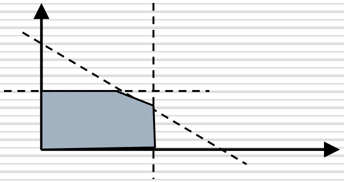
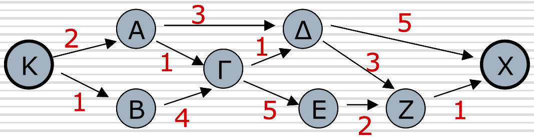




Η μέθοδος SIMPLEX

- Τι είναι η SIMPLEX
- Επαναληπτική διαδικασία
- Παράδειγμα
- Προβλήματα ελαχιστοποίησης
- Ειδικές περιπτώσεις

Τι είναι η SIMPLEX

- Αλγοριθμική προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού
- Τεχνική : αναπαριστά το πρόβλημα με τη μορφή ενός πίνακα τον οποίο στη συνέχεια σε διαδοχικά στάδια μετασχηματίζει ώστε τελικά να προκύψει η βέλτιστη εφικτή λύση

Η κανονική μορφή ενός προβλήματος ΓΠ

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0s_1 + \ldots + 0s_n \\
&s.t. \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + s_n = b_m \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \\
&s_1 \ge 0, s_2 \ge 0, \ldots, s_m \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0s_1 + \ldots + 0s_n \\
&s.t. \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - e_1 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - e_2 = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - e_m = b_m \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \\
&e_1 \ge 0, e_2 \ge 0, \ldots, e_m \ge 0
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + x_2 \le 550$$
$$x_1 + 3x_2 \le 100$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 2000$$
$$x_1 \le 400$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$
$$s.t.$$
$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 \qquad = 550$$
$$1x_1 + 3x_2 + \quad + 1s_2 \qquad = 1000$$
$$2x_1 + 5x_2 \qquad + 1s_3 \quad = 0$$
$$1x_1 \qquad + 1s_4 = 400$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$s_1 \ge 0, s_2 \ge 0, s_3 \ge 0, s_4 \ge 0$$

Τεχνητές μεταβλητές, βασική εφικτή λύση

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$s.t.$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

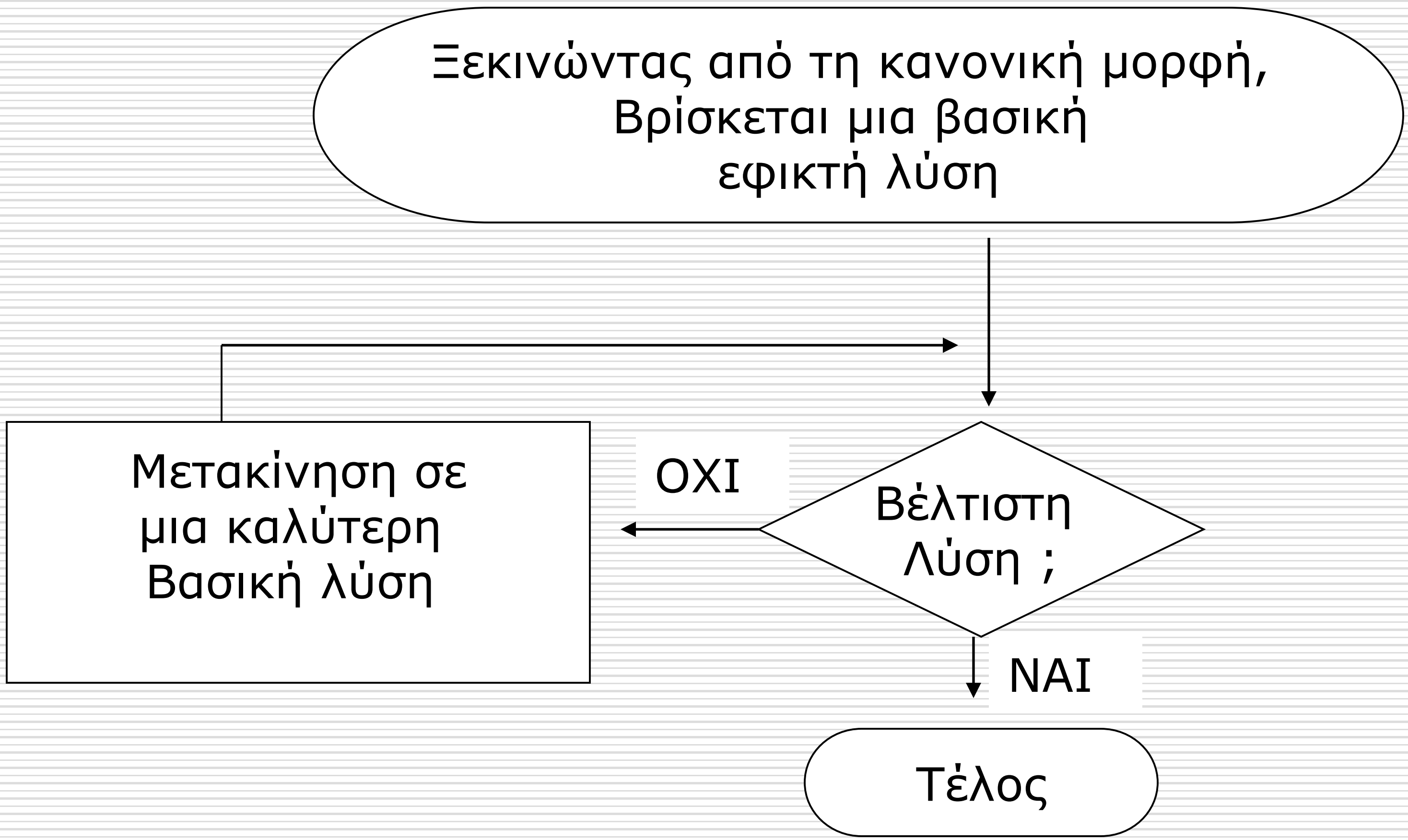
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + s_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, \ldots, s_m \geq 0$$

- Οι μεταβλητές S1, S2,…Sn χρησιμοποιούνται ως βοηθητικές για τη μετατροπή των περιορισμών σε ισότητες. Οι μεταβλητές αυτές δεν εκφράζουν παράγοντες του προβλήματος. Λέγονται τεχνητές μεταβλητές (artificial variables)
- Οι μεταβλητές x1,x2,..,xn ονομάζονται βασικές μεταβλητές
- Βασική εφικτή λύση λέγεται εκείνη που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς αλλά δεν επιτυγχάνει κατ’ ανάγκη και τη βέλτιστη λύση
- Εάν μία ή περισσότερες από τις τεχνητές μεταβλητές παραμείνουν στη βέλτιστη λύση μετά το τέλος της επαναληπτικής διαδικασίας, τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτή λύση

Η επαναληπτική διαδικασία του Αλγορίθμου



Παράδειγμα επίλυσης με τη μέθοδο Simplex

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 550$$

$$1x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$$

$$2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$$

$$1x_1 + 1s_4 = 400$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0$$

	Βάση	150	200	0	0	0	0	Δεξιό μέλος
CB		x1	x2	s1	s2	s3	s4	
0	s1	1	1	1	0	0	0	550
0	s2	1	3	0	1	0	0	1000
0	s3	2	5	0	0	1	0	2000
0	s4	1	0	0	0	0	1	400
	zj							
	cj - zj							

Παράδειγμα επίλυσης με τη μέθοδο Simplex

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
s_1	1	1	1	0	0	0	550
s_2	1	3	0	1	0	0	1000
s_3	2	1	0	0	1	0	2000
s_4	1	0	0	0	0	1	400
z	-150	-200	0	0	0	0	0

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 550$$

$$1x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$$

$$2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$$

$$1x_1 + 1s_4 = 400$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι μία αρχική εφικτή λύση, αλλά όχι η βέλτιστη είναι

B_0: x1=0, x2=0, s1=550, s2=1000, s3=2000, s4=400

η οποία δίνει Z=0. Επειδή υπάρχει αρνητική τιμή στη τελευταία γραμμή, υπάρχει καλύτερη λύση.

Παράδειγμα επίλυσης με τη μέθοδο Simplex

- Διαδικασία Επιλογής της επόμενης εφικτής λύσης
  - Καθορίζεται ποια μη βασική μεταβλητή θα εισαχθεί στο πρόβλημα
  - Εντοπίζεται ποια βασική μεταβλητή θα εξαχθεί
  - Με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss/Jordan, διαμορφώνεται ο νέος πίνακας και βρίσκεται η νέα εφικτή λύση
  - Ελέγχεται εάν η τρέχουσα βασική λύση είναι και η βέλτιστη

Παράδειγμα επίλυσης με τη μέθοδο Simplex

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	b
s_1	1	1	1	0	0	0	550/1=550
s_2	1	3	0	1	0	0	1000/3=333,33
s_3	2	1	0	0	1	0	20000/1=2000
s_4	1	0	0	0	0	1	-
z	-150	-200	0	0	0	0	0

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$
$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 550$$
$$1x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$$
$$2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$$
$$1x_1 + 1s_4 = 400$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0$$

-Βρίσκουμε τη μεγαλύτερη αρνητική τιμή στην τελευταία γραμμή του πίνακα. Η τιμή αυτή ορίζει τη στήλη οδηγό , X2.

-Διαιρούμε τις τιμές της τελευταίας στήλης b με τη στήλη οδηγό. Οπου δεν ορίζεται η διαίρεση, όπως στη γραμμή που αντιστοιχεί στην s4, βάζουμε -.

-Η μικρότερη τιμή που υπολογίζεται από τη στήλη b, αντιστοιχεί στη γραμμή οδηγό. Αυτή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στο s2, επειδή το 333,33 είναι η μικρότερη γραμμή

Παράδειγμα επίλυσης με τη μέθοδο Simplex

	Βάση	150	200	0	0	0	0	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
CB		x1	x2	s1	s2	s3	s4		
0	s1	1	1	1	0	0	0	550	550
0	s2	1	3	0	1	0	0	1000	1000/3
0	s3	2	5	0	0	1	0	2000	400
0	s4	1	0	0	0	0	1	400	-
	zj	0	0	0	0	0	0	0	
	cj - zj	150	200	0	0	0	0		

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 550$$

$$1x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$$

$$2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$$

$$1x_1 + 1s_4 = 400$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0$$

Οι τιμές των z_j και c_j- z_j βοηθούν στον έλεγχο του τερματισμού της επαναληπτικής διαδικασίας – εύρεση της βέλτιστης λύσης.

CB : οι συντελεστές των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση, εδώ είναι μηδέν επειδή οι s1,..s4 δεν συμμετέχουν στην αντικειμενική συνάρτηση.

z_j : άθροισμα των επιμέρους γινομένων των μελών των στηλών CB και j.

Παράδειγμα επίλυσης με τη μέθοδο Simplex

	Βάση	150	200	0	0	0	0	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
CB		x1	x2	s1	s2	s3	s4		
0	s1	1	1	1	0	0	0	550	550
0	s2	1	3	0	1	0	0	1000	1000/3
0	s3	2	5	0	0	1	0	2000	400
0	s4	1	0	0	0	0	1	400	-
	zj	0	0	0	0	0	0	0	
	cj - zj	150	200	0	0	0	0		

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$
$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 550$$
$$1x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$$
$$2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$$
$$1x_1 + 1s_4 = 400$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss/Jordan για να βρούμε τη επόμενη εφικτή λύση.

Διαιρούμε την αξονική σειρά με το 3 (αξονικό στοιχείο)

0	s2	1/3	1	0	1/3	0	0	1000	1000/3

και σε όλες τις υπόλοιπες σειρές υπολογίζουμε τις τιμές με βάση τον τύπο :
Προηγούμενη τιμή – συντελεστής της εισερχόμενης σειράς * νέα αξονική σειρά
Πχ. Σειρά s3 -> (2,5,0,0,1,0,2000, 400) →
(2,5,0,0,1,0,2000, 400) – 5 * (1/3,1,0,1/3,0,0,1000/3) =
= (1/3,0,0,-5/3,1,0,1000/3)

Παράδειγμα επίλυσης με τη μέθοδο Simplex

	Βάση	150	200	0	0	0	0	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
CB		x1	x2	s1	s2	s3	s4		
0	s1	2/3	0	1	-1/3	0	0	650/3	
200	x2	1/3	1	0	1/3	0	0	1000/3	
0	s3	1/3	0	0	-5/3	1	0	1000/3	
0	s4	1	0	0	0	0	1	400	
	zj	200/3	200	0	200/3	0	0	200000/3	
	cj - zj	250/3	0	0	-200/3	0	0		

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$
$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 550$$
$$1x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$$
$$2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$$
$$1x_1 + 1s_4 = 400$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0$$

Η νέα εφικτή λύση είναι η

B_1: x1=0, x2=1000/3, s1=650/3, s2=0, s3=1000/3, s4=400
Και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
Z= 150 * 0 + 200 * 1000 /3 = 20000/3

<u>Κριτήριο τερματισμού</u> : Εάν όλες οι τιμές της γραμμής $c_j - z_j$ είναι αρνητικές ή μηδέν δεν υπάρχει άλλη μη βασική μεταβλητή η οποία εισερχόμενη μπορεί να βελτιώσει περαιτέρω τη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, άρα η λύση που βρέθηκε είναι η βέλτιστη

Παράδειγμα επίλυσης με τη μέθοδο Simplex

	Βάση	150	200	0	0	0	0	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
CB		x1	x2	s1	s2	s3	s4		
150	x1	1	0	3/2	-1/2	0	0	325	
200	x2	0	1	-1/2	1/2	0	0	225	
0	s3	0	0	-1/2	-3/2	1	0	25	
0	s4	0	0	-3/2	1/2	0	1	75	
	zj	150	200		25	0	0	93,75	
	cj - zj	0	0	-125	-25	0	0		

$$\max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1s_1 = 550$$

$$1x_1 + 3x_2 + 1s_2 = 1000$$

$$2x_1 + 5x_2 + 1s_3 = 2000$$

$$1x_1 + 1s_4 = 400$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0$$

Κριτήριο τερματισμού

Τελική λύση

Τερματισμός της διαδικασίας μετά από 2 βήματα

Η Simplex για προβλήματα ελαχιστοποίησης

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 1.5x_1 + 2.5x_2 \\
&s.t. \\
&0.3x_1 + 0.2x_2 \geq 1.5 \\
&0.05x_1 + 0.25x_2 \geq 9 \\
&x_2 \geq 20 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 1.5x_1 + 2.5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\
&s.t. \\
&0.3x_1 + 0.2x_2 - 1e_1 = 1.5 \\
&0.05x_1 + 0.25x_2 - 1e_2 = 9 \\
&x_2 - 1e_3 = 20 \\
&x_1 \geq 0, x_2 e_1, e_2, e_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Προκειμένου να βρούμε μια πρώτη εφικτή λύση, εάν θέσουμε x1=0, x2=0, τότε, ο πρώτος περιορισμός γίνεται

0.3 * 0 + 0.2 * 0 – e1 = 1.5, δηλαδή e1 = -1.5 οπότε παραβιάζεται ο τελευταίος περιορισμός. Για να διευκολύνουμε τη διαδικασία εύρεσης μιας πρώτης εφικτής λύσης εισάγουμε νέες τεχνητές μεταβλητές.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 1.5x_1 + 2.5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3 \\
&s.t. \\
&0.3x_1 + 0.2x_2 - 1e_1 + a_1 = 1.5 \\
&0.05x_1 + 0.25x_2 - 1e_2 + a_2 = 9 \\
&x_2 - 1e_3 + a_3 = 20 \\
&x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Όπου M ένας μεγάλος αριθμός, τάξεως 10^6

Η Simplex για προβλήματα ελαχιστοποίησης

$$\min \quad z = 1.5x_1 + 2.5x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3$$

$$s.t.$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 - 1e_1 + a_1 = 1.5$$

$$0.05x_1 + 0.25x_2 - 1e_2 + a_2 = 9$$

$$x_2 - 1e_3 + a_3 = 20$$

$$x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

Όπου M ένας μεγάλος αριθμός, πχ τάξεως 10^6, 10^7 …

Οι παράγοντες Ma_i έχουν μεγάλη τιμή για θετικές τιμές του a_i οπότε προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση, η μεταβλητή a_i πρέπει να λάβει πολύ μικρές τιμές, κοντά στο μηδέν.

$$\max \quad z = -1.5x_1 - 2.5x_2 - 0e_1 - 0e_2 - 0e_3 - Ma_1 - Ma_2 - Ma_3$$

$$s.t.$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 - 1e_1 + a_1 = 1.5$$

$$0.05x_1 + 0.25x_2 - 1e_2 + a_2 = 9$$

$$x_2 - 1e_3 + a_3 = 20$$

$$x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

Ειδικές περιπτώσεις

- Περιορισμοί με αρνητικό δεξί μέλος

Π.χ

X1 <= x2 –72 → -x1 + x2 <= -72 → x1 – x2 >= 72 →

X1 – x2 – e3 + a3 = 72

- Πολλές βέλτιστες λύσεις
  - Ύπαρξη μηδενικών τιμών στη σειρά c_{j-} z_j

- Καμία εφικτή λύση
  - Τερματισμός της διαδικασίας (αρνητικές ή μηδέν τιμές στη σειρά c_{j-} z_j με ύπαρξη μιας τεχνητής μεταβλητής στις βασικές μεταβλητές
- Μη φραγμένη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (αύξηση ή μείωση της τιμής απεριόριστα)
  - Όταν όλοι οι συντελεστές της εισερχόμενης μεταβλητής είναι αρνητικοί ή μηδέν