

Εισαγωγή στον Γραμμικό Προγραμματισμό (ΓΠ)

- Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων
- Παραδείγματα
- Διατύπωση ενός τυπικού προβλήματος

Τι είναι ο ΓΠ

- Ο ΓΠ είναι τεχνική που ασχολείται με το πρόβλημα της άριστης κατανομής των περιορισμένων πόρων μεταξύ ανταγωνιστικών δραστηριοτήτων.
 - Ως ανταγωνιστικές δραστηριότητες νοούνται εκείνες που ανταγωνίζονται μεταξύ τους στη κατανάλωση των διαθέσιμων πόρων. Μπορεί να είναι διαφορετικά επενδυτικά σχέδια που επιζητούν χρηματοδότηση, διαφορετικά προϊόντα που παράγονται από διαθέσιμες πρώτες ύλες, διαφορετικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσουν προϊόντα που διακινούνται σε προορισμούς κλπ
-

Τι είναι ο ΓΠ

- Η λύση ενός προβλήματος επιτυγχάνει τη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση, ελαχιστοποίηση) μιας συνάρτησης που δηλώνει κέρδος, κόστος παραγωγής, μερίδια αγοράς, πωλήσεις προϊόντων κλπ
 - Η βελτιστοποίηση επιτυγχάνεται κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες και περιορισμούς για κάθε πρόβλημα
π.χ. διαθέσιμοι πόροι μιας επιχείρησης (εργασία, κόστος πρώτες ύλες, δυναμικότητα του εξοπλισμού, διαθέσιμα κεφάλαια, κανόνες ζήτησης προϊόντων, κανονισμοί χρηματοδότησης κλπ)
 - Η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση καθώς και οι συνθήκες και οι περιορισμοί εκφράζονται με γραμμικές σχέσεις (δεν υπάρχουν γινόμενα και δυνάμεις μεταβλητών)
-

Τυπικά προβλήματα που επιλύονται με τον ΓΠ

- Το πρόβλημα μεταφοράς
 - εύρεση του συντομότερου / οικονομικότερου τρόπου για τη μεταφορά αγαθών μεταξύ δικτύου παραγωγικών μονάδων, αποθηκών, σημείων πώλησης κλπ
 - Το πρόβλημα παραγωγής προϊόντων
 - προσδιορίζει τις ποσότητες που πρέπει να παραχθούν από κάθε προϊόν ώστε να επιτευχθεί στόχος μεγιστοποίησης κέρδους ή ελαχιστοποίησης χρόνου παραγωγής υπο συγκεκριμένες προϋποθέσεις
 - Το πρόβλημα μείξης πρώτων υλών
 - Αναζητούνται οι ποσότητες πρώτων υλών για τη παραγωγή προϊόντων ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος, ο αριθμός των παραγομένων προϊόντων κλπ όταν υπάρχουν περιορισμένες ποσότητες πρώτων υλών και συγκεκριμένη αναλογία μείξης
-

Τυπικά προβλήματα που επιλύονται με τον ΓΠ

- Επιλογή χαρτοφυλακίου, επενδυτικών σχεδίων
 - Με δεδομένο το κεφάλαιο, ζητείται η βέλτιστη κατανομή χρημάτων σε επενδυτικά σχέδια για τη μεγιστοποίηση της απόδοσης του κεφαλαίου
 - Προγραμματισμός ανθρώπινου δυναμικού
 - Ζητείται να βρεθεί η άριστη κατανομή προσωπικού (βάρδιες, θέσεις εργασίας) κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς και συνθήκες πχ. κατανομή φόρτου εργασίας, απαιτούμενες δεξιότητες ανα θέση κλπ
 - Άλλες παρόμοιες εφαρμογές
 - Κατάρτιση διαφημιστικών σχεδίων, επιλογή τόπου εγκατάστασης νέων καταστημάτων, αξιολόγηση παραγωγικών μονάδων
-

Ο τρόπος ανάπτυξης ενός μοντέλου

Βήμα 1. Καθορίζουμε τις μεταβλητές, (ελεγχόμενες, μη ελεγχόμενες) που εκφράζουν τις άγνωστες, προς εκτίμηση, ποσότητες, αξίες κλπ του προβλήματος

→ **Μεταβλητές απόφασης** (decision variables)

Βήμα 2. Περιγράφουμε το στόχο και τα κριτήρια επιλογής της βέλτιστης λύσης

→ **Αντικειμενική Συνάρτηση** (objective function)

Βήμα 3. Περιγράφουμε τους περιορισμούς και τις υποθέσεις του προβλήματος με μαθηματικές εκφράσεις

→ **Περιορισμοί** (constraints)

Παράδειγμα. Το πρόβλημα

- Η βιομηχανία γάλακτος ΑΛΦΑ επιθυμεί να εισάγει στην αγορά δύο νέα προϊόντα, (Α) ένα παγωτό κρέμας και (Β) ένα παγωτό σοκολάτας.
 - Για τη παραγωγή τους η βιομηχανία δεσμεύει πόρους (πρώτες ύλες, εργατικό δυναμικό, εξοπλισμό παστερίωσης και ψύξης).
 - Το τμήμα Marketing προβλέπει τη ζήτηση για τα προϊόντα Α και Β και προσδιορίζει το αναμενόμενο κέρδος ανα μονάδα προϊόντος
 - Ζητείται να προσδιοριστεί το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής (συνδυασμός μονάδων από τα προϊόντα Α και Β που θα παραχθούν) ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος
-

Παράδειγμα. Τα δεδομένα*

Πόροι προς χρήση	Προϊόν Α	Προϊόν Β	Διαθέσιμη Ποσότητα
Γάλα (σε λίτρα)	1	1	550
Εργασία (σε ώρες)	1	3	1000
Εξοπλισμός (σε λεπτά)	2	5	2000
Μέγιστη Ζήτηση (σε μονάδες)	400	απεριόριστη	
Κέρδος ανα μονάδα	1,5€	2€	

* Οι ποσότητες και η ζήτηση αναφέρονται σε μια εβδομάδα

Παράδειγμα. Μοντελοποίηση

Βήμα 1. Ποιες είναι οι μεταβλητές απόφασης ;

- ποια στοιχεία καθορίζουν το κριτήριο βελτιστοποίησης (αναμενόμενο κέρδος από τη πώληση των προϊόντων)

x_1 = αριθμός μονάδων από το προϊόν A που πρέπει να παραχθούν σε μία εβδομάδα

x_2 = αριθμός μονάδων από το προϊόν B που πρέπει να παραχθούν σε μία εβδομάδα

Παράδειγμα. Μοντελοποίηση

Βήμα 2. Ποια είναι η αντικειμενική συνάρτηση;

Συνολικό κέρδος ανα εβδομάδα

= Κέρδος από το προϊόν A + Κέρδος από το προϊόν B

= (αναμενόμενο κέρδος ανα μονάδα του A) *
παραγόμενη ποσότητα του A + (αναμενόμενο
κέρδος ανα μονάδα του B) * παραγόμενη ποσότητα
του B

= 1,5 x1 + 2 x2

Είδος βελτιστοποίηση → μεγιστοποίηση

Αντικειμενική συνάρτηση : $\max z = 1,5x_1 + 2x_2$

Παράδειγμα. Μοντελοποίηση

Βήμα 3. Ποιοί είναι οι περιορισμοί;

1. Η συνολική παραγωγή του γάλακτος δεν μπορεί να ξεπεράσει τα 550 λίτρα (διαθέσιμη ποσότητα)
 - εβδομαδιαία κατανάλωση γάλακτος για το A + εβδομαδιαία κατανάλωση γάλακτος για το B \leq διαθέσιμη ποσότητα
 - Απαιτούμενο γάλα ανα μονάδα * παραγόμενες μονάδες του A + Απαιτούμενο γάλα ανα μονάδα * παραγόμενες μονάδες του B \leq διαθέσιμη ποσότητα
 - $1 x_1 + 1 x_2 \leq 550 \rightarrow x_1 + x_2 \leq 550$
-

Παράδειγμα. Μοντελοποίηση

Βήμα 3. Ποιοί είναι οι περιορισμοί;

2. Η συνολική απαιτούμενη εργασία \leq διαθέσιμη εργασία (1000 ώρες)
- Απαιτούμενη εργασία για το A + Απαιτούμενη εργασία για το B \leq 1000 ώρες
 - (Εργασία ανα μονάδα A * παραγόμενες μονάδες A) + (Εργασία ανα μονάδα B * παραγόμενες μονάδες B) \leq 1000 ώρες
 - $1x_1 + 3x_2 \leq 1000 \rightarrow x_1 + 3x_2 \leq 1000$
3. Η συνολική επεξεργασία \leq διαθεσιμότητα εξοπλισμού (2000 λεπτά)
- συνολική επεξεργασία για το A + συνολική επεξεργασία για το B \leq 2000 λεπτά
 - (επεξεργασία ανα μονάδα A * παραγόμενες μονάδες A) + (επεξεργασία ανα μονάδα B * παραγόμενες μονάδες B) \leq 2000 λεπτά
 - $2x_1 + 5x_2 \leq 2000 \rightarrow 2x_1 + 5x_2 \leq 2000$
-

Παράδειγμα. Μοντελοποίηση

Βήμα 3. Ποιοί είναι οι περιορισμοί;

4. Η συνολική ζήτηση για το προϊόν A ≤ 400 μονάδες
→ παραγόμενες μονάδες προϊόντος ≤ 400 μονάδες 1
→ $x_1 \leq 400$
 5. Οι τιμές των x_1, x_2 επειδή εκφράζουν συνολική παραγόμενη ποσότητα θα πρέπει να είναι θετικές
→ $x_1 \geq 0$
 $x_2 \geq 0$ (περιορισμοί μη αρνητικότητας)
-

Παράδειγμα. Η τελική μορφή του μοντέλου

$$\max \quad z = 1,5x_1 + 2x_2$$

Αντικειμενική συνάρτηση

$$x_1 + x_2 \leq 550$$

Γάλα

$$x_1 + 3x_2 \leq 1000$$

Εργασία

$$2x_1 + 5x_2 \leq 2000$$

Επεξεργασία

$$x_1 \leq 400$$

Ζήτηση

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Μη αρνητικότητα

Παράδειγμα. Η λύση του μοντέλου

$$\max \quad z = 1,5x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 550$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 1000$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 2000$$

$$x_1 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Διάφοροι συνδυασμοί τιμών των x_1, x_2 που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς ονομάζονται **εφικτές λύσεις (feasible solutions)**

Πχ. $x_1=300, x_2=200$

- Το ζεύγος $(x_1, x_2)=(300, 200)$ αποτελεί **σημείο** της εφικτής περιοχής (δισδιάστατου χώρου).

-Η λύση $(x_1, x_2)=(300, 200)$ δίνει τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
 $z=1,5*300+2*200=850\text{€}$

Είναι όμως η μεγαλύτερη δυνατή ;

Η λύση $(x_1, x_2)=(200, 300)$ δίνει τιμή $z=900\text{€}$ αλλά παραβιάζει τον δεύτερο

περιορισμό. Η λύση αυτή δεν είναι εφικτή.

Η βέλτιστη λύση (optimal value) είναι $(x_1, x_2)=(325, 225)$

Παράδειγμα

- *Η εταιρεία δημοσκοπήσεων Gallor-Hellas επιθυμεί να διεξαγάγει μια τηλεφωνική έρευνα σε νοικοκυριά της Αθήνας και της Επαρχίας. Σύμφωνα με τα στοιχεία κατανομής του πληθυσμού, το δείγμα πρέπει να περιλαμβάνει το λιγότερο 600 νοικοκυριά στην Αθήνα και τα 400 στην επαρχία. Ο συνολικός αριθμός ερωτηματολογίων δεν θα πρέπει να είναι μικρότερος από 1200. Το κόστος ανά ερωτηματολόγιο (χρόνος απασχόλησης του στοιχειολήπτη, τηλεφωνικές κλήσεις κλπ) είναι για μεν την Αθήνα 1,5€ και για την επαρχία 2€. Ζητείται να βρεθεί ο αριθμός των ερωτηματολογίων που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος της τηλεφωνικής έρευνας.*
-

Παράδειγμα 1

- Μια επιχείρηση φασόν δερμάτινων ενδυμάτων απασχολεί το προσωπικό της για 960 ώρες συνολικά το μήνα. Για τον επόμενο μήνα έχει αναλάβει δύο προϊόντων (γυναικείο δερμάτινο παλτό, ανδρικό σακάκι). Για την παραγωγή τους χρησιμοποιούνται φόδρες και κατεργασμένα δέρματα. Τα συμπληρωματικά υλικά (κλωστές, κουμπιά κλπ) θεωρούνται αμελητέα. Κάθε γυναικείο παλτό χρειάζεται 3μ φόδρας, 5μ δέρματος και 6 ώρες εργασίας ενώ για το ανδρικό σακάκι απαιτούνται 1 μέτρο φόδρας, 4 μέτρα δέρματος και 8 ώρες εργασίας. Το καθαρό κέρδος της επιχείρησης είναι 75€ και 60€ για το παλτό και το σακάκι αντιστοίχως. Η επιχείρηση έχει αγοράσει 297 μ φόδρα και 600μ δέρμα. Ποιο είναι το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής (παραγόμενες ποσότητες ανα είδος) που μεγιστοποιεί το κέρδος της ;
-

Παράδειγμα 1. Λύση

x_1 = μονάδες γυναικείου παλτού

x_2 = μονάδες ανδρικού σακακιού

Κέρδος : $\max z = 75x_1 + 60x_2$

Περιορισμοί

Φόδρα : $3x_1 + x_2 \leq 297$

Δέρμα : $5x_1 + 4x_2 \leq 600$

Εργασία : $6x_1 + 8x_2 \leq 960$

Μη αρνητικότητα $x_1, x_2 \geq 0$

Παράδειγμα: Το πρόβλημα μείγματος α' υλών (product mixing problem)

Μία επιχείρηση παράγει 4 προϊόντα P_1, P_2, P_3, P_4 χρησιμοποιώντας πρώτες ύλες Y_1, Y_2, Y_3 . Για κάθε προϊόν γνωρίζουμε την αναλογία των πρώτων υλών για την παραγωγή του. Επίσης γνωρίζουμε τη συνολική διαθέσιμη ποσότητα των πρώτων υλών και τη τιμή πώλησης των προϊόντων. Δεδομένων των συνολικών ποσοτήτων πρώτων υλών, ζητείται να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή τους ώστε να επιτευχθεί το μέγιστο κέρδος

Παράδειγμα 1 : Ανάπτυξη του μοντέλου

- Στόχος = μεγιστοποίηση του κέρδους
 - Διατύπωση της συνάρτησης του κέρδους
 - Μεταβλητές = ποσότητες πρώτων υλών ανα προϊόν
 - Παράμετροι = τιμή πώλησης των προϊόντων, συνολική διαθέσιμη ποσότητα
 - Περιορισμοί = αναλογία πρώτων υλών ανά προϊόν
-

Παράδειγμα 2 : κατανομή πόρων

- Μία επιχείρηση επιθυμεί να διανείμει συγκεκριμένο προϋπολογισμό σε διάφορα διαφημιστικά μέσα (τηλεόραση, εφημερίδες, περιοδικά κλπ). Για κάθε μέσο έχει ορισθεί ένας δείκτης απόδοσης αλλά και ένας μέγιστος αριθμός διαφημιστικών καταχωρήσεων. Να βρεθεί η άριστη κατανομή του προϋπολογισμού που να επιτυγχάνει τη μέγιστη απόδοση
-

Παράδειγμα 3: Επιλογή προϊόντων

- Μια επιχείρηση προκειμένου να εγκαταστήσει φωτοτυπικά μηχανήματα επιθυμεί να επιλέξει το καλύτερο ανάμεσα σε μερικά ανταγωνιστικά μοντέλα. Για τη αξιολόγηση χρησιμοποιεί κριτήρια όπως η τιμή αγοράς, το κόστος των αναλωσίμων, η παρεχόμενη εγγύηση σε έτη, ο βαθμός υποστήριξης κλπ. Συγκρίνοντας τις τιμές των κριτηρίων ορίζει τις ανα δύο ορίζει το βαθμό προτίμησης. Να βρεθεί η άριστη κατανομή του προϋπολογισμού που να επιτυγχάνει τη μέγιστη απόδοση
-

Προϋποθέσεις εφαρμογής του ΓΠ

- Γραμμικότητα της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών
 - Διαιρετότητα των τιμών των μεταβλητών απόφασης
 - Βεβαιότητα ως προς τις τιμές των παραμέτρων.
-

Ερωτήσεις

Είναι δυνατόν σε ένα πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού να έχουμε δύο αντικειμενικές συναρτήσεις;

- ΝΑΙ ΟΧΙ

Ποιες από τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις αντιστοιχούν σε αντικειμενικές συναρτήσεις ενός γραμμικού προγράμματος;

- $F(x_1, x_2) = 3x_1x_2$ $F(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$
- $F(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$
- $F(x_1, x_2) = 8x_1 + 0,005x_2$ $F(x_1, x_2) = \log(x_1) + x_2$

Ποιες από τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις αντιστοιχούν σε περιορισμούς ενός γραμμικού προγράμματος;

- $\frac{x_1}{2} = 3x_1x_2$ $3x_1 \leq -8x_2$
- $\frac{x_1}{x_2} \leq -10$ $x_1^2 + x_2^2 \geq 25$
- $\frac{1}{x_1x_2} \geq 2$ $x_1 \neq 3x_2$

Ερωτήσεις

Ποιες από τις κατωτέρω εκφράσεις αποτελούν συνθήκες που εκφράζονται ως περιορισμοί σε ένα γραμμικό πρόγραμμα

- Η τιμή πώλησης της κάθε μονάδας προϊόντος A είναι περίπου ίση με το διπλάσια τιμή πώλησης της κάθε μονάδας προϊόντος B
- Ο χρόνος απασχόλησης του συνεργείου A είναι τουλάχιστον υπερδιπλάσιος του χρόνου απασχόλησης του συνεργείου B
- Ο αριθμός των υπαλλήλων που απασχολούνται θα πρέπει να είναι κατ' ελάχιστο 35
- Το μέρος των χρημάτων που θα επενδυθεί σε μετοχές θα πρέπει να είναι επαρκές ώστε να εξασφαλίζει κέρδος

Οι περιορισμοί μη αρνητικότητας $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ σε ένα γραμμικό πρόγραμμα δεν είναι υποχρεωτικό να υπάρχουν.

- Σωστό
 - Λάθος
-

Ερωτήσεις

$$\text{Max } F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Στο γραμμικό πρόγραμμα

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

το $(x_1, x_2) = (3, 1)$ είναι δεκτή λύση

Σωστό

Λάθος

Στο ανωτέρω γραμμικό πρόγραμμα το $(x_1, x_2) = (8, -1)$ είναι δεκτή λύση.

Σωστό

Λάθος

Στο ανωτέρω γραμμικό πρόγραμμα το $(x_1, x_2) = (5, 0)$ είναι δεκτή λύση.

Σωστό

Λάθος

Η λύση ενός γραμμικού προγράμματος μεγιστοποίησης που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση λέγεται :

δεκτή λύση

εφικτή λύση

βέλτιστη λύση

Η λύση ενός γραμμικού προγράμματος μεγιστοποίησης που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση λέγεται :

δεκτή λύση

εφικτή λύση

βέλτιστη λύση

Σε ένα γραμμικό πρόγραμμα έχουν οριστεί, εκτός των άλλων και οι περιορισμοί $x_1 \geq 3$, $3x_1 \geq 9$. Τι αποτέλεσμα θα υπάρξει ;

Ο δεύτερος είναι πλεονάζων περιορισμός και δεν θα επηρεάσει το αποτέλεσμα

Το γραμμικό πρόγραμμα είναι λανθασμένο και δεν μπορεί να επιλυθεί

Το γραμμικό πρόγραμμα δεν έχει εφικτές λύσεις

Άσκηση

- *Μια τεχνική εταιρεία διαθέτει δύο συνεργεία χωματουργικών εργασιών A και ασφαλτόστρωσης B. Κάθε ένα από τα οποία διαθέτει κατάλληλο εξοπλισμό (εκσκαφείς, μπουλτόζες, φορτηγά κλπ) και στα οποία εργάζονται συγκεκριμένοι εργάτες και τεχνικοί. Η εταιρεία έχει αναλάβει δύο έργα X, Y διάνοιξης δρόμων τα οποία απαιτούν την απασχόληση και των δύο συνεργείων. Το κάθε έργο έχει συγκεκριμένη προθεσμία ολοκλήρωσης : το έργο X θα πρέπει να έχει ολοκληρωθεί το πολύ σε 90 ημέρες ενώ το Y το πολύ σε 60 ημέρες. Η συνολική εκσκαφή και για τα δύο έργα είναι κατ' ελάχιστο 45 ημέρες ενώ οι απαιτούμενες εργασίες ασφαλτόστρωσης δεν υπερβαίνουν τις 90 ημέρες. Ιδιαίτέρως για το έργο Y, υπολογίζεται ότι η ασφαλτόστρωση θα ξεπεράσει τις 10 ημέρες. Το κόστος απασχόλησης μηχανημάτων και προσωπικού για τα δύο συνεργεία A, B είναι 750€ και 1200€ αντιστοίχως. Ζητείται να βρεθούν πόσες ημέρες θα εργαστεί κάθε συνεργείο σε κάθε έργο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος για τη τεχνική εταιρεία και τα έργα να εκτελεσθούν σύμφωνα με τις ανωτέρω απαιτήσεις.*
-

Άσκηση

- Ένα συνεργείο οικοδόμων θα πρέπει να κάνει τον μηνιαίο προγραμματισμό των εργασιών του σε δύο έργα. Στο πρώτο έργο έχει υποχρέωση να εργάζεται τουλάχιστον 2 ημέρες την εβδομάδα ενώ στο δεύτερο έργο τουλάχιστον 7 ημέρες το μήνα. Οι συνολικές εργάσιμες ημέρες του μήνα είναι 25. Στο δεύτερο έργο, λόγω απασχόλησης και άλλων συνεργείων, δεν μπορεί να εργασθεί παραπάνω από 15 ημέρες συνολικά. Από το πρώτο έργο υπολογίζει ότι κερδίζει κατά μέσο όρο 30€ την ημέρα και από το δεύτερο 45€ την ημέρα.
 - Ζητείται να γίνει ο μηνιαίος προγραμματισμός (ημέρες εργασίας) απασχόλησης του συνεργείου στις δύο εργασίες ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος του μήνα.
-

Άσκηση

- Μία βιομηχανική επιχείρηση ηλεκτρολογικού εξοπλισμού "BIOLAMP" παράγει δύο ειδών λαμπτήρες . Η παραγωγή τους πραγματοποιείται σε τρία στάδια παραγωγής : Συναρμολόγηση του λαμπτήρα, Ποιοτικός Έλεγχος, Συσκευασία. Το κέρδος από την πώληση των λαμπτήρων ανα 10 τεμάχια είναι 2,5€ και 3€ αντιστοίχως. Ο απαιτούμενος χρόνος για κάθε στάδιο παραγωγής καθώς επίσης και ο μέγιστος χρόνος απασχόλησης του εξοπλισμού σε κάθε στάδιο παραγωγής δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα :

Στάδιο Επεξεργασίας	Λαμπτήρας Λ_1	Λαμπτήρας Λ_2	Μέγιστη Ικανότητα Παραγωγής (σε λεπτά)
Συναρμολόγηση	4	6	240
Ποιοτικός Έλεγχος	1	4	400
Συσκευασία	2	3	300