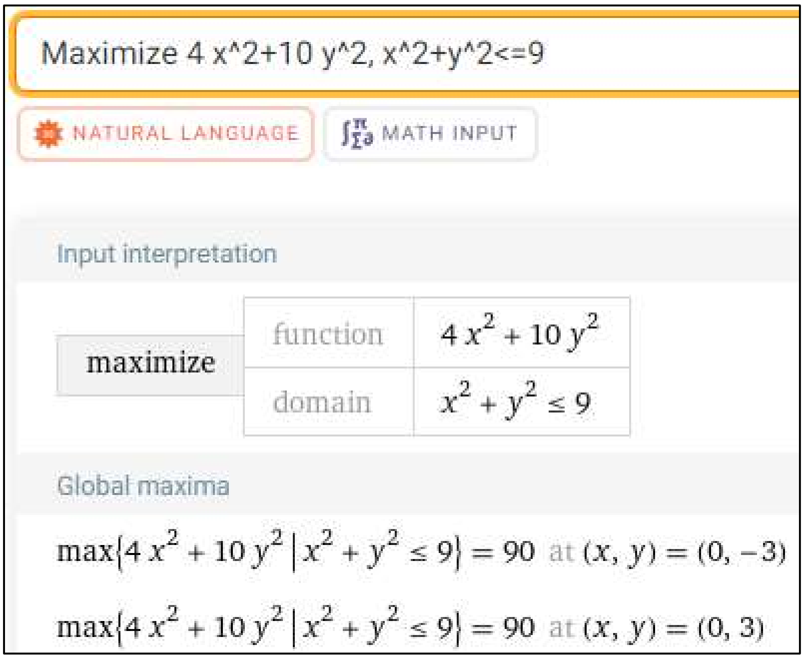
Αυτό έχει τέσσερις λύσεις

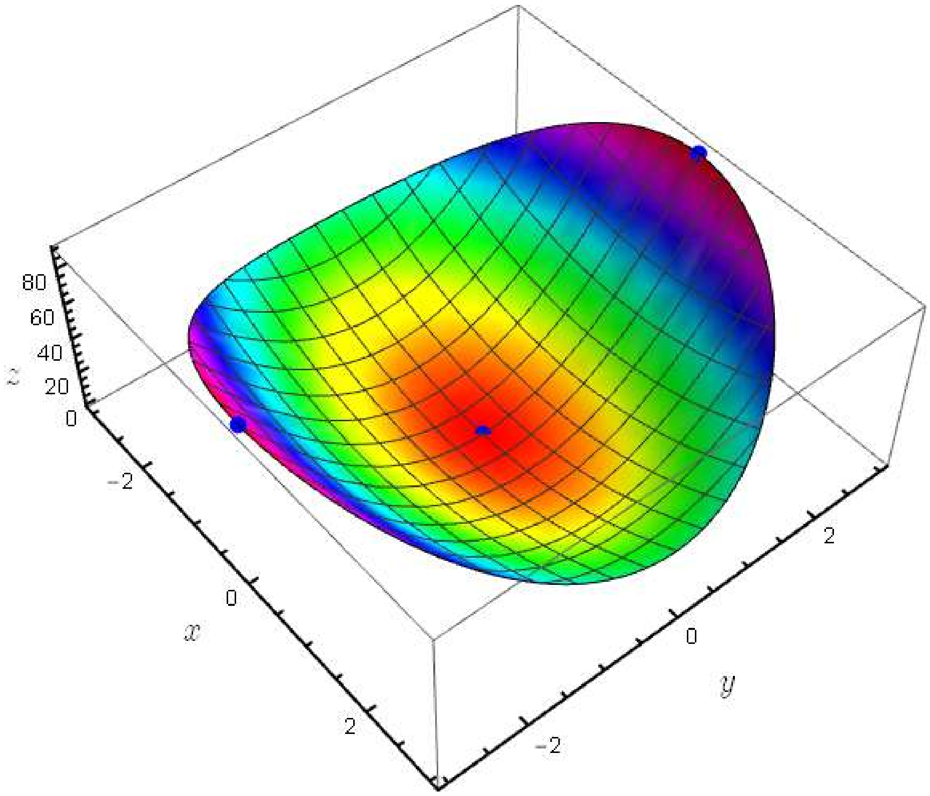
$$(x_2, y_2) = (3,0), \ (x_3, y_3) = (-3,0), \qquad (x_4, y_4) = (0,3), \qquad (x_5, y_5) = (0, -3).$$

Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα 5 σημεία και διαπιστώνουμε ότι έχουμε

Τοπικό ελάχιστο: $f(x_1, y_1) = 0.$

Τοπικό μέγιστο: $f(x_4, y_4) = f(x_5, y_5) = 90.$





Στο παραπάνω γράφημα τα τρία σημεία ενδιαφέροντος εμφανίζονται ως σφαιρίδια μπλε χρώματος. Εικονίζονται κάπως υπερμεγέθη για έμφαση. ◄

Διανυσματικές συναρτήσεις

Έστω μια συνάρτηση $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού το D που είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$**.** Στην περίπτωση αυτή αντιστοιχίζουμε ένα διάνυσμα

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

σε ένα άλλο διάνυσμα

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]^T \in \mathbb{R}^m$$

μέσω των mτο πλήθος συναρτήσεων – συνιστωσών της f

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{cases}.$$

Δηλαδή για τις συνιστώσες έχουμε $f_i: D \to \mathbb{R},\ i = 1,2,\cdots,m$.

Έχουμε μέχρι τώρα ασχοληθεί βασικά με τις πραγματικές συναρτήσεις ($n = m = 1$) και τις συναρτήσεις με $n = 2, m = 1$. Ας δούμε και κάποιους ορισμούς για τη γενικότερη περίπτωση. Σημειώστε ότι τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{R}^m$ θεωρούνται πάντα στήλες. Αλλιώς θα γράφαμε $\mathbb{R}^{1\times n}$ ή $\mathbb{R}^{1\times m}$.

Ορισμός: Μια συνάρτηση ορισμένη όπως παραπάνω με $n = m = 3$, λέγεται **διανυσματικό πεδίο** στο χώρο $\mathbb{R}^3$. □

Ένα παράδειγμα είναι το ηλεκτροστατικό πεδίο.

Όμοια ορίζονται διανισματικά πεδία και για άλλες τιμές όταν $m = n$.

Ορισμός: Ιακωβιανός πίνακας για μια συνάρτηση

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ορίζεται ο

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \ \square$$

►**Παράδειγμα**: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} f_1(x) = x_1x_2 - x_2^2 - 2 \\ f_2(x) = x_1^2x_2 - x_1^2 \end{cases}.$$

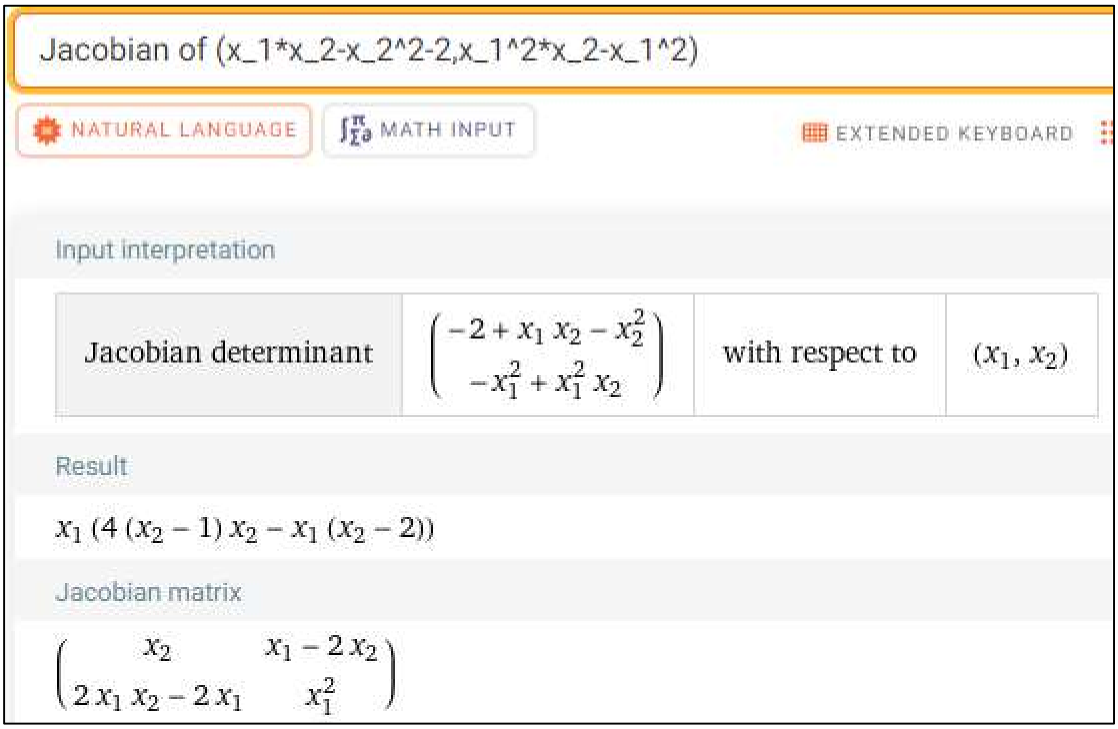
Βρείτε τον Ιακωβιανό πίνακα.

Απάντηση: Έχουμε

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1 - 2x_2, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1x_2 - 2x_1,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1^2.$$

Έτσι ο Ιακωβιανός πίνακας είναι

$$J = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 2x_2 \\ 2x_1x_2 - 2x_1 & x_1^2 \end{bmatrix}.$$



Μέθοδος Newton Raphson σε συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Ο τύπος γίνεται

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{[k+1]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{[k]} - J^{-1} \cdot f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right).$$

όπου οι εκθέτες $[k], [k+1], \cdots$ αντιπροσωπεύουν την επανάληψη.

►**Παράδειγμα**: Στο ακριβώς παραπάνω παράδειγμα βρείτε τη λύση του

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_2^2 - 2 \\ x_1^2 x_2 - x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ξεκινώντας από $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{[0]} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ και κάνοντας 2 επαναλήψεις.

Απάντηση: Έχουμε

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_1}{-3x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2} & \dfrac{x_1 - 2x_2}{x_1(-3x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2)} \\ \dfrac{2(-1 + x_2)}{-3x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2} & -\dfrac{1}{x_1(-3x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2)} \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{[k+1]} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1(-2 + 2x_1(-1 + x_2) + 2x_2 - 3x_2^2)}{-4(-1 + x_2)x_2 + x_1(-3 + 2x_2)} \\ \dfrac{4 + x_1 - 4x_2 - 2x_2^2 + 2x_2^3}{x_1(3 - 2x_2) + 4(-1 + x_2)x_2} \end{bmatrix}^{[k]}.$$

Λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{[1]} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{[2]} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Το οποίο όπως παρατηρούμε ικανοποιεί την δοθείσα εξίσωση. ◄

Ορισμός: Μια συνάρτηση ορισμένη όπως παραπάνω με $n > m = 1$, λέγεται **βαθμωτό πεδίο** στο χώρο $\mathbb{R}^n$. □

Ένα παράδειγμα βαθμωτού πεδίου είναι μια αίθουσα σε κάθε σημείο της οποίας αντιστοιχεί μια θερμοκρασία.

Ορισμός: Αν $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$, βαθμωτό πεδίο), τότε ορίζεται το **gradient** (κλίση) της *f*:

$$\nabla f = gradf = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \square$$

Ιδιότητες του gradient

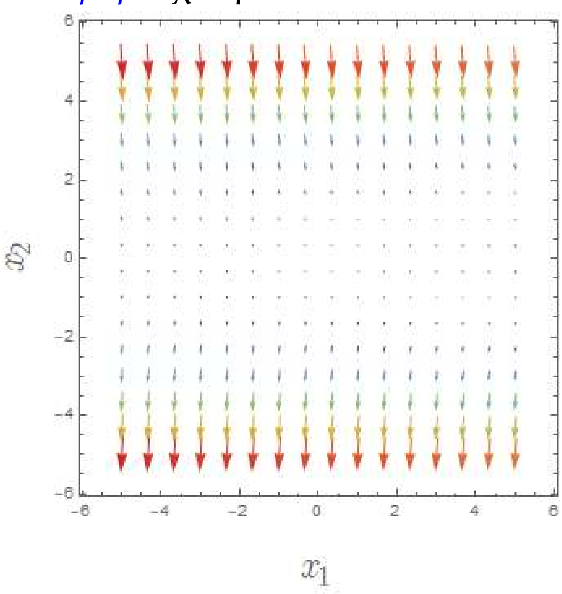
$$\nabla(g+g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla(kf) = k\nabla f,\ k \in \mathbb{R},$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \quad \nabla\frac{f}{g} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2},\ g \neq 0.$$

►**Παράδειγμα:** Δίνεται το βαθμωτό πεδίο $f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1x_2 - x_2^3$. Υπολογίστε την κλίση στο σημείο $P = [-1{,}2]^T$.

Απάντηση: Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 3x_2^2.$$



Άρα το gradient είναι

$$\nabla f = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}, \text{ και}$$

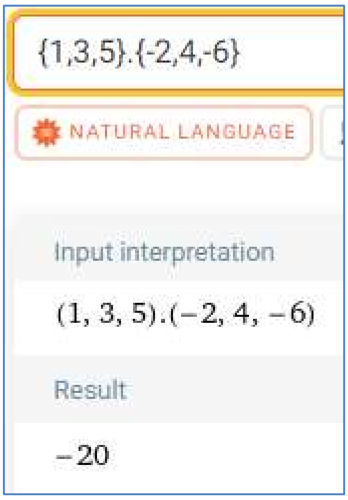
$$\nabla f(P) = \nabla f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 - 3 \cdot 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Αριστερά παρατίθεται το διανυσματικό πεδίο. ◄

Ορισμός: Αν $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ και $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$ είναι δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, τότε **Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο** των x και y, συμβολικά $x \cdot y$, ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \ \square$$

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος**.



►**Παράδειγμα:** Έστω ότι στον Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ μας δίδονται τα διανύσματα:

$$x = [1,3,5]^T \text{ και } y = [-2,4,-6]^T$$

Τότε το εσωτερικό γινόμενό τους είναι:

$$x \cdot y = 1 \cdot (-2) + (3) \cdot (4) + 5 \cdot (-6) = -20. \ ◄$$

Ορισμός: Νόρμα είναι η απεικόνειση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\square$

Η **Ευκλείδια νόρμα** είναι $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + \ldots + x_n x_n}$.

Η **Ευκλείδια απόσταση** δυο διανυσμάτων είναι $\|x - y\|_2$

Για τη γωνία θ ανάμεσα σε δυο διανύσματα ισχύει

$$x \cdot y = \|x\|_2 \|y\|_2 \cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Όταν τα διανύσματα είναι κάθετα τότε $\cos\theta = 0$ και συνεπώς $x \cdot y = 0$.

Ορισμός: (Παράγωγος κατά κατεύθυνση) Η Παράγωγος μιας συνάρτησης f κατα την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$D_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}. \ \square$$

Παράδειγμα: Στο βαθμωτό πεδίο του παραπάνω παραδείγματος υπολογίστε την παράγωγο κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u} = [1,2]^T$.

Απάντηση: Έχουμε

$$D_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = [x_2, x_1 - 3x_2^2] \cdot [1{,}2]^T = x_2 + 2 \cdot (x_1 - 3x_2^2). \blacktriangleleft$$

Ορισμός: Αν $f: D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$, βαθμωτό πεδίο), τότε ορίζεται ο Εσσιανός πίνακας της *f*:

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \square$$

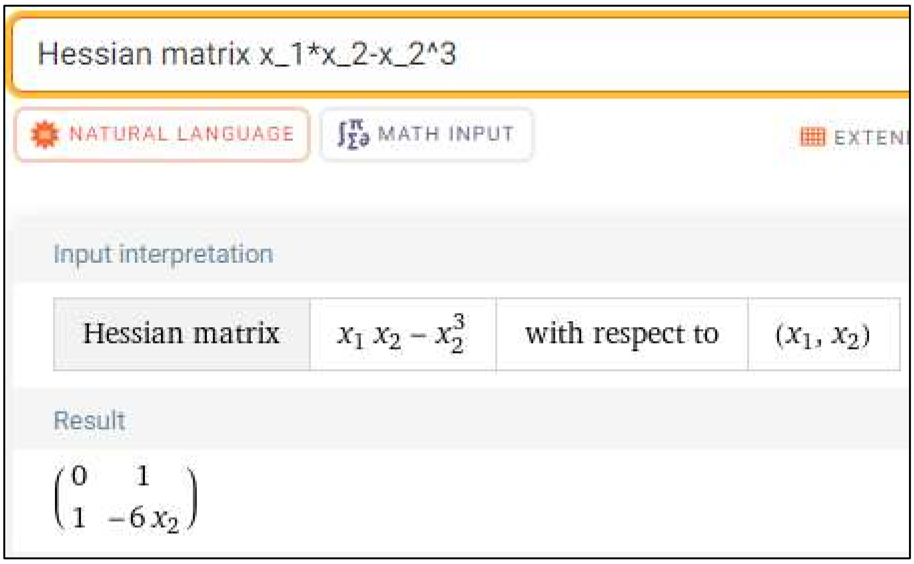
►**Παράδειγμα (συνέχεια):** Δίνεται το βαθμωτό πεδίο

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 x_2 - x_2^3.$$

Υπολογίστε την Εσσιανή στο σημείο $P = [-1{,}2]^T$.

Απάντηση: Έχουμε όπως πριν $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 3x_2^2$. Οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2^2} = -6x_2$$



Άρα η Εσσιανή είναι

$$H_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6x_2 \end{bmatrix} \text{ και } H_f(P) = H_f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

Οι πρώτοι όροι του τύπου του Taylor μπορεί να γραφούν τώρα

$$f(u+d) \approx f(u) + \nabla f(u)^T \cdot d + \frac{1}{2} d^T H_f(u) d,$$
$$u, d \in \mathbb{R}^n.$$

►**Παράδειγμα (συνέχεια):** Δίνεται το βαθμωτό πεδίο

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 x_2 - x_2^3.$$

Υπολογίστε τους πρώτους όρους του τύπου του Taylor στο σημείο $P = [-1,2]^T$.

Απάντηση: Έχουμε

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}\right) \approx f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \nabla f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^T \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [d_1 \quad d_2] H_f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 - 2^3 + [2 \quad -13] \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [d_1 \quad d_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

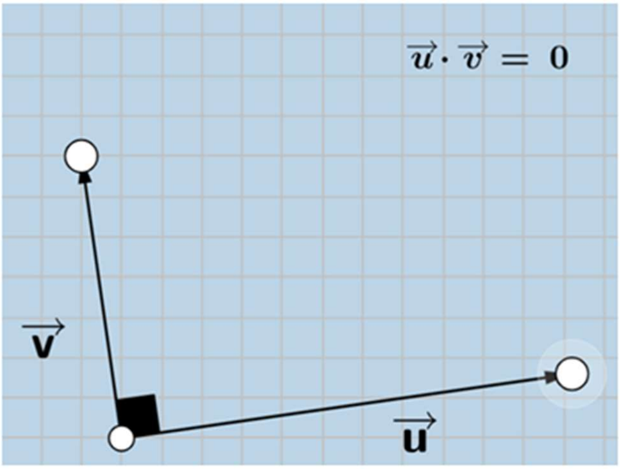
$$= -10 + 2d_1 - 13d_2 + d_1 d_2 - 6d_2^2. ◄$$

Ορισμός: Αν $a, b \in \mathbb{R}^3$ με

$$a^T = [a_1, a_2, a_3], \; b^T = [b_1, b_2, b_3]$$

τότε το **εξωτερικό γινόμενο** είναι

$$a \times b = \begin{bmatrix} -a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ -a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{bmatrix}. \square$$



Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή το **εσωτερικό γινόμενο** είναι

$$a^T \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}.$$

Όταν $a^T \cdot b = 0$ τότε τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

Σχήμα. Εσωτερικό γινόμενο κάθετων διανυσμάτων $\vec{u}$ & $\vec{v}$. ◄

► **Παράδειγμα:** Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το εξωτερικό και το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:

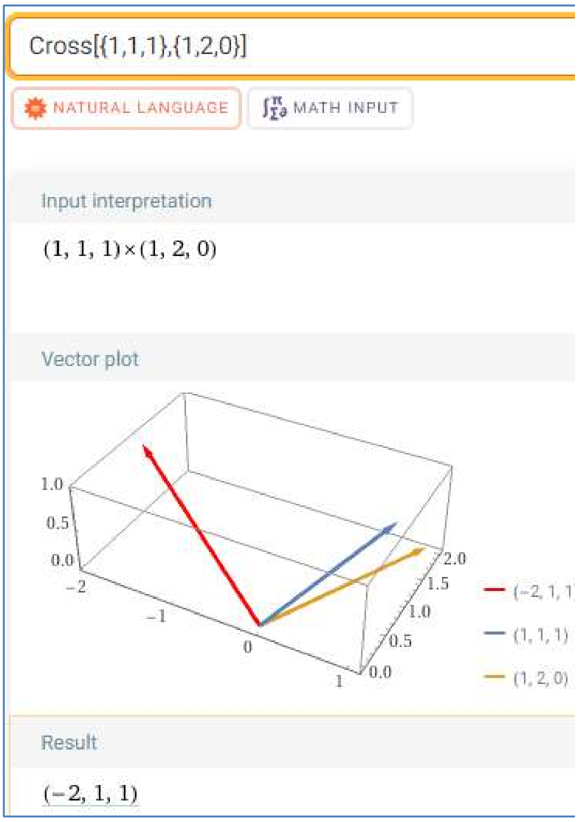
$$u = (1,1,1) \text{ και } v = (1,2,0).$$

Έχουμε

$$w = u \times v = (-2,1,1) \text{ και } u \cdot v = 3.$$

Παρατηρούμε επίσης $u \cdot w = v \cdot w = 0$.
Άρα το διάνυσμα w είναι κάθετο

στο επίπεδο $u - v$. Στο σχήμα με κόκκινο το διανύσματα w ◄



Ορισμός: Αν $f: D \to \mathbb{R}^3$ ($D \subseteq \mathbb{R}^3$,διανυσματικό πεδίο), τότε ορίζεται η **divergence** (απόκλιση) της *f*:

$$div f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \in \mathbb{R}. \square$$

Η απόκλιση είναι ένας πραγματικός αριθμός. Μπορεί να γραφεί και ως το εσωτερικό γινόμενο

$$div f = \nabla^T \cdot f$$

αφού

$$div f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}.$$

Προσέξτε εδώ ότι το ∇ δεν είναι ∇f.

Ορίζουμε επίσης τον διαφορικό **τελεστή Laplace** ∇^2

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = div(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}.$$

Ιδιότητες του div:

$$div(f+g) = div f + div g, \; div(kf) = k div f, \text{ με } k \in \mathbb{R}.$$

►**Παράδειγμα:** Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$f(x)=f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{cases} f_1=x_1x_3-x_2^3\\ f_2=x_3-x_2^2\\ f_1=x_1+x_3+x_2^2\end{cases}.$$

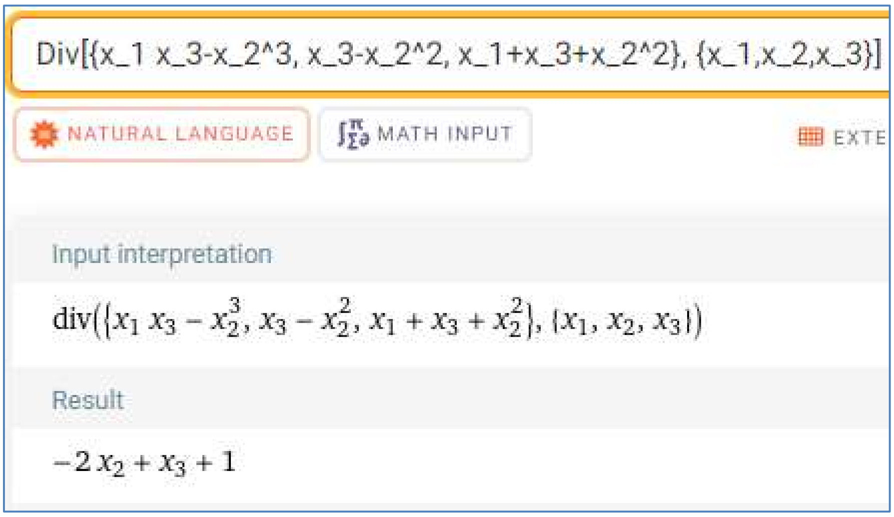
Υπολογίστε το $divf$ στο σημείο $P=(1,1,0)^T$.

Απάντηση: Έχουμε:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=x_3,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}=-2x_2,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}=1$$

οπότε $$divf=1-2x_2+x_3$$

και $$divf([1\quad 1\quad 0]^T)=1-2\cdot 1+0=-1.$$◄



Ορισμός: Αν $f:D\to\mathbb{R}^3$ ($D\subseteq\mathbb{R}^3$, διανυσματικό πεδίο), τότε ορίζεται το **curl** (στροβιλισμός) της *f*:

$$curlf=\left[\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3},\ \ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1},\ \ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right]^T.\square$$

Ιδιότητες του curl

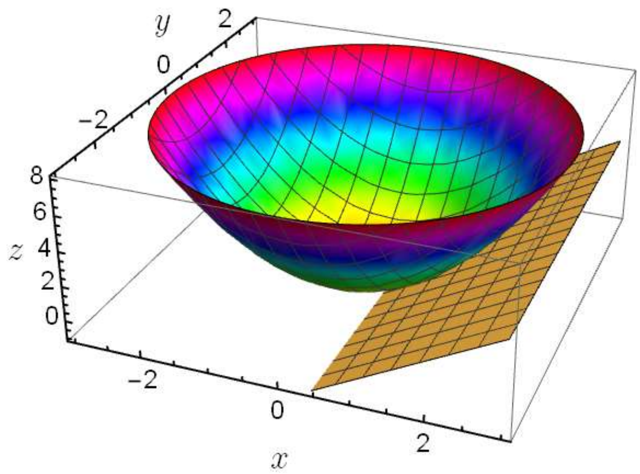
$$\mathrm{curl}(f+g)=\mathrm{curl}f+\mathrm{curl}\,g,\qquad \mathrm{curl}(kf)=k\,\mathrm{curl}f,\ k\in\mathbb{R}$$

$$\mathrm{curl}(\mathrm{curl}f)=\nabla(\mathrm{div}f)-\nabla^2 f\qquad \mathrm{curl}(\nabla f)=[0,0,0]^T$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}f)=0\qquad \mathrm{div}(f\times g)=g\cdot\mathrm{curl}f-f\cdot\mathrm{curl}\,g$$

Ορισμός: **Εφαπτόμενο επίπεδο:** Εφαπτόμενο επίπεδο στην $z=f(x,y)$ στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ είναι το

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).\ \square$$



►**Παράδειγμα:** Έστω

$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$

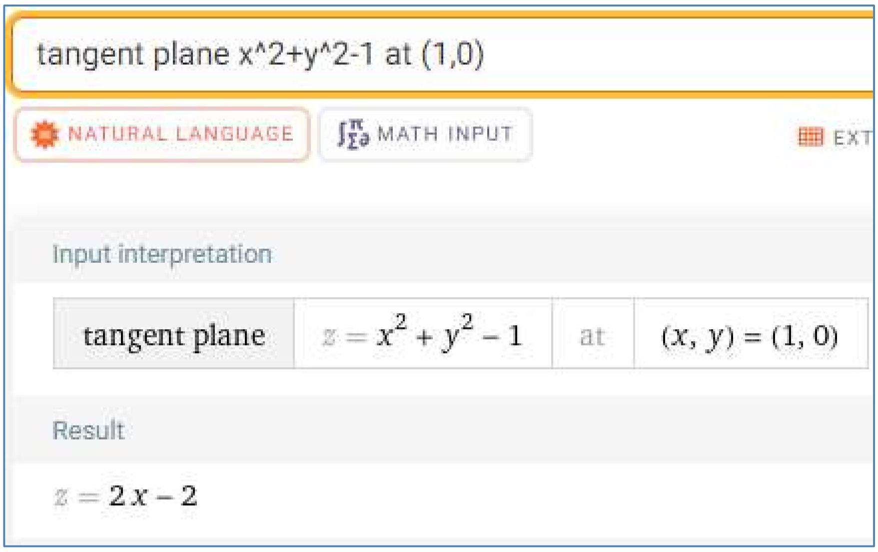
Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο (1,0).

Απάντηση: Έχουμε

$z_0 = f(1,0) = 0,\ f_x(1,0) = 2,$
$f_y(1,0) = 0.$

Άρα το επίπεδο είναι:

$$z - 0 = 2(x-1) + 0(y-0) \text{ ή } z = 2x - 2.$$



► **Άσκηση:** Αποδείξτε ότι $curl(\nabla f) = [0{,}0{,}0]^T$.

Απόδειξη: Έχουμε, $\nabla f = grad f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T,$

και

$$curl(\nabla f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

Ορισμός: Ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ λέγεται **αστρόβιλο** ή **συντηρητικό** όταν $curl f = [0,0,0]^T$.

Δηλαδή όταν $$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}. \ \square$$

► **Άσκηση:** Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} f_1 = x_1 - 2kx_2 - \mu x_3 \\ f_2 = nx_1 - \mu x_2 + 2x_3. \\ f_3 = x_1 + nx_2 + 3kx_3 \end{cases}$$

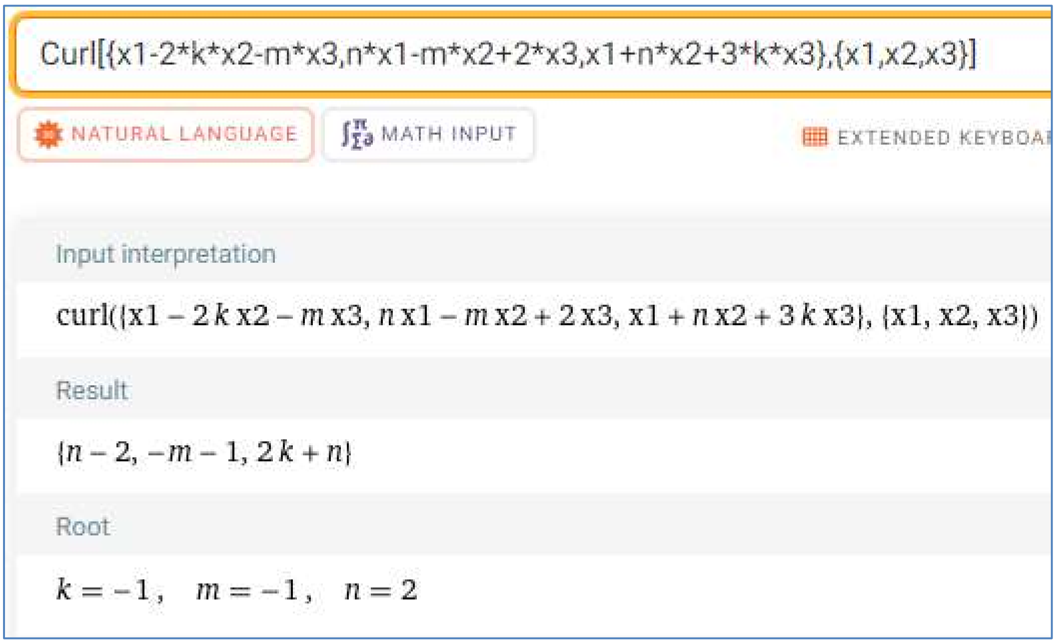
Υπολογίστε τα k, m, n έτσι ώστε να είναι συντηρητικό.

Απάντηση:

Έχουμε:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = n, \ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = -\mu, \ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = n, \ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2k.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρέπει $n = 2,\ \mu = -1,\ k = -1$.



◄

Βιβλιογραφία

Χ. Μασούρος, Χ. Τσίτουρας, Γενικά Μαθηματικά ΙΙ, εκδ. Τσότρας, 2021.