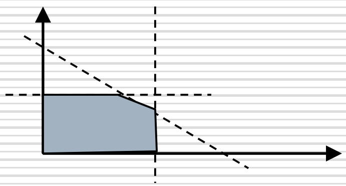
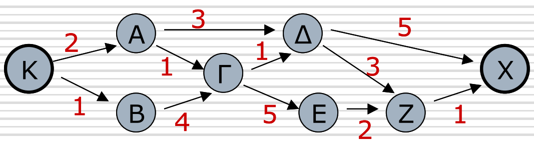




Δυϊκή Θεωρία, Ανάλυση Ευαισθησίας

- Το δυϊκό πρόβλημα
- Χρησιμότητα, εφαρμογές
- Ανάλυση ευαισθησίας
- Παραδείγματα

Το δυϊκό πρόβλημα

- Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού – *πρωτεύον, primal* - αντιστοιχεί ένα άλλο, *το δυϊκό πρόβλημα , dual*
- Το δυϊκό προκύπτει με απλούς μετασχηματισμούς από το πρωτεύον και αποτελεί εναλλακτική λύση του ίδιου προβλήματος (δίνει τα ίδια αποτελέσματα)

Σχέση πρωτεύοντος – δυϊκού

- Ο αρχικός – δυϊκός πίνακας

			Max z			
Min w		$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	...	$x_n \geq 0$	
		x_1	x_2	...	x_n	
$y_1 \geq 0$	y_1	α_{11}	α_{12}	...	α_{1n}	$\leq b_1$
$y_2 \geq 0$	y_2	α_{21}	α_{22}	...	α_{2n}	$\leq b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$y_m \geq 0$	y_m	α_{m1}	α_{m2}	...	α_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq c_1$	$\geq c_2$		$\geq c_n$	

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\
&s.t. \\
&a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m \geq c_1 \\
&a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m \geq c_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n \\
&y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0
\end{aligned}
$$

Μετασχηματισμός του πρωτεύοντος σε δυϊκό

- Το δυϊκό έχει τόσες μεταβλητές (δυϊκές) όσοι είναι οι περιορισμοί του πρωτεύοντος
- Το δυϊκό έχει τόσους περιορισμούς όσες είναι οι μεταβλητές απόφασης του πρωτεύοντος
- Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος
- Τα δεξιά μέλη των περιορισμών του δυϊκού είναι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος
- Οταν το πρωτεύον είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης το δυϊκό είναι ελαχιστοποίησης και αντιστρόφως

Παράδειγμα

Max z=150x1+200x2

Με περιορισμούς

x1+x2<=550

x1+3x2<=1000

2x1+5x2<=2000

x1 <=400

x1, x2>=0

		Max z		
min w		x1>=0	x2>=0	
		x1	x2	
y1>=0	y1	1	1	<=550
y2>=0	y2	1	3	<=1000
y3>=0	y3	2	5	<=2000
y4>=0	y4	1	0	<=400
		>=150	>=200	

Min
w=550y1+1000y2+2000y3+400y4

Με περιορισμούς

y1+y2+2y3+y4>=150

y1+3y2+5y3 >=200

y1, y2, y3, y4 >=0

Παρατηρήσεις

- Οταν υπάρχει βέλτιστη λύση για το πρωτεύον υπάρχει και για το δυϊκό – η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η ίδια (Δυϊκό Θεώρημα)
- Η μέθοδος Simplex στη τελευταία επανάληψη εντοπίζει ταυτόχρονα τη βέλτιστη λύση του δυϊκού που είναι οι σκιώδεις τιμές Zj

	Βάση	150	200	0	0	0	0	Δεξιό μέλος	Πηλίκο
CB		x1	x2	s1	s2	s3	s4		
0	s1	2/3	0	1	-1/3	0	0	650/3	
200	x2	1/3	1	0	1/3	0	0	1000/3	
0	s3	1/3	0	0	-5/3	1	0	1000/3	
0	s4	1	0	0	0	0	1	400	
	zj	200/3	200	0	200/3	0	0	200000/3	
	cj - zj	250/3	0	0	-200/3	0	0		

Χρησιμότητα του δυϊκού – παράδειγμα

x1, x2 : ποσότητες που θα παραχθούν από τα παγωτά A, B

$x_1 + x_2 \leq 550$ Περιορισμός για τις ποσότητες γάλακτος που θα χρησιμοποιηθεί

$x_1 + 3x_2 \leq 1000$ Περιορισμός για την εργασία

$2x_1 + 5x_2 \leq 2000$ Περιορισμός για την επεξεργασία

$x_1 \leq 400$ Περιορισμός για την ζήτηση

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = 150x_1 + 200x_2 \\
&x_1 + x_2 \leq 550 \\
&x_1 + 3x_2 \leq 1000 \\
&2x_1 + 5x_2 \leq 2000 \\
&x_1 \leq 400 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

z = αναμενόμενο εβδομαδιαίο κέρδος

b1,b2,b3,b4 = (550,1000,2000,400) : διαθέσιμη ποσότητα του αντίστοιχου πόρου (ποσότητες γάλακτος,εργασία, επεξεργασία κλπ)

➔b1y1, b2y2 … : η συνεισφορά του κάθε πόρου στη διαμόρφωση του κέρδους (=z)

➔ y1, y2,.. : η συνεισφορά μιας μονάδας γάλακτος, μιας μονάδας εργασίας, επεξεργασίας και ζήτησης του A στο μέγιστο κέρδος z

Χρησιμότητα του δυϊκού-Παράδειγμα

- $y1=125$, $y2=25$, $y3=y4=0$ και $z=93750$
- Τα 550 λίτρα διαθέσιμου γάλακτος αξίζουν για την επιχείρηση 550*y1=550*125=68.750 δρχ.
- Τα 1000 λεπτά εργασίας αξίζουν 1000*25=25.000δρχ.
- $y1+y2+2y3+y4>=150$: Ο συνδυασμός ενός λίτρου γάλακτος, ενός λεπτού εργασίας, δύο μονάδων επεξεργασίας και μίας μονάδα ζήτησης δίνουν κέρδος τουλάχιστον 150 δρχ. Ομοίως για τον δεύτερο περιορισμό

Η σημασία του δυϊκού

- Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης η δυϊκή τιμή εκφράζει τη οριακή αξία (marginal value) μιας επιπλέον μονάδας ενός πόρου (υλικού, χρόνου απασχόλησης, χρόνου επεξεργασίας κλπ). Υποδεικνύει πόσο θα βελτιωθεί το κέρδος εάν αυξηθεί η ποσότητα του πόρου κατά μια μονάδα
- Η βελτίωση που προκύπτει στη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z όταν ένας πόρος (δεξί μέλος στους περιορισμούς) αυξηθεί λέγεται **σκιώδης τιμή**

Ανάλυση ευαισθησίας

- Στα πραγματικά προβλήματα πολλές από τις παραμέτρους αποτελούν απλώς εκτιμήσεις οι οποίες μεταβάλλονται από το περιβάλλον
  - Η ζήτηση ενός προϊόντος για τον επόμενο χρόνο δεν μπορεί να εκτιμηθεί με απολύτως ακριβείς τιμές λόγω του ανταγωνισμού
  - Το κόστος εργασίας δεν παραμένει σταθερό
  - Η απόδοση του εξοπλισμού δεν παραμένει σταθερή λόγω βλαβών
  - Το προσωπικό συνταξιοδοτείται ή προσλαμβάνεται νέο
- Θα πρέπει να γνωρίζουμε ποιες παράμετροι και σε ποια μεταβολή τους μπορεί να ανατραπεί η βέλτιστη λύση

Ανάλυση ευαισθησίας

- Ανάλυση ευαισθησίας (sensitivity analysis, postoptimality analysis) μελετά τις συνέπειες στη λύση ενός προβλήματος ΓΠ από αλλαγές των παραμέτρων του μοντέλου
- Απαντά στο ερώτημα : «Τι θα συμβεί εάν υπάρξει μια μεταβολή σε κάποιο στοιχείο του προβλήματος» - what if analysis
  - Πως θα επηρεαστεί το βέλτιστο σχέδιο παραγωγής εάν μειωθεί η τιμή ενός προϊόντος
  - σε ποια όρια μεταβολής της τιμής πώλησης δεν μεταβάλλεται το σχέδιο παραγωγής
  - Τι θα συμβεί εάν η διαθέσιμη ποσότητα μιας πρώτης ύλης μειωθεί
  - Πως θα επηρεαστεί η κατανομή του προσωπικού σε μια εργασία όταν πάψουν να είναι διαθέσιμοι μερικοί υπάλληλοι

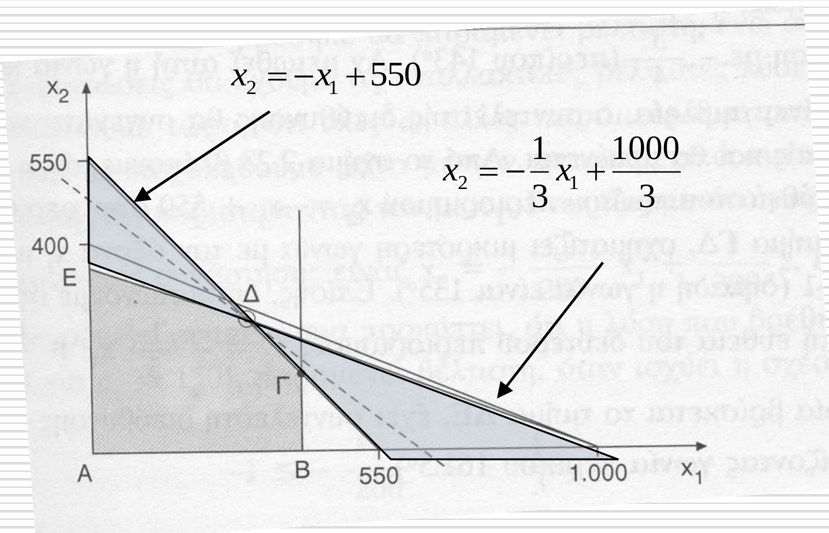
Μεταβολή του συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης

- Ο συντελεστής του x1 (=150) είναι τιμή του προϊόντος Α. Εάν ορισθεί ως μεταβλητή, c1 τότε η εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται :

$$z=c1x1+200x2 \rightarrow x2=-c1/200\ x1 + 1/200\ z$$

και ο συντελεστής –c1/200 εκφράζει τη κλίση της ευθείας.

- Τα όρια της μεταβολής της ευθείας της αντικ. συνάρτησης ώστε να μην μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση ορίζονται από τις ευθείες που φαίνονται στο σχήμα



$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 150x_1 + 200x_2 \\
& x_1 + x_2 \le 550 \\
& x_1 + 3x_2 \le 1000 \\
& 2x_1 + 5x_2 \le 2000 \\
& x_1 \le 400 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Μεταβολή του συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης

- Από τη γραφική παράσταση και απο τις κλίσεις των ευθειών

$$x_2 = -x_1 + 550 \qquad x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1000}{3}$$

  που ορίζουν το διάστημα στο οποίο κινείται η αντικ.συνάρτηση προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση παραμένει όταν η κλίση περιορίζεται στο διάστημα [-1 –1/3],

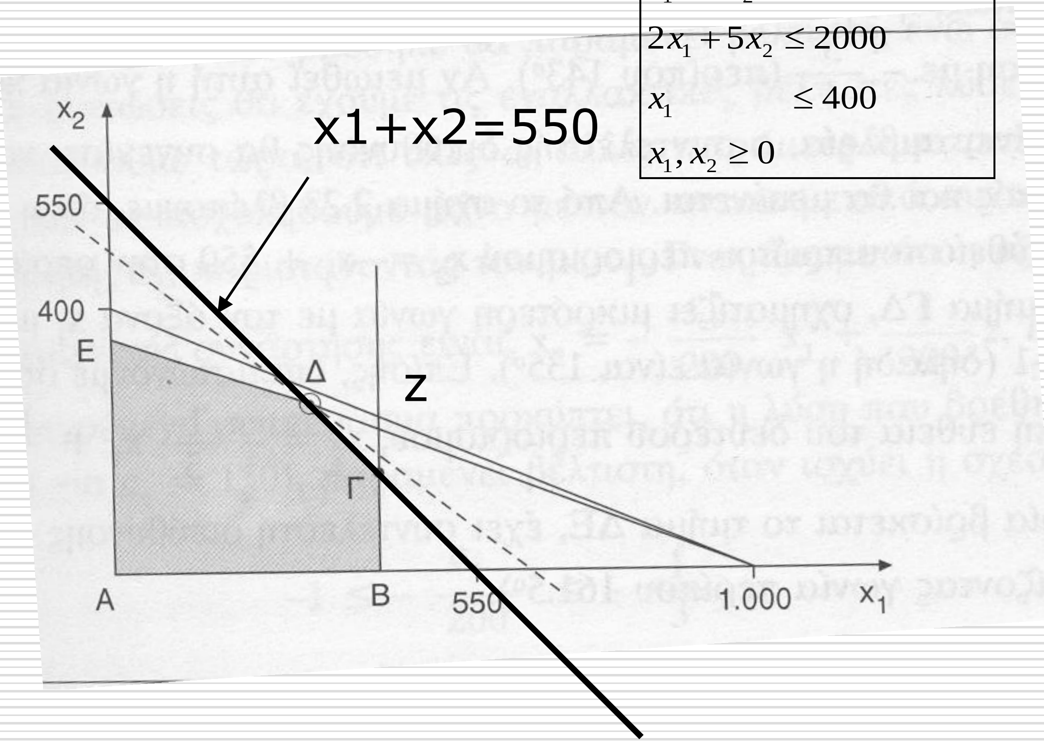
  -1 <= -c1/200 <= -1/3 , 200/3 <= c1 <= 200
- Εάν αντί του c1=150, υπολογισθεί c1=170 τότε το Δ παραμένει βέλτιστη λύση αλλά το z αυξάνεται από z=93,750 σε z=100,250

Ελεγχος ευαισθησίας της τιμής ενός πόρου

- Εξετάζεται πως επηρεάζεται η λύση του προβλήματος όταν μεταβάλλονται οι σταθερές στο δεξί μέλος των περιορισμών (εκφράζουν τους διαθέσιμους πόρους)
- Ανάλυση ευαισθησίας → για ποιες τιμές η βέλτιστη λύση παραμένει αμετάβλητη

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 150x_1 + 200x_2 \\
&x_1 + x_2 \le 550 \\
&x_1 + 3x_2 \le 1000 \\
&2x_1 + 5x_2 \le 2000 \\
&x_1 \le 400 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



- Η μεταβολή της τιμής 550 στον δεύτερο περιορισμό προκαλεί παράλληλη μετατόπιση της ευθείας x1+x2=550
- Τότε το σημείο Δ που αποτελεί τη βέλτιστη λύση μεταβάλλεται μέσα στο διάστημα ΕΖ. Πέραν του Ζ ο περιορισμός γίνεται πλεονάζον.
- Αφού Ε(0,1000/3) και Ζ(400,200) τα ακραία σημεία της μεταβολής τότε 0+1000/3=b1 και 400+200=b1 άρα
  1000/3 =<b1<=600
- Η μεταβολή του πόρου του δεύτερου περιορισμού στο διάστημα [1000/3, 600] εξασφαλίζει τη διατήρηση του Δ ως σημείου βέλτιστης λύσης