ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Περιγραφική στατιστική

- Περιγράφει τις ιδιότητες ενός πληθυσμού ή ενός δείγματος χωρίς να ασχολείται με περισσότερα

Στατιστική συμπερασματολογία

- Ασχολείται με την **πρόβλεψη** των ιδιοτήτων ενός πληθυσμού μέσω της επιβεβαίωσης μιας υπόθεσης που προτείνεται στο πρώτο βήμα της διαδικασίας
- Η υπόθεση γενικοποιείται στη συνέχεια, ώστε να έχουμε συμπεράσματα για τον πληθυσμό

ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ (1)

- Σχεδόν το σημαντικότερο κομμάτι της στατιστικής
- Πότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση? Πότε λέμε ότι δεν ισχύει?
- Όταν είναι μικρότερη από μια προκαθορισμένη τιμή πιθανότητας που έχουμε αρχικά θέσει – συνήθως 5%
- Τι σημαίνει αυτό – πολύ πολύπλοκο φαίνεται…
- Σημαίνει ότι η πιθανότητα μια τιμή να ανήκει στην κατανομή της μηδενικής υπόθεσης είναι πολύ μικρή. Όσο μικρότερη είναι η πιθανότητα, όσο πιο απίθανο είναι να βρούμε αυτή την τιμή στην κατανομή τόσο πιο πολύ μας έρχεται στο μυαλό να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση «Είναι πολύ απίθανο να συμβαίνει αυτό το πράγμα – δεν συμβαίνει μάλλον» αυτή είναι η κύρια σκέψη μας

ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ (2)

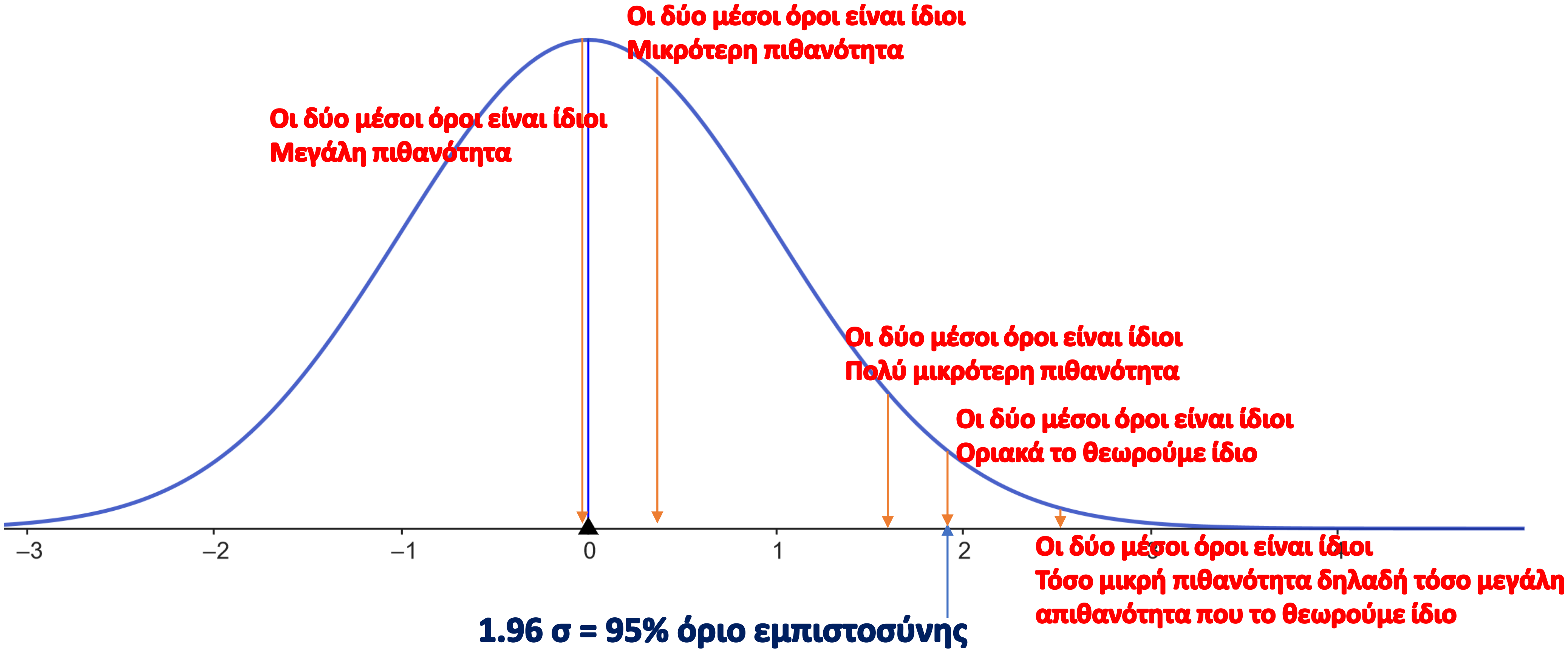
- Ας σκεφτούμε με όρους ενός πειράματος
- Συγκρίνω δύο ομάδες Α και Β από δύο χημικές διαδικασίες, ας πούμε μια οξείδωση με Η2Ο2 στην ομάδα Α και με ΚΜΝΟ4 στην ομάδα Β.
- Η μέτρηση των αποτελεσμάτων μου δίνει απόδοση 35% στην Α και 39% στη δεύτερη.
- ????????
- Μοιάζουν οι δύο αποδόσεις - είναι ίδιες μήπως?
- Αν είναι τότε μια χαρά είναι τα πράγματα θα χρησιμοποιήσω το Η2Ο2 που είναι ευκολότερο αντιδραστήριο (είναι υγρό ενώ το ΚΜΝΟ4 πρέπει να το διαλύσω να το τιτλοδοτήσω κλπ) – το ΚΜΝΟ4 επίσης βάφει τα πάντα όπου ακουμπάει
- Θα ξανακάνω την αντίδραση δεύτερη φορά Α→ 36% Β→36%
- ????????

ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ (2)

- ΥΠΟΜΟΝΗΗΗΗΗΗΗΗ!!!!
- Τρίτη φορά Α→ 35% Β→37%
- Τέταρτη φορά Α→ 36% Β→35%
- Πέμπτη φορά και τέλος Α→33% Β→ 37%
- ???????
- Τι θα ήταν η μηδενική υπόθεση?
- Οι δύο μέσοι όροι είναι στατιστικά ίδιοι
- Τι ενοούμε? Η κατανομή του Α περιλαμβάνει τον μέσο όρο του Β με αρκετή πιθανότητα?

ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ (3)

Οι δύο μέσοι όροι είναι ίδιοι



Στατιστικό Ζ (Z-score)

- Βασίζεται στην κατανομή κατά Gauss
- Ουσιαστικά προσπαθεί να μας πει πόσες τυπικές αποκλίσεις μακριά από τον μέσο όρο βρίσκεται μια μετρούμενη τιμή σε μια δοκιμασία επαναλαμβανόμενων μετρήσεων
- πχ πραγματοποιώ μέτρηση ενός δείγματος στα πλαίσια μιας σειράς μετρήσεων ήδη που ξέρω την μέση τιμή του μ και την τυπική του απόκλιση σ. Η μετρούμενη τιμή είναι «φυσιολογική»? Ανήκει σε αυτόν τον πληθυσμό?
- Εδώ, ο προσεκτικός αναλυτής θα πρέπει να ρωτήσει «ο πληθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή?». Αν η απάντηση είναι δεν ξέρω ή όχι τότε απαιτείται μια σειρά από άλλες δοκιμασίες…

Στατιστικό Z (Z-score)

- Εδώ, ο προσεκτικός αναλυτής θα πρέπει να ρωτήσει «ο πληθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή?». Αν η απάντηση είναι δεν ξέρω ή όχι τότε απαιτείται μια σειρά από άλλες δοκιμασίες…

- Θα υποθέσουμε ότι η απάντηση είναι «ναι! Ο πληθυσμός ακολουθεί κατανομή κατά Gauss»

- Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό κάποιος σκέφτηκε κάποτε να ορίσει ένα στατιστικό τέστ – το z στατιστικό τέστ

- Γιατί το λέμε έτσι? Κανείς δεν ξέρει – κάποτε όμως η κατανομή λεγόταν z κατανομή – και από κει ξέμεινε το ζ στατιστικό τέστ

Στατιστικό Z (Z-score)

- Ποια είναι η μαθηματική έκφραση του στατιστικού z?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Τι λέει η παραπάνω έκφραση? Πόσες φορές απέχει η μέτρησή μας από τον μέσο όρο αν χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο το σ
- Π.χ. Έχουμε δει πως το 1.96 σ αντιστοιχεί σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%
- Αν η μέτρηση είναι μακρύτερα από 1.96 σ τότε είναι έξω από το όριο εμπιστοσύνης 95%

Στατιστικό Z (Z-score)

- Αν κάνουμε μια μέτρηση με τιμή 200 στα πλαίσια ενός μεγαλύτερου πειράματος που έχει μ=125 και σ=25.
- Η τιμή του στατιστικού z είναι

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{200 - 125}{25} = \frac{75}{25} = 3$$

- Τι μας λέει? ότι η τιμή 200 είναι 3 τυπικές αποκλίσεις μακριά από το μέσο όρο.
- 3 τυπικές αποκλίσεις είναι μη αποδεκτές σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% καθώς όπως έχουμε πεί αντιστοιχούν σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99.7%. Αν ήταν 1.96 ή λιγότερο αυτή η τιμή θα ανήκε στη κατανομή μας με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.
- (έχουμε ζητηματάκια με τις δίπλευρες κατανομές αλλά προς το παρόν το προσπερνάμε…)

Στατιστικό Z (Z-score)

- Καλά για πληθυσμούς. Για δείγματα παρακαλώ?
- Για δείγματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση με ελαφρά τροποποίηση ώστε να έχουμε τις δειγματικές τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

S.O.S αυτός ο τύπος ισχύσει μόνο για δείγματα >30 (άλλοι λένε 50) καθώς τότε αρχίζουμε να έχουμε ένα πληθυσμό και όχι δείγμα…

- Αλλιώς?
- Αλλιώς t-test όπως θα δούμε αμέσως μετά

Στατιστικό Ζ (Z-score)

- Έχουμε τριάντα δείγματα με μέση τιμή $\bar{x} = 50$ και τυπική απόκλιση $= 5$. Ποια είναι η πιθανότητα ένα δείγμα να έχει τιμή 55?

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{55 - 50}{5} = 1$$

- Το δείγμα απέχει μια τυπική απόκλιση s και συνεπώς η πιθανότητα είναι 50+34=84.13%
- αν το σκεφτούμε απλά 50% ως το 0 και 68.26/2=34.13% (γιατί 1 s αριστερά και δεξιά από το μέσο όρο περιέχεται το 68.26% των πιθανοτήτων…)

Στατιστικό Ζ (Z-score)

- Τι γίνεται αν χρησιμοποιήσουμε τους γνωστούς μέσους όρους των δειγμάτων αντί για τις μεμονωμένες μετρήσεις στο πληθυσμό?
- Υπενθυμίζω το κεντρικό οριακό θεώρημα – οι μέσοι όροι ομαδοποιώντας τα δείγματα σε μικρές ομάδες είναι πιο κοντά σε μια κανονική κατανομή απ’ ότι αν χρησιμοποιήσουμε μεμονωμένες μετρήσεις
- Ο τύπος του στατιστικού – z γίνεται σε αυτή την περίπτωση

$$z = \frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

όπου n ο αριθμός των δειγμάτων κάθε ομάδας

Στατιστικό Z (Z-score) παράδειγμα

- Μια πολύ μεγάλη σειρά μετρήσεων έχει μέσο όρο 50 μg και τυπική απόκλιση 5 μg. Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε ένα δείγμα 25 μετρήσεων με τιμή 65 μg ?

$$z = \frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{65 - 50}{\frac{5}{\sqrt{25}}} = 15$$

- Η τυπική απόκλιση της δειγματικής κατανομής (sampling distribution) είναι 1 οπότε η πιθανοτητα εύρεσης ενός τέτοιυ δείγματος είναι <<1% (είμαστε 15 φορές πιο μακριά από τον μέσο όρο βλέπετε…)

Στατιστικό t (t-test)

- Βασίζεται στην κατανομή Student
- Μας λέει τα ίδια πράγματα με την κανονική κατανομή (πόσες αποκλίσεις είναι η υπολογιζόμενη τιμή μακριά από το μέσο όρο) αλλά για πολύ λίγα δείγματα <30
- Εξακολουθεί να ισχύει η απαίτηση να έχουμε κανονική κατανομή - απλά έχουμε τόσα λίγα δείγματα που δεν μπορούμε να την προσεγγίσουμε της προκοπής.

Στατιστικό t (t-test)

- Υπάρχουν πολλές παραλλαγές του t-test. Ας δούμε κάμποσες

Στατιστικό t (t-test)

- **Σύγκριση του πειραματικού μέσου όρου $\bar{x}$ με τιμή στόχο μ**
- Θα χρησιμοποιήσουμε το στατιστικό t

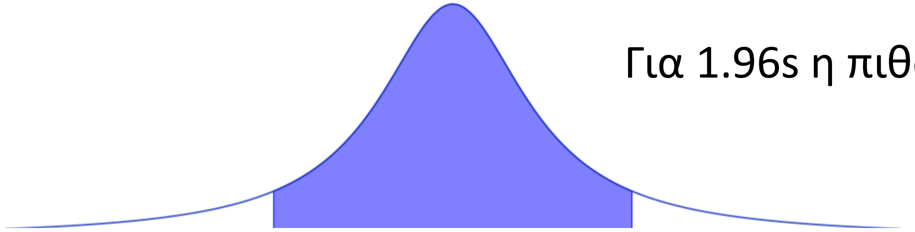
$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s}$$

όπου $\bar{x}$=μέσος όρος του δείγματος μ=μέσος όρος του πληθυσμού s=η τυπική απόκλιση του δείγματος και n=ο αριθμός των δειγμάτων

- Όσο μεγαλώνει το n μεγαλώνει, αυξάνεται και η σιγουριά μας για το αποτέλεσμα ή με άλλα λόγια μικραίνει η «ποινή» για την αβεβαιότητα μας

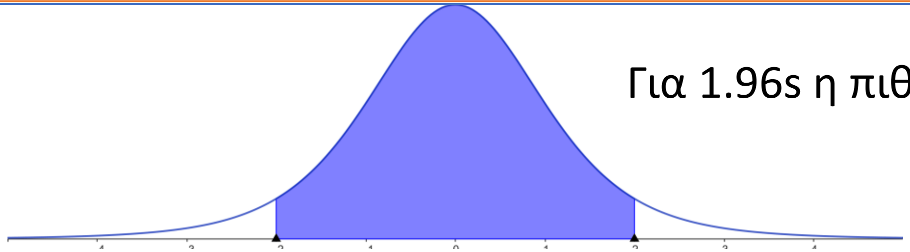
Στατιστικό t (t-test)

n=1



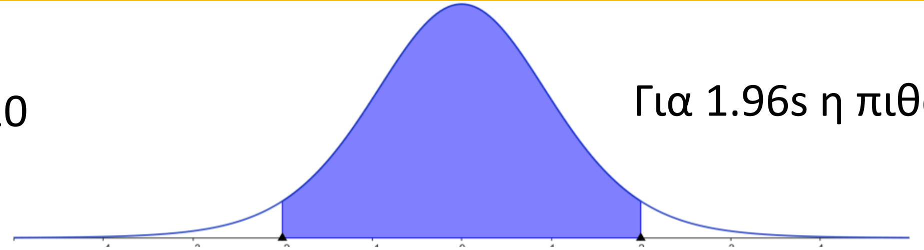
Για 1.96s η πιθανότητα να βρω την τιμή στόχο στο διάστημα εμπιστοσύνης είναι 0.699

n=5



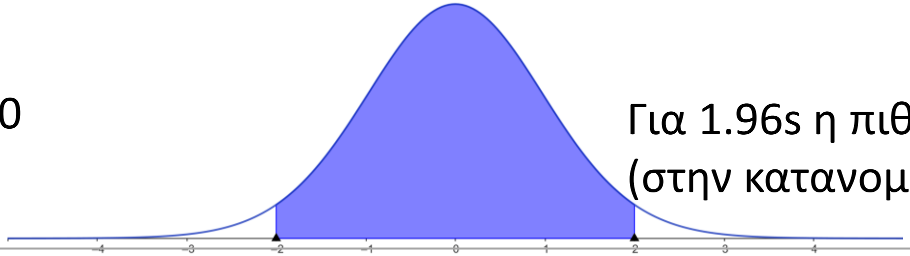
Για 1.96s η πιθανότητα να βρω την τιμή στόχο στο διάστημα εμπιστοσύνης είναι 0.89

n=10



Για 1.96s η πιθανότητα να βρω την τιμή στόχο στο διάστημα εμπιστοσύνης είναι 0.92

n=50



Για 1.96s η πιθανότητα να βρω την τιμή στόχο στο διάστημα εμπιστοσύνης είναι 0.94 (στην κατανομή Gauss είναι 0.95)

Στατιστικό t (t-test)

- Πως διαβάζουμε από πίνακες ένα στατιστικό t?
- SOS → τον αριθμό δειγμάτων τον μετατρέπω σε βαθμούς ελευθερίας (n-1)
- Ψάχνω το επίπεδο εμπιστοσύνης π.χ. 0.05
- Αν ο αριθμός είναι μικρότερος διατηρώ τη μηδενική υπόθεση
  - Γιατί? Γιατί η πιθανότητα να έχω κάνει λάθος είναι μικρή


–Ἔλλη, νά ἕνας πίνακας
Λόλα, νά ἕνα ἄλλος

t-test table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

Στατιστικό t (t-test)

- Μετράμε 5 δείγματα εμβολιασμένα με 50 ng ml^{-1} και βρίσκουμε συγκεντρώσεις

50.4, 50.7, 49.1, 49.0, 51.1 ng ml^{-1}

Υπάρχει συστηματικό σφάλμα?

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s} = \frac{(50.06 - 50)\sqrt{5}}{0.956} = 0.14$$

t-test table

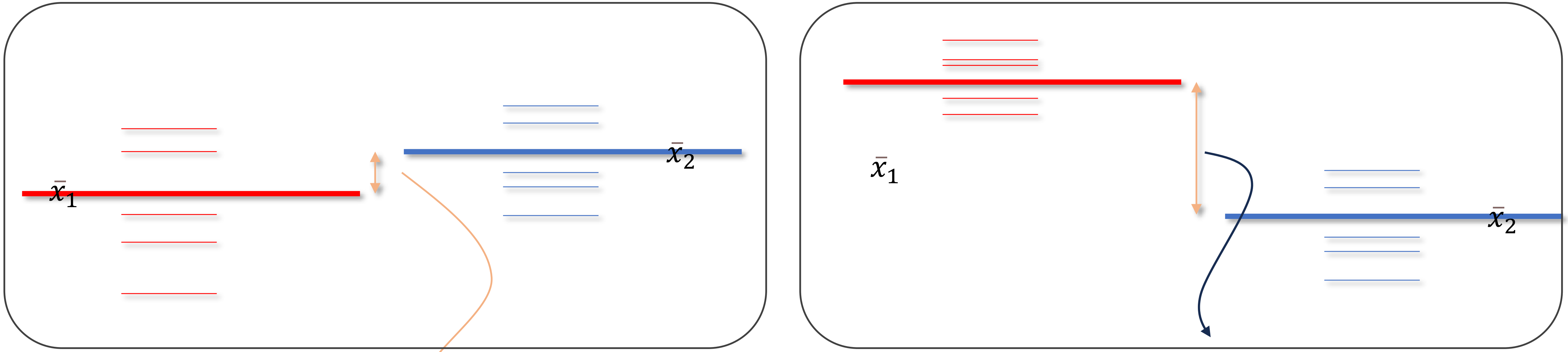
cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05
df							
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Από τον πίνακα για 4 βαθμός ελευθερίας και επίπεδο εμπιστοσύνης 0.05 (95%) η τιμή είναι 2.78. Δηλαδή θα ανεχόμουν πιθανότητα ως και 2.78. Τώρα έχω μικρότερη πιθανότητα να κάνω λάθος (0.14). Άρα διατηρώ την μηδενική υπόθεση

Στατιστικό t (t-test)

- Σύγκριση του μέσου όρου $\bar{\boldsymbol{x}}$ δύο πειραματικών ομάδων
- Π.χ. σύγκριση δύο πειραματικών διεργασιών όπως μιας εκχύλισης με άλλη που χρησιμοποιεί διαφορετικό διαλύτη – σύγκριση δυο συνθετικών πορειών με διαφορετικό καταλύτη – σύγκριση δύο ομάδων πειραματοζώων στη μια από τις οποίες χορηγούμε φάρμακο κλπ
- Ποια είναι η μηδενική υπόθεση H_0;
- Οι δύο μέσοι όροι ΤΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ είναι ίσοι, δηλαδή $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$ οπότε πρέπει να δείξουμε και ότικαι η διαφορά των μέσων όρων των δειγμάτων δεν διαφέρει σημαντικά από το 0 δηλαδή να δείξουμε πως $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0$

Στατιστικό t (t-test)



Σε σχέση με αυτό?

Διαφέρει σημαντικά από το μηδέν?

Στατιστικό t (t-test)

- Αν όμως έχουμε διαφορετικό αριθμό δειγμάτων σε κάθε ομάδα? Και/ή διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις?
- Αν οι τυπικές αποκλίσεις δεν είναι *συγκλονιστικά διαφορετικές* ορίζουμε μια συνενωμένη(?)/συγκεντρωτική(?) (pooled) τυπική απόκλιση

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}$$

- συγκλονιστικά διαφορετικές... είναι λέξη αυτή?

Σωστά!!! θα μάθουμε σε λίγο πως να συγκρίνουμε τις τυπικές αποκλίσεις

Στατιστικό t (t-test)

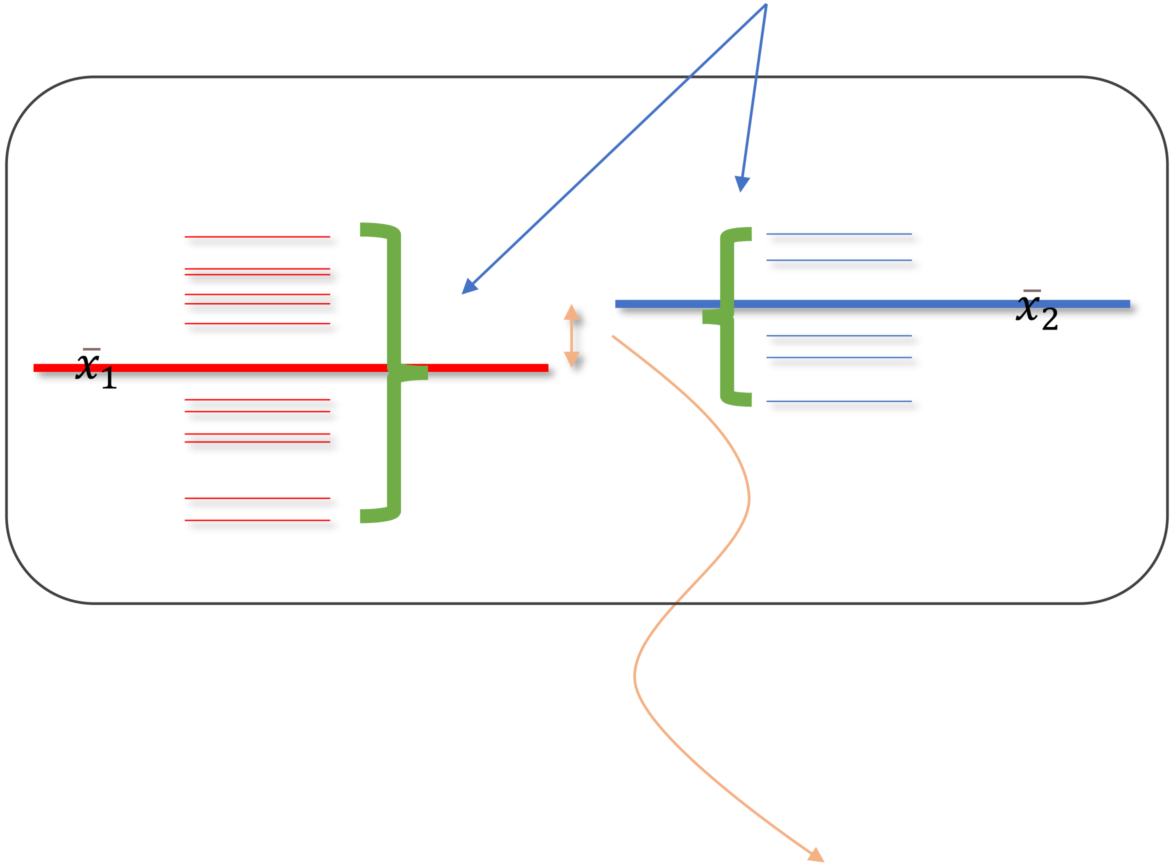
- Ας δούμε το στατιστικό t για ομάδες με ανόμοιο αριθμό δειγμάτων

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- Εδώ οι βαθμοί ελευθερίας είναι $n_1 + n_2 - 2$

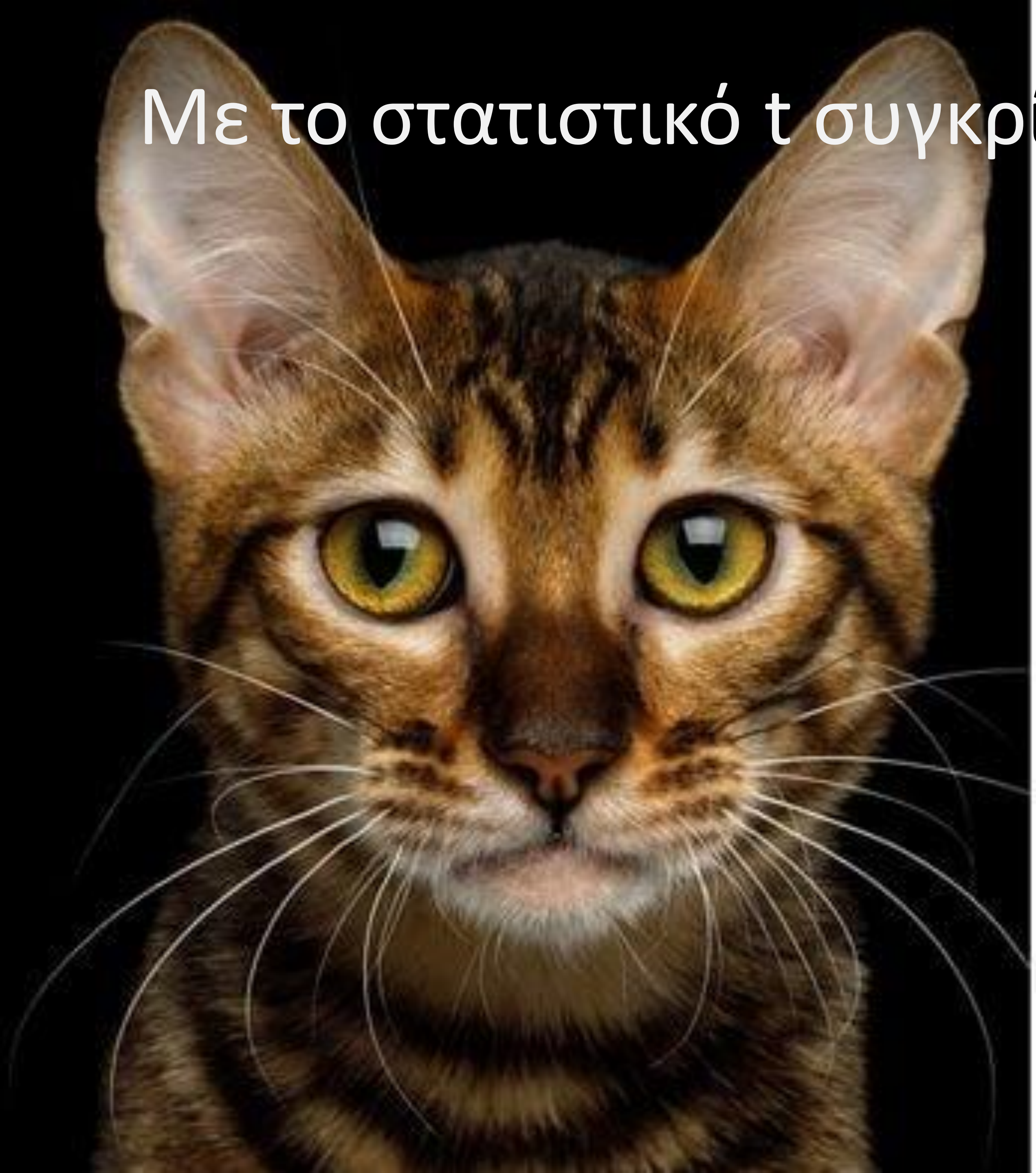
Στατιστικό t (t-test)

Είναι διαφορετικές οι τυπικές αποκλίσεις?



Διαφέρει σημαντικά από το μηδέν?

Με το στατιστικό t συγκρίνουμε **ΔΥΟ** ομάδες **ΜΟΝΟ**



Στατιστικό t (t-test)

- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Προσδιορισμός Cr σε φυτικό ιστό (γρασίδι)
- Μέθοδος 1: $\bar{x} = 1.48$ $s = 0.28$
- Μέθοδος 2: $\bar{x} = 2.33$ $s = 0.31$
- $n = 5$ και για τις δύο
- Διαφέρουν στατιστικά σημαντικά?
- Οι δύο τυπικές αποκλίσεις s φαίνονται πολύ διαφορετικές (στο μέλλον θα το αποδείξουμε κιόλας)

Στατιστικό t (t-test)

- Ας υπολογίσουμε την συνενωμένη τυπική απόκλιση

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)} \Rightarrow s^2 = \frac{(4\times 0{,}28^2)+(4\times 0.31^2)}{5+5-2} = 0.0872$$

$$\text{άρα } s = 0.295$$

- Ας υπολογίσουμε το στατιστικό t

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \Rightarrow t = \frac{2.33 - 1.48}{0.295\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)}} = 4.56$$

Στατιστικό t (t-test)

- Ας δούμε τι σημαίνουν αυτά τα νούμερα
- Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% το στατιστικό t είναι

$$t_8 = 2.31 \ (P = 0.05)$$

- Εφόσον το πειραματικό $|t| = 4.56$ είναι μεγαλύτερο από το 2.31 σημαίνει ότι η μηδενική υπόθεση είναι απίθανο να έχει συμβεί στην τύχη, είναι συστηματική.
- Συνεπώς απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση – οι δύο μέθοδοι δεν είναι ισοδύναμες

Στατιστικό t (t-test)

- Χρησιμοποιούμε δύο διαδικασίες βρασμού για τον υπολογισμό κασσίτερου με υδρόλυση του υποστρώματος με HCl. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω

Refluxing time (min)	Tin found (mg kg^{-1})
30	55, 57, 59, 56, 56, 59
75	57, 55, 58, 59, 59, 59

- Κάνοντας τις πράξεις

30 min $\bar{x}=57.00$ $s=2.80$
75 min $\bar{x}=57.83$ $s=2.57$

Στατιστικό t (t-test)

- Ας υπολογίσουμε την συνενωμένη τυπική απόκλιση

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)} \Rightarrow s^2 = \frac{(5\times 2.80^2)+(5\times 2.57^2)}{6+6-2} = 2.685$$

άρα $s = 1.64$

- Ας υπολογίσουμε το στατιστικό t

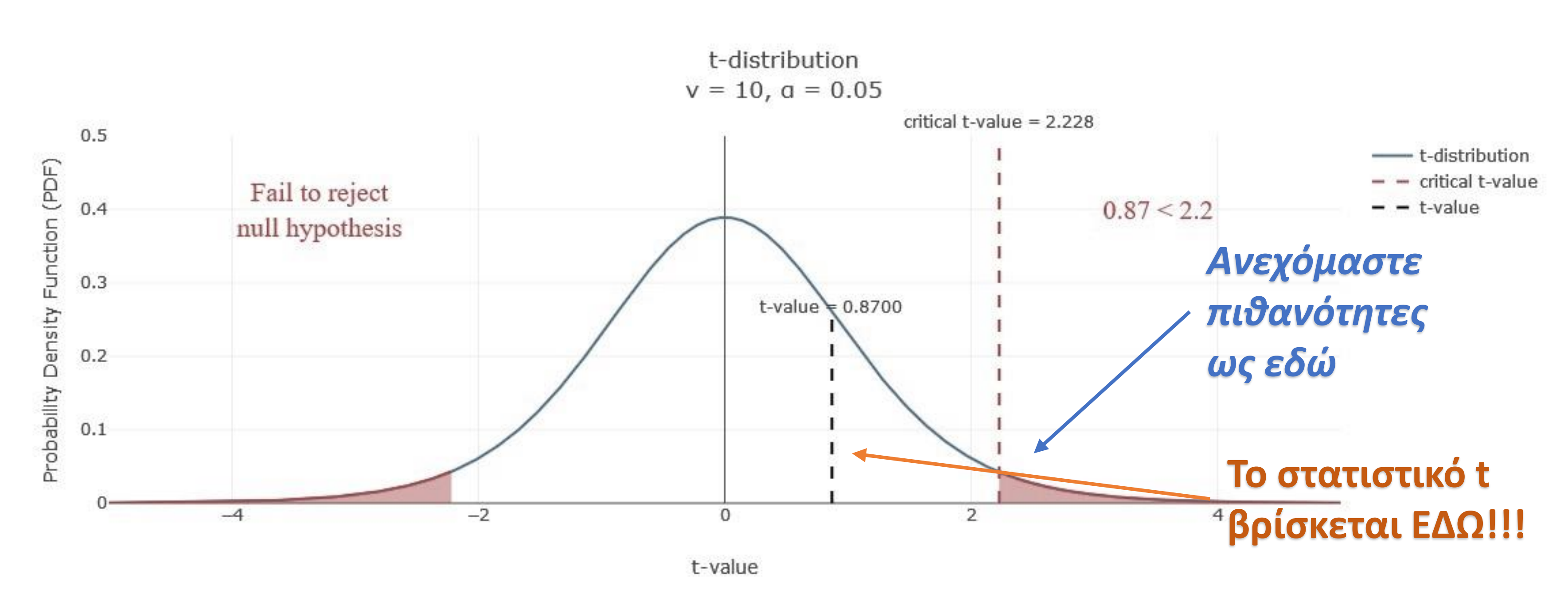
$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \Rightarrow t = \frac{57.00 - 57.83}{1.64\sqrt{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)}} = -0.88$$

Στατιστικό t (t-test)

- Για 10 βαθμούς ελευθερίας t_{10} = 2.23 (P = 0.05)
- Το στατιστικό t έχει τιμή $|t| = 0.88$
- Η πιθανότητα (μας το δείχνει η τιμή του στατιστικού t) η διαφορά των μέσων όρων να μην είναι μηδέν είναι πολύ μικρή
- ΔΕΝ Απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

Στατιστικό t (t-test)

- Για 10 βαθμούς ελευθερίας $t_{10} = 2.23$ (P = 0.05)
- Το στατιστικό t έχει τιμή $|t| = 0.88$
- Για να το δούμε



Στατιστικό t (t-test)

- Συζευγμένο (paired) στατιστικό t
- Σε αρκετές περιπτώσεις η στατιστική ανάλυση δειγμάτων είναι μια δύσκολη υπόθεση
- Ένα σημαντικότατο κομμάτι είναι ο σχεδιασμός του πειράματος
- Αν έχουμε μια ομάδα δισκίων που θέλουμε να τα αναλύσουμε με δύο μεθόδους
- Θα αναλύσουμε τα ίδια δισκία με τις δύο μεθόδους ή άλλα δισκία με τη μία και άλλα με την άλλη?
- Στη δεύτερη περίπτωση θα έχουμε διαφορετικό δείγμα (και συνεπώς θα αθροιστεί και η διασπορά μεταξύ διαφορετικών δισκίων). Αν αναλύσουμε τα ίδια γλυτώνουμε από αυτό το πρόβλημα.

Στατιστικό t (t-test)

- Αυτό ονομάζεται συζευγμένο στατιστικό t όπου κάθε δείγμα συγκρίνεται με τον εαυτό του – δηλαδή συγκρίνονται με τη μια και την άλλη μέθοδο.
- Συγκρίνουμε δηλαδή στη μηδενική υπόθεση αν η διαφορά στα αποτελέσματα είναι 0 ή είναι στατιστικά σημαντική
- Ποιο είναι η στατιστική δοκιμασία για τις διαφορές?

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s} = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{s}$$

- Στους αντίστοιχους πίνακες θα ψάξουμε για $n - 1$ βαθμούς ελευθερίας

Στατιστικό t (t-test)

- Παράδειγμα paired t-test. Δισκία παρακεταμόλης αναλύονται με δύο μεθοδολογίες UV και NIR

Batch	UV	NIR
1	84.63	83.15
2	84.38	83.72
3	84.08	83.84
4	84.41	84.2
5	83.82	83.92
6	83.55	84.16
7	83.92	84.02
8	83.69	83.6
9	84.06	84.13
10	84.03	84.24

Στατιστικό t (t-test)

- Υπολογίζουμε τις διαφορές μεταξύ των δύο μεθόδων

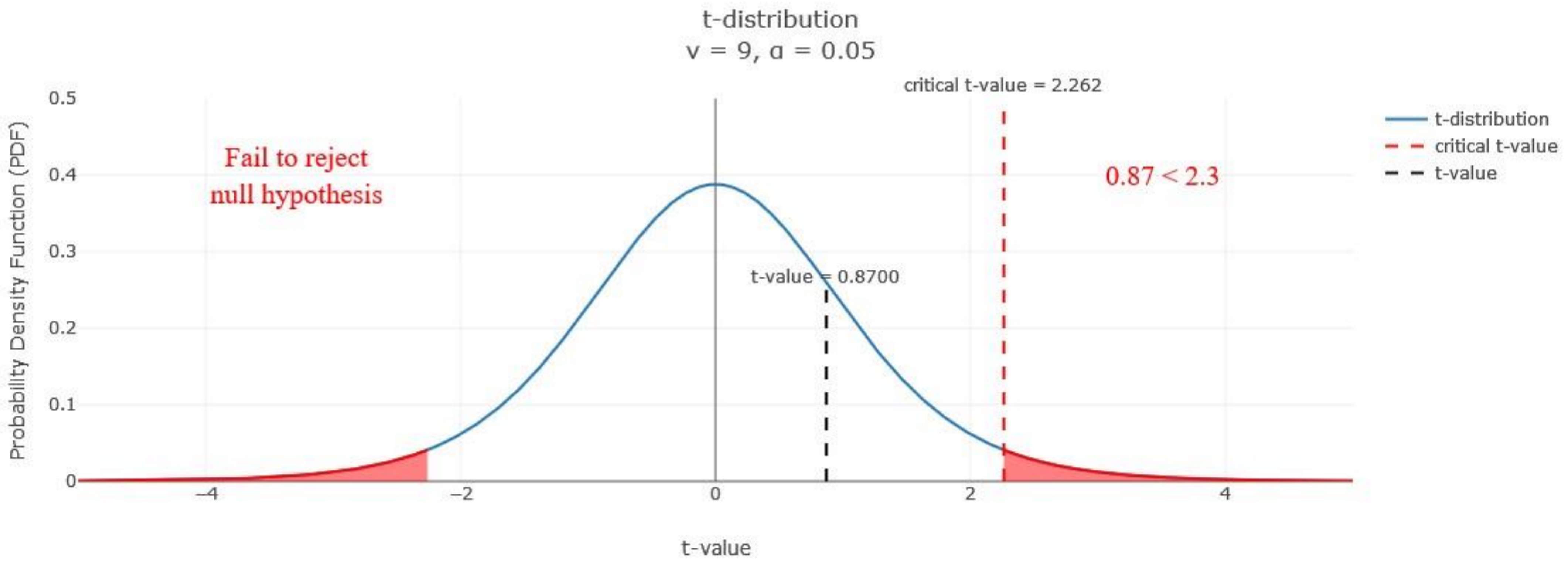
Batch	UV	NIR	Difference
1	84.63	83.15	1.48
2	84.38	83.72	0.66
3	84.08	83.84	0.24
4	84.41	84.2	0.21
5	83.82	83.92	-0.1
6	83.55	84.16	-0.61
7	83.92	84.02	-0.1
8	83.69	83.6	0.09
9	84.06	84.13	-0.07
10	84.03	84.24	-0.21

Υπολογίζουμε επίσης τον μέσο όρο των διαφορών $\bar{d}$ και την τυπική απόκλιση s_d

Το αποτέλεσμα είναι $|t| = 0.88$ ενώ η κρίσιμη τιμή είναι 2.26

Η τιμή του στατιστικού t είναι πολύ μικρότερη από την κρίσιμη – η μηδενική υπόθεση διατηρείται

Στατιστικό t (t-test)

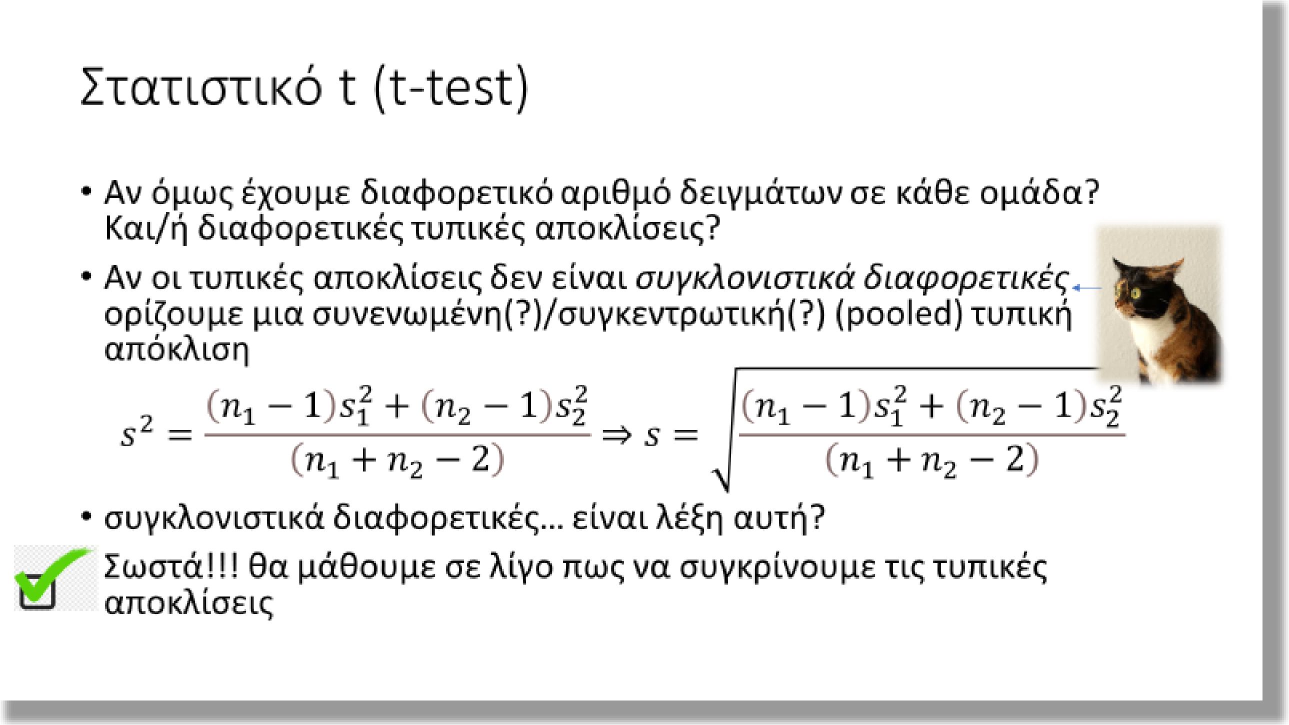


Στατιστικό f (f-test)

- Χρησιμοποιείται για να συγκριθούν οι τυπικές αποκλίσεις δύο ομάδων
- Που το είδαμε?

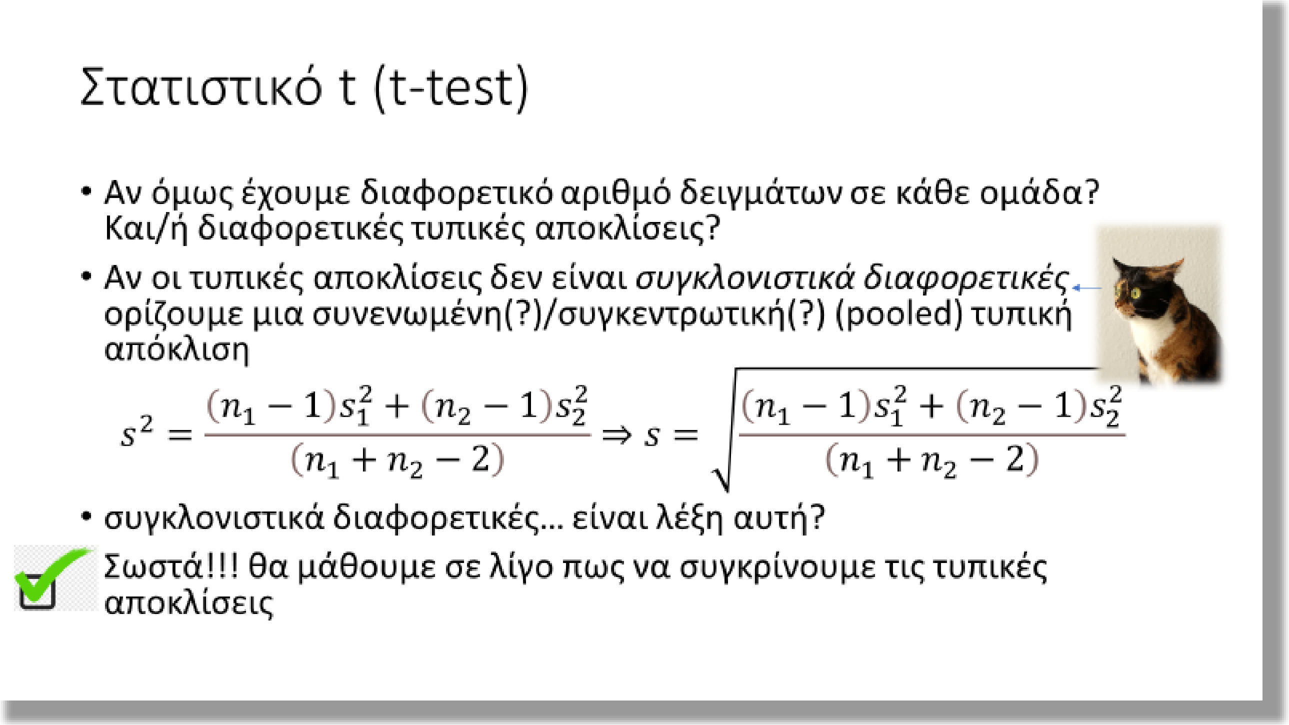
Στατιστικό f (f-test)

- Στο στατιστικό t…
- Εκεί πρέπει να συγκρίνουμε δύο ομάδες και να αποφασίσουμε αν έχουν ίση τυπική απόκλιση. Αν όχι έχουμε διαφορετικό στατιστικό – t για την περίπτωση.



Στατιστικό f (f-test)

- Το στατιστικό f…
- Εκεί πρέπει να συγκρίνουμε δύο ομάδες και να αποφασίσουμε αν έχουν ίση τυπική απόκλιση. Αν όχι έχουμε διαφορετικό στατιστικό – t για την περίπτωση.



Στατιστικό f (f-test)

- Τι είναι το στατιστικό f?
- Ο λόγος από τις διασπορές των δύο ομάδων

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- Ο λόγος πρέπει να είναι πάντα μεγαλύτερος από τη μονάδα
- Αν όχι τα αναστρέφουμε (τα τουμπάρουμε κατά το κοινώς λεγόμενον)
- Οι βαθμοί ελευθερίας είναι $n_1 - 1$ και $n_2 - 1$
- Πάντα υποθέτουμε ότι ισχύει η κανονική κατανομή

Στατιστικό f (f-test)

- Ποια είναι η μηδενική υπόθεση?
- Ο λόγος πρέπει να είναι πλησίον της μονάδος 

- Κοντά στη μονάδα(…)

F-table of Critical Values of α = 0.10 for F(df1, df2)

	DF1=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
DF2=1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06

Βλέπουμε ότι οι λόγοι είναι μεγαλύτεροι της μονάδας

Στατιστικό f (f-test)

- Παράδειγμα
- Συγκρίνουμε δύο μεθοδολογίες. Έχουμε πάρει 8 δείγματα. Ίδιος μέσος όρος αλλά διαφορετική τυπική απόκλιση… Είναι ίδια η επαναληψιμότητα της μεθόδου άραγε?

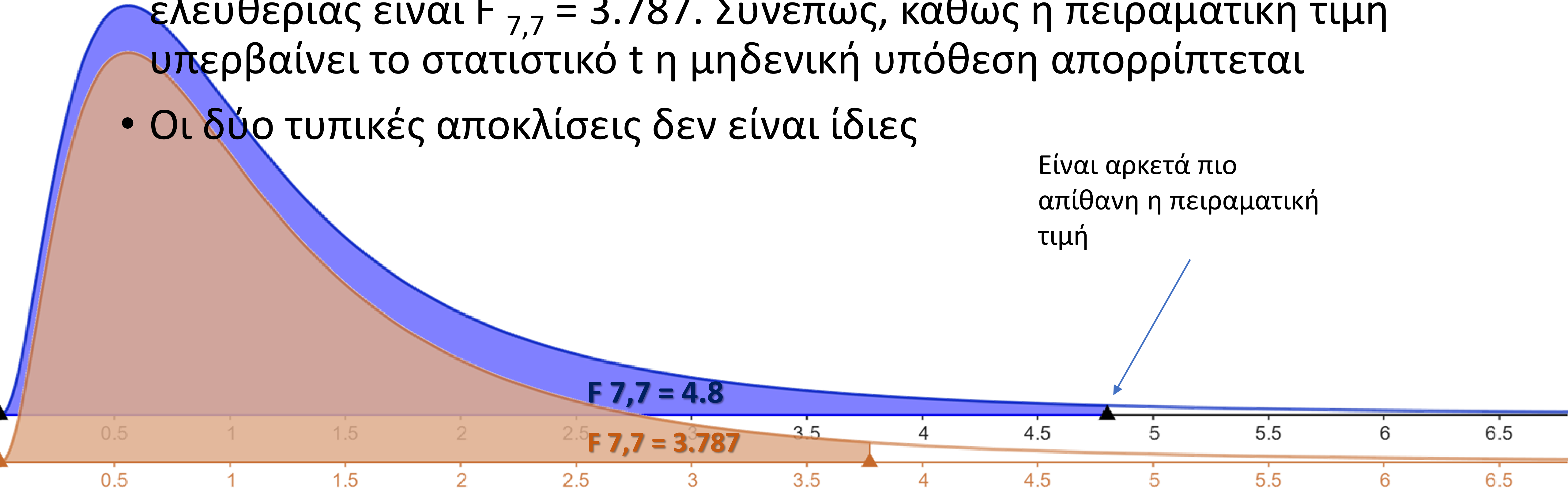
	Mean (mg/L)	Standard deviation (mg/L)
Μέθοδος 1	72	3.31
Μέθοδος 2	72	1.51

- Εφαρμόζουμε τον τύπο του στατιστικού f

$$f = \frac{3.31^2}{1.51^2} = 4.8$$

Στατιστικό f (f-test)

- Παράδειγμα
- Από τους πίνακες η τιμή του στατιστικού f για 7 και 7 βαθμούς ελευθερίας είναι $F_{7,7}$ = 3.787. Συνεπώς, καθώς η πειραματική τιμή υπερβαίνει το στατιστικό t η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται
- Οι δύο τυπικές αποκλίσεις δεν είναι ίδιες



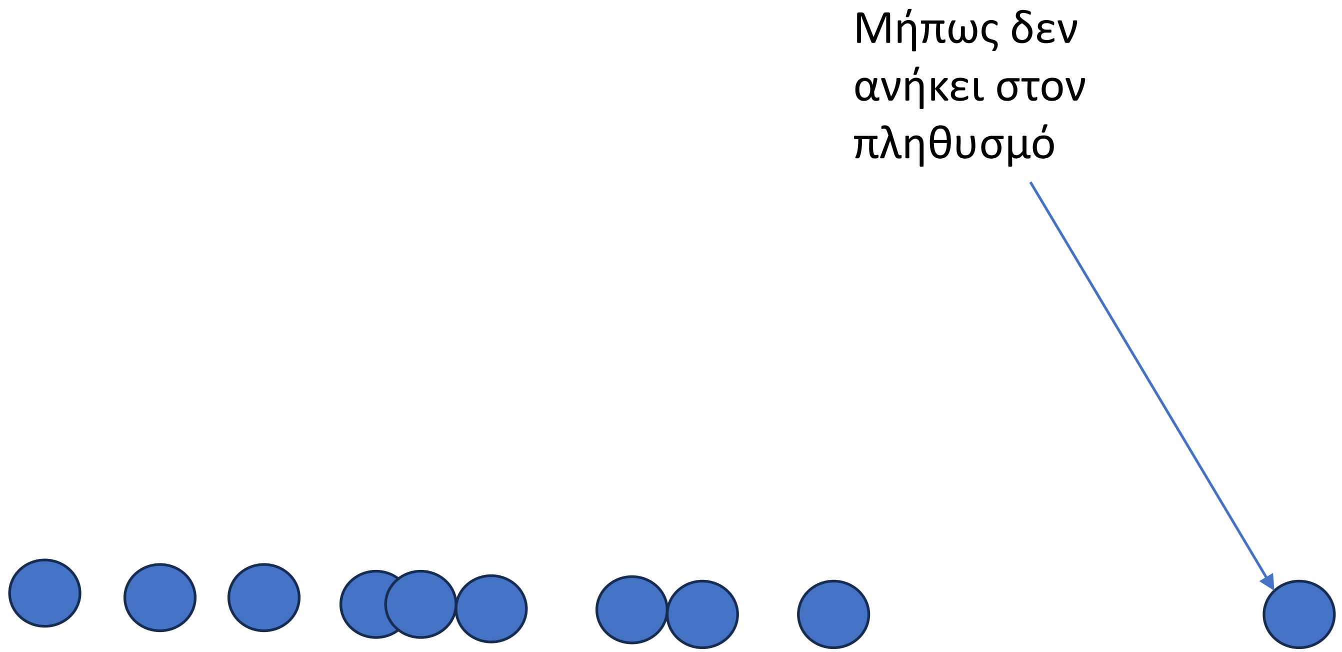
F-table of Critical Values of α = 0.05 for F(df1, df2)

	DF1=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
DF2=1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Έκτροπες τιμές (outliers)

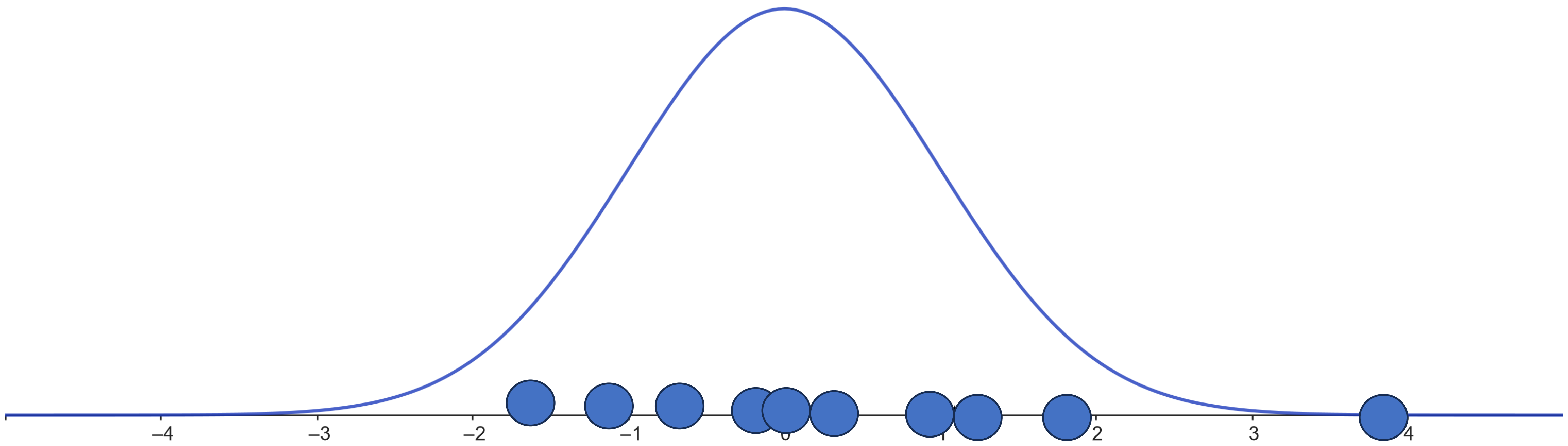
Έκτροπες τιμές (outliers)

- Σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζεται κάποια πειραματική τιμή που μας δείχνει ότι είναι μακριά από τον πληθυσμό
- Μια τέτοια τιμή ονομάζεται έκτροπη και αναρωτιόμαστε αν ανήκει στον πληθυσμό



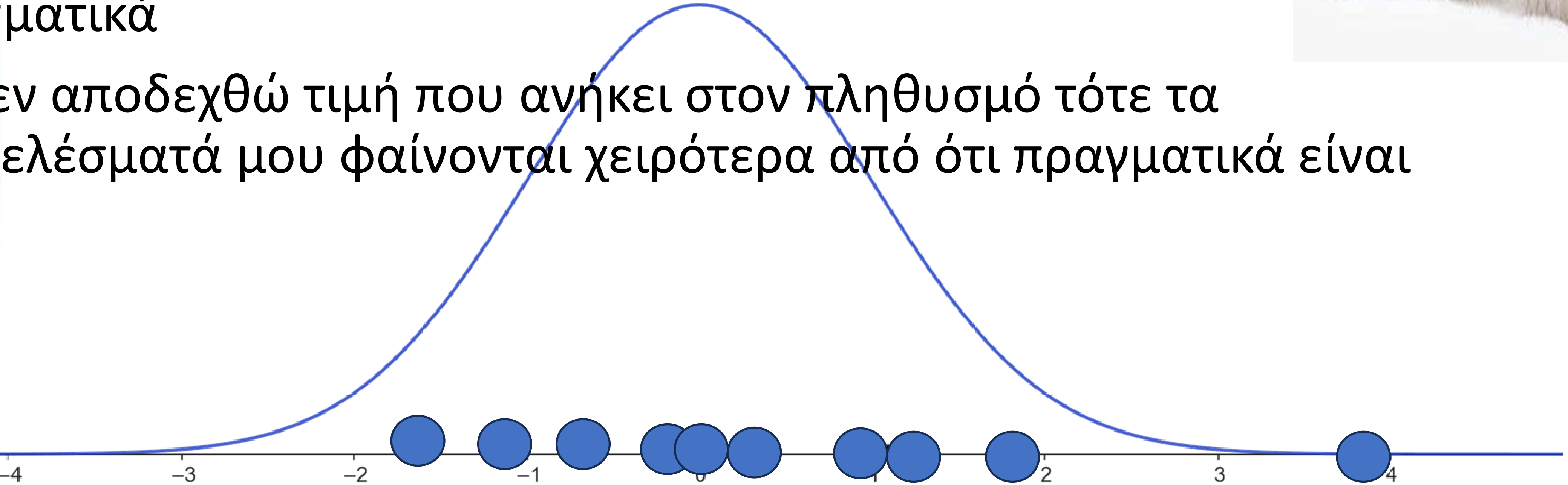
Έκτροπες τιμές (outliers)

- Απάντηση
- Τώρα? Τώρα φαίνεται πως είναι σχεδόν 4 SD μακριά



Έκτροπες τιμές (outliers)

- Ποιους κινδύνους παρουσιάζει το φαινόμενο?
- Αν αποδεχτώ μια τιμή που δεν ανήκει στην κατανομή τιμών της μεταβλητής μου (την αποδέχομαι αλλά δεν θα έπρεπε) τότε ο αριθμητικός μέσος όρος και η % τυπικής απόκλισης δεν είναι πραγματικά
- Αν δεν αποδεχθώ τιμή που ανήκει στον πληθυσμό τότε τα αποτελέσματά μου φαίνονται χειρότερα από ότι πραγματικά είναι



Έκτροπες τιμές (outliers)

- Ποια είναι η λύση?
- Το στατιστικό για έκτροπες τιμές φυσικά
- … (υπάρχουν πολλά…), Dean-Dixon’s, Walsh, Grubb’s
- Θα δούμε το τελευταίο
- Θεωρεί ότι όλα τα δείγματα υπάρχουν μέσα στον πληθυσμό συμπεριλαμβανομένης της έκτροπης τιμής
- Συγκρίνει πόσες τυπικές αποκλίσεις μακριά είναι η έκτροπη τιμή
- Πχ αν είναι πέρα από 1.96 τυπικές αποκλίσεις μακριά τοτε απορρίπτεται σε επίπεδο εμπιστοσύνης 96%

Έκτροπες τιμές (outliers)

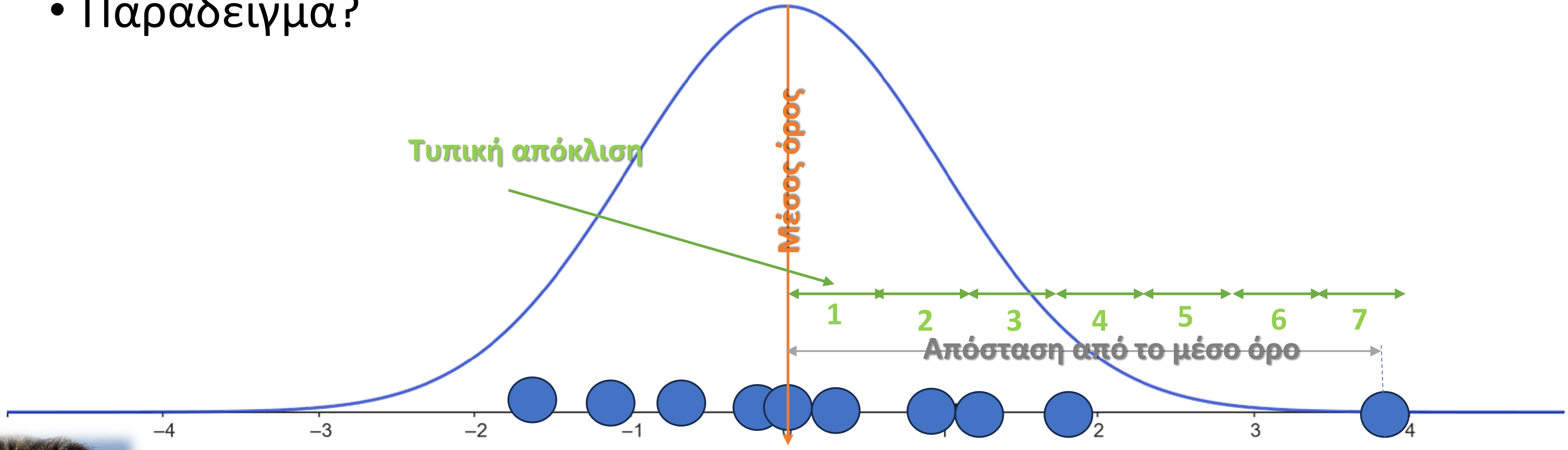
- Στατιστικό Grubbs (ασχολούμαστε γιατί προτείνεται από το σύστημα διασφάλισης ποιότητας ISO)

$$G = \frac{|\upsilon\pi o\pi\tau\eta\ \tau\iota\mu\eta - \bar{x}|}{s}$$

- Ο πλήθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή
- Μηδενική υπόθεση H_0 η διαφορά είναι (στατιστικά) 0
- Η ύποπτη τιμή περιλαμβάνεται στην ανάλυση

Έκτροπες τιμές (outliers)

- Παράδειγμα?



Έκτροπες τιμές (outliers)

- Παράδειγμα

Από ανάλυση 4 συγκεντρώσεων νιτρικών παίρνουμε τις ακόλουθες τιμές σε mg L^{-1}

0.403, 0.410, 0.401, 0.380

$$G = \frac{|υποπτη\ τιμη - \bar{x}|}{s} == \frac{|0.380 - 0.3985|}{0.01292} = 1.432$$

Sample size	Critical value
3	1.155
4	1.481
5	1.715
6	1.887
7	2.020
8	2.126
9	2.215
10	2.290

Η θεωρητική τιμή 1.481 είναι μεγαλύτερη από την πειραματική οπότε και η μηδενική υπόθεση διατηρείται – η έκτροπη τιμή είναι «φυσιολογική»

Ανάλυση διασποράς ANOVA (Analysis Of Variance)

Ανάλυση Διασποράς ANOVA

- Ως τώρα είδαμε σύγκριση δύο ομάδων
- Αν έχουμε τρεις ομάδες? Ή παραπάνω?
- Απάντηση. Με την διαδικασία ανάλυσης διασποράς μπορούμε να ανακαλύψουμε αν τρεις μέσοι όροι είναι ίδιοι στατιστικά
- Ας δούμε πολύ περιληπτικά πως γίνεται

Ανάλυση Διασποράς ANOVA