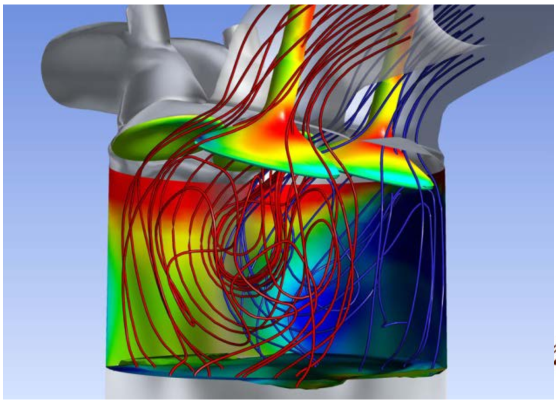
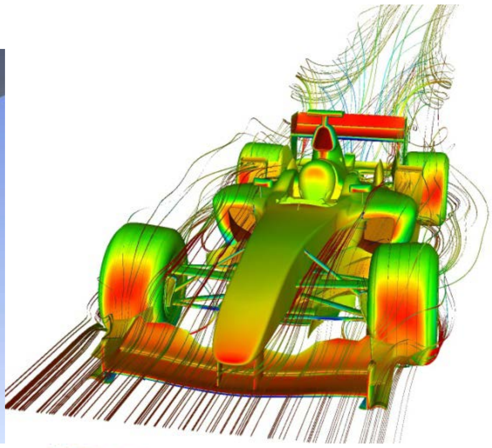
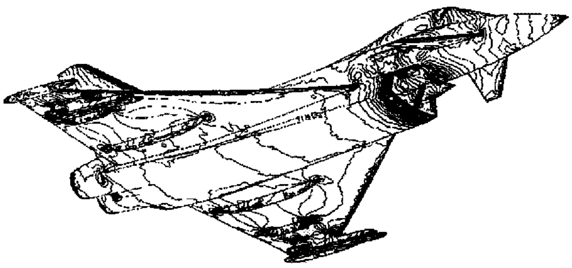
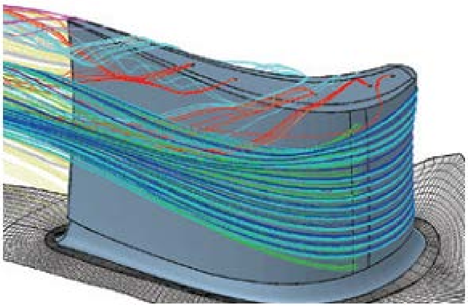
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Έκδοση 1.8.0 / 2022

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

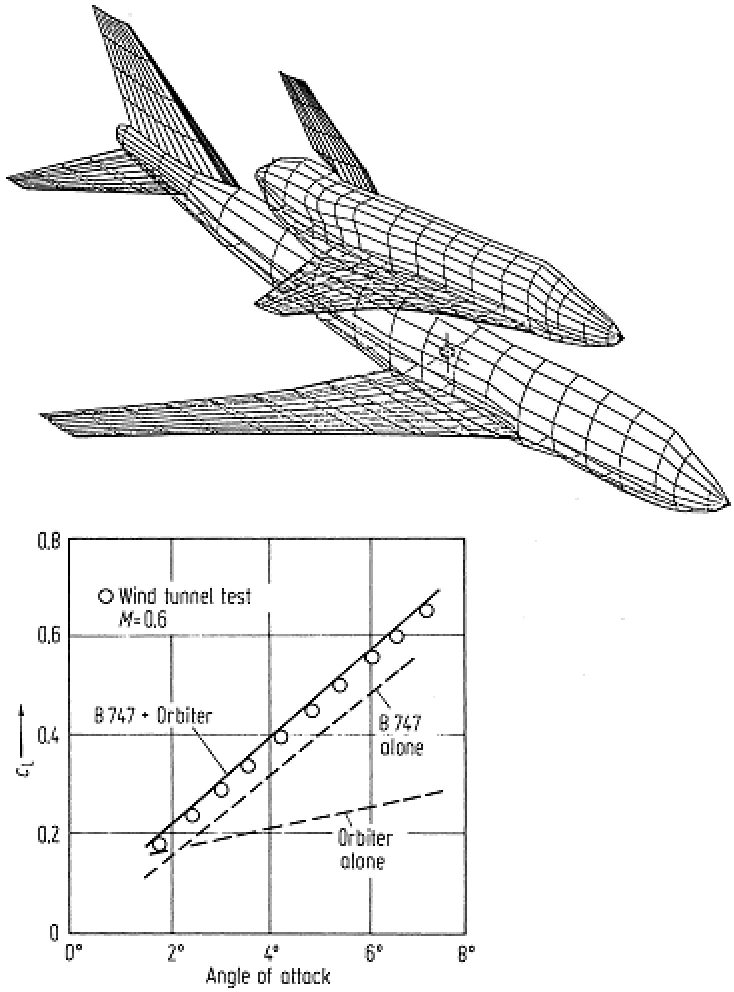
1.1 Υπολογιστική Ρευστομηχανική: Τι σημαίνει ;

Τα φυσικά χαρακτηριστικά μίας οποιασδήποτε ροής ρευστού υπόκειται στις ακόλουθες τρείς θεμελιώδεις αρχές: α) διατήρηση της μάζας, β) $F = m \cdot \alpha$ (ο δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα) και γ) η διατήρηση της ενέργειας.
Αυτές οι θεμελιώδεις αρχές μπορούν να εκφραστούν υπό τη μορφή εξισώσεων που στην πιο γενική τους μορφή είναι συνήθως μερικές διαφορικές εξισώσεις.
Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική (Computational Fluid Dynamics ή CFD στο εξής) είναι εν μέρει η τέχνη της αντικατάστασης των μερικών αυτών διαφορικών εξισώσεων με αριθμούς και η ολοκλήρωση αυτών στο χώρο και στο χρόνο για την απόκτηση μίας τελικής μαθηματικής περιγραφής του πλήρους πεδίου ροής που ενδιαφέρει να μελετηθεί.
Το παραπάνω δεν είναι μία πλήρης ερμηνεία του CFD διότι υπάρχουν κάποια προβλήματα που επιτρέπουν την άμεση λύση του ροϊκού πεδίου χωρίς την ολοκλήρωση του στο χώρο και χρόνο ενώ υπάρχουν και περιπτώσεις που εμπεριέχουν ολοκληρωμένες διαφορικές εξισώσεις αντί για μερικές.
Παρ' όλα αυτά όλα τα περισσότερα προβλήματα βιομηχανικών εφαρμογών της Ρευστομηχανικής απαιτούν τον χειρισμό και τη λύση αριθμών. Το τελικό προϊόν του CFD είναι μία συλλογή αριθμών σε αντίθεση με μία κλειστού τύπου αναλυτική λύση που και αυτή εμφανίζει μία ποσοτική περιγραφή του προβλήματος.
Βέβαια το μέσο το οποίο επέτρεψε την ανάπτυξη του CFD είναι ο υπολογιστής. Οι λύσεις του CFD απαιτούν τον επαναληπτικό προσδιορισμό χιλιάδων ή και εκατομμυρίων αριθμών έργο αδύνατο για τον άνθρωπο χωρίς τον υπολογιστή.
Έτσι η ανάπτυξη του CFD και των εφαρμογών του σε προβλήματα ιδιαίτερα πολύπλοκα ή λεπτομερή είναι απόλυτα συνδεδεμένα με την ανάπτυξη του hardware των υπολογιστών ιδιαίτερα στο πεδίο της μνήμης και της ταχύτητας.
Για το λόγο αυτό η ανάγκη του CFD λειτούργησε σαν κινητήρια δύναμη για την ανάπτυξη των υπολογιστών.

1.2 Ο ρόλος του CFD στη σύγχρονη Ρευστομηχανική

Αρχικά ας κάνουμε μία αναφορά σε ιστορικά δεδομένα. Πιθανότατα το πρώτο παράδειγμα υπολογιστικής Ρευστομηχανικής να ήταν το έργο του Kopal που το 1047 υπολόγισε μία πληθώρα πινάκων για υπερηχητική ροή πάνω από αιχμηρούς κώνους με την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων (η εξίσωση Taylor-Maccolli). Οι λύσεις αυτές έγιναν από έναν πρωτόγονο ψηφιακό υπολογιστή στη Μασαχουσέτη στο MIT. Παρ όλα αυτά οι πρώτη γενιά υπολογιστικών ρευστοδυναμικών λύσεων εμφανίστηκε στη δεκαετία του 1950 και αρχές του 1960 προωθούμενες από την παράλληλη εξέλιξη των υπολογιστών σε πιο αποτελεσματικούς και πιο ταχείς και την ανάγκη επίλυσης υψηλής ταχύτητας, υψηλής θερμοκρασίας προβλήματα επανεισόδου (re-entry) σωμάτων.
Οι απαιτήσεις για υψηλές θερμοκρασίες οδήγησαν στη προσθήκη των δονήσεων και των χημικών αντιδράσεων στα προβλήματα ροής είτε σε κατάσταση ισορροπίας είτε όχι. Συνήθως τέτοια φυσικά φαινόμενα γενικά δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά ακόμα και στην απλούστερη γεωμετρία σωμάτων. Για το λόγο αυτό η αναγκαιότητα των υπολογιστών για υπολογιστικές μεθόδους ήταν επιβεβλημένη. Παραδείγματα τέτοιων πρωτοποριακών υπολογιστών είναι η δουλειά του Fay και Riddell του Blottner για οριακά στρώματα και του Hall για αντίστροφη (reverse) ροή.
Αν δεν ήταν της μόδας την εποχή εκείνη να περιγράφει κανείς με υπολογισμούς τη ροή αερίων υψηλής θερμοκρασίας σαν CFD, παρ' όλα αυτά ήταν η πρώτη αυτή γενιά του συγκεκριμένου κλάδου.
Η δεύτερη γενιά λύσεων CFD, αυτές που σήμερα περιγράφουν τον κλάδο, εμπεριέχουν την εφαρμογή των εξισώσεων που εφαρμόζονται στα προβλήματα δυναμικής ροής που είναι από μόνα τους πολύπλοκα (χωρίς την παρουσία χημικών αντιδράσεων κλπ) και συνεπώς η παρουσία υπολογιστή είναι επιβεβλημένη.
Παραδείγματα τέτοιων δύσκολων προβλημάτων είναι οι μικτές υποηχητικές και υπερηχητικές ροές, οι παχύρευστες ροές που δεν υπόκεινται στη προσέγγιση του οριακού στρώματος όπως οι αποκολλούμενες ροές ή οι ροές επακυκλοφόρησης.
Για τη τελευταία περίπτωση απαιτείται η χρήση της πλήρους μορφής Navier Stokes για την πλήρη λύση.

Σε αυτές τις περιπτώσεις, η τεχνική της παραμέτρου του χρόνου εισήχθηκε με πρακτικό τρόπο στα μέσα του ’60. και προκάλεσε μία επανάσταση στους υπολογισμούς.
Ο ρόλος του CFD στις μηχανολογικές προβλέψεις είναι τόσο σημαντικός σήμερα που μπορεί να χαρακτηριστεί σαν η «Τρίτη διάσταση» στην Ρευστομηχανική πέρα της καθαρής θεωρίας και των πειραμάτων.
Από το 1687 με την έκδοση «Principia» του Νεύτωνα μέχρι και τα μέσα του 1960, οι εξελίξεις στη μηχανική των ρευστών έγιναν με τον συνδυασμό των πρωτοποριακών πειραμάτων και της βασικής θεωρητικής ανάλυσης – ανάλυση που απαιτεί σχεδόν πάντα για τη χρήση απλουστευμένων μοντέλων ροής για την απόκτηση κλειστών λύσεων στις εξισώσεις.
Αυτές οι κλειστές λύσεις έχουν το διακριτό πλεονέκτημα του άμεσου προσδιορισμού μερικών βασικών παραμέτρων στο δεδομένο πρόβλημα και την ξεκάθαρη παρουσίαση του εύρους επιρροής της παραμέτρου στις λύσεις.
Συνήθως έχουν το μειονέκτημα ότι δεν συμπεριλαμβάνουν όλα τα απαιτούμενα φυσικά μεγέθη της ροής. Εδώ υπεισέρχεται το CFD. Με τη δυνατότητα να χειρίζεται τις εξισώσεις στην «πλήρη μορφή» καθώς και τη συμμετοχή των λεπτομερειακών φυσικών φαινομένων όπως οι χημικές αντιδράσεις σε θαλάμους καύσης ΜΕΚ, το CFD έγινε ένα δημοφιλές εργαλείο για μηχανικές αναλύσεις. Σήμερα το CFD υποστηρίζει και συμπληρώνει τόσο τα πειράματα όσο και τη θεωρία, πράγμα που δεν θα παρέλθει στο μέλλον αλλά με την εξέλιξη των υπολογιστών θα παραμείνει η Τρίτη διάσταση στη ρευστομηχανική ίσης αξίας με τη θεωρία και το πείραμα.
Ένα από τα σημαντικότερα σημεία χρήσης του CFD είναι στον έλεγχο των αεροσυράγγων. Αυτό προέκυψε από τη ραγδαία μείωση του κόστους υπολογισμού σε σύγκριση με το αυξανόμενο κόστος των πειραμάτων στις αεροσύρραγγες. Σε μία έρευνα το 1979 ο Chapman δείχνει ένα σχεδιάγραμμα του σχετικού υπολογιστικού κόστους σε συνάρτηση με το χρόνο από το 1953. Σε αυτό το σχεδιάγραμμα φαίνεται μία μείωση κατά μία τάξη μεγέθους κάθε 8 χρόνια και συνεχίζει ακόμα και σήμερα να μειώνεται.
Η εξήγηση του φαινομένου είναι λόγο της ανάπτυξης των νέων υπολογιστών με μεγαλύτερες ταχύτητες υπολογισμού μέχρι του σούπερ υπολογιστές (όπως ο Cray και ο Cyber 250).
Σαν αποτέλεσμα, ο υπολογισμός των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών ενός νέου αεροπλάνου μέσω της χρήσης CFD είναι οικονομικότερος από τη μέτρηση των ιδίων χαρακτηριστικών σε μία αεροσύρραγγα. Πραγματικά και στη πράξη στη βιομηχανία κατασκευής αεροπλάνων, ο έλεγχος των αρχικών σχεδίων ενός νέου αεροπλάνου που συνήθως γινόταν πειραματικά σε αεροσύρραγγα γίνεται πλέον αποτελεσματικά μέσω CFD και η χρήση της αεροσύρραγγας έχει περιοριστεί μόνο στο τελικό στάδιο σχεδιασμού για τελικές λεπτομέρειες.
Πέρα από την οικονομική πλευρά το CFD προσφέρει τη δυνατότητα για συλλογή πληροφοριών του ροικού πεδίου, που είναι σε μερικές περιπτώσεις δύσκολο να μετρηθεί στην αεροσύρραγγα ή διαφοροποιείται λόγω της επίδρασης των τοιχωμάτων.
Βέβαια εννοείται ότι τα αποτελέσματα του CFD είναι ακριβή και οικονομικά σε σχέση τη αεροσύρραγγα. Τα αποτελέσματα του CFD είναι αξιόπιστα στο βαθμό που το φυσικό μοντέλο ερμηνεύεται από τις διαφορετικές εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες και άρα μπορεί να εμπεριέχεται σφάλμα ιδιαίτερα στις τυρβώδεις ροές. Παρ’ όλα τα μειονεκτήματα του αποτελέσματα του CFD είναι εντυπωσιακά ακριβή για πολύ μεγάλο αριθμό εφαρμογών. Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στον υπολογισμό του συντελεστή άνωσης για ένα δορυφόρο / Boeing 747. Σύγκριση μεταξύ αριθμητικών αποτελεσμάτων και πειραματικών δεδομένων σε αεροσήραγγα, καθώς απεικονίζοντια στο σχήμα 1.1, δείχνουν το υψηλό μέγεθος ακρίβειας που επιτεύχθηκε και που σχετίζεται με τον αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική λύση, καθώς και με το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε.



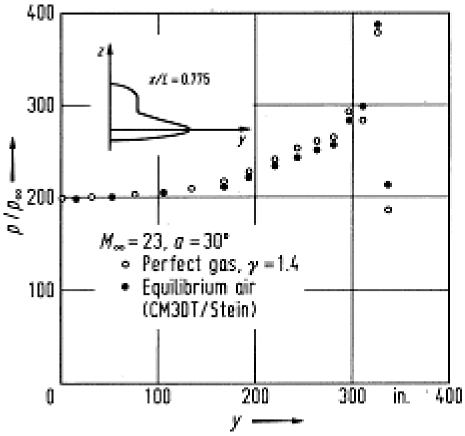
Σχήμα 1.1: Παράδειγμα υπολογισμού πολύπλοκης γεωμετρίας με τη βοήθεια της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

Έχοντας σαν δεδομένο τα αποτελέσματα της σύγκρισης αυτής καθώς και ότι οι υπολογισμοί με το CFD είναι συνήθως φθηνότεροι από τις μετρήσεις σε αεροσήραγγες οι αεροναυπηγοί έχουν μεταφέρει τον έλεγχο των αρχικών σχεδίων από τη χρήση της αεροσύραγγας σε CFD.
Ο ρόλος του CFD στον αρχικό σχεδιασμό είναι ουσιώδης για τη βασική έρευνα.
Υποθέτοντας μία CFD λύση σε μία βασική ροή (πχ ροή επάνω από επίπεδη πλάκα) εμπεριέχει όλες τις σημαντικές φυσικές παραμέτρους το υπολογιστικό πρόγραμμα το ίδιο είναι « μαθηματικό εργαλείο». Αυτό το εργαλείο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την διενέργεια μαθηματικών και υπολογιστικών πειραμάτων για να βοηθηθεί η μελέτη των βασικών χαρακτηριστικών της ροής.
Τα υπολογιστικά πειράματα είναι ευθέως ανάλογα με τα πραγματικά πειράματα.
Τι τύπους ροής μπορεί να χειριστεί με επάρκεια το CFD; Θα γίνει μία μικρή αναφορά παρακάτω:

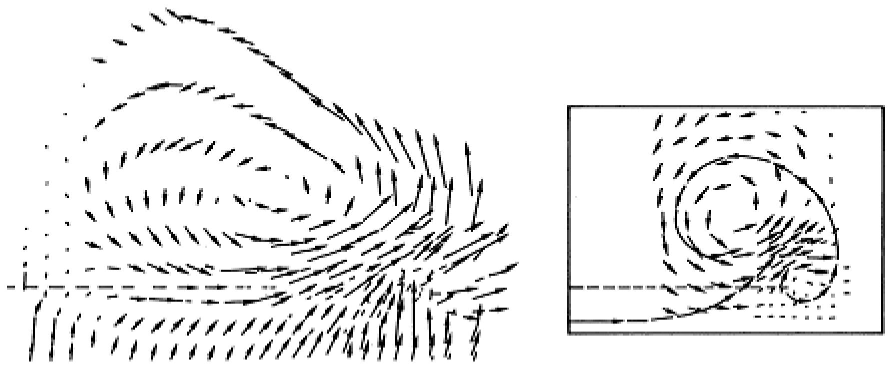
1. Ροϊκά πεδία γύρω από δορυφόρους.
2. Ροές πάνω από ακτινική πτέρυγα.
3. Μη σταθερές, παλινδρομικές ροές υπερηχητικών ροών στην είσοδο μηχανών.
4. Ροϊκό πεδίο αυτοκινήτου που μεταφέρει trailer.
5. Υπερηχητικές ροές καύσης σε αεριοστροβίλων.

Τι δεν μπορεί να κάνει το CFD ;
Η θεμελιώδης απάντηση στην ερώτηση είναι ότι δεν μπορεί να αναπαραγάγει φυσικά μεγέθη τα οποία δεν έχουν συμπεριληφθεί σωστά στη διαμόρφωση του προβλήματος. Το πιο σημαντικό παράδειγμα είναι η τύρβη.
Οι περισσότερες λύσεις CFD για τυρβώδεις ροές χρησιμοποιούν αριθμητικά μοντέλα που είναι απλές προσεγγίσεις των πραγματικών φυσικών μεγεθών και βασίζονται σε εμπειρικές πληροφορίες για κάποιες

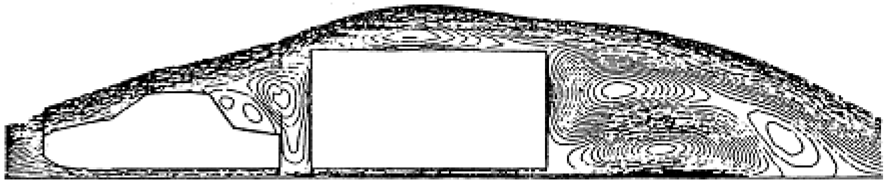
σταθερές που εμπεριέχονται στο μοντέλο. Έτσι σαν αποτέλεσμα οι λύσεις CFD για τυρβώδεις ροές υπόκεινται σε ανακρίβειες αν και κάποιοι υπολογισμοί για κάποιες καταστάσεις είναι λογικοί.
Σήμερα γίνεται δουλειά για την ακριβή μέτρηση της τύρβης. Αυτό βασίζεται την υπόθεση ότι σε πολύ λεπτό εύρος όλες οι τυρβώδεις ροές υπακούουν τις διαφορικές εξισώσεις Navier Stokes και άρα αν ένα μικρό πεδίο με μεγάλο αριθμό σημείων χρησιμοποιηθεί σωστά τότε θα εξαχθούν συμπεράσματα και για μεγαλύτερο πεδίο. Αυτό το αντικείμενο είναι ανοιχτό στο CFD. Πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι το CFD είναι υπόδουλο στο βαθμό της ερμηνείας των φυσικών μεγεθών στη διαμόρφωση του υπολογιστικού προβλήματος.
Ο σκοπός του παρόντος μαθήματος είναι να δώσει μία βασική και εκπαιδευτική προσέγγιση του CFD τονίζοντας τα θεμελιώδη, ερμηνεύοντας μερικές τεχνικές λύσεις με εύρος από χαμηλής ταχύτητας μη ασυμπίεστη ροή σε υπερηχητική ροή. Απευθύνεται σε σπουδαστές με ελάχιστη ή μηδενική εμπειρία από CFD.
Η προσδοκία του μαθήματος είναι να προσφέρει στον σπουδαστή: α) μία ιδέα για τη φιλοσοφία και τις δυνατότητες του CFD, β) μία κατανόηση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τις ροές, γ) μία οικειότητα με διάφορες δημοφιλείς τεχνικές λύσεις και δ) ένα τεχνικό λεξικό του κλάδου.
Στο τέλος του μαθήματος αυτού ευελπιστεί κανείς να είναι σε θέση να κατανοήσει τη εκτενή βιβλιογραφία του αντικειμένου, να μπορεί να ακολουθήσει πιο εξειδικευμένα μαθήματα και να ξεκινήσει την εφαρμογή του CFD για ειδικές εφαρμογές του ενδιαφέροντος του.



Σχήμα 1.2: Υπολογισμός της κατανομής πίεσης κατά μήκος της πτέρυγας του διαστημικού λεωφορείου

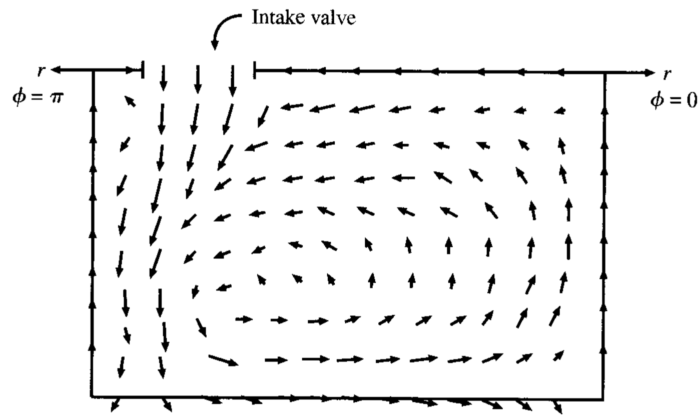


Σχήμα 1.3: Υπολογισμός των δινών του χείλους προσφυγής πτέρυγας σχήματος δέλτα με τη χρήση των εξισώσεων του Euler

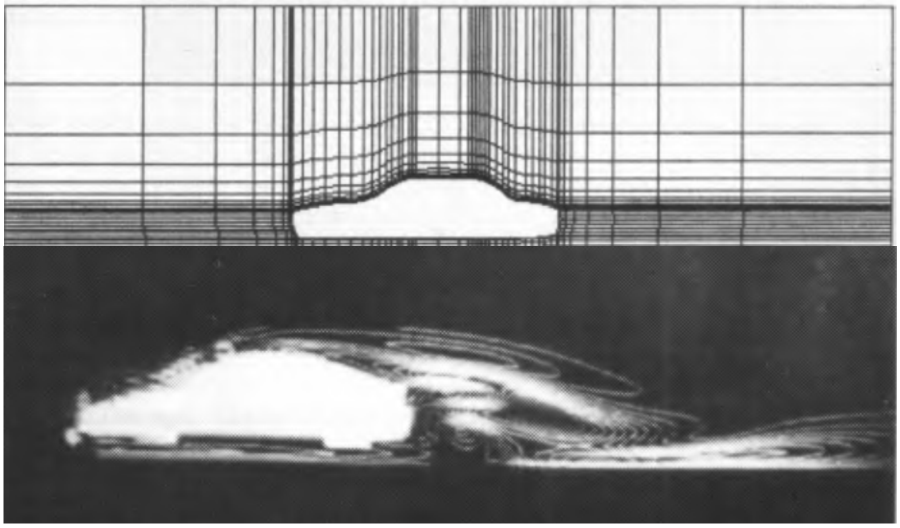


Σχήμα 1.4: Υπολογισμός του ροϊκού πεδίου γύρω από αυτοκίνητο που έλκει τροχόσπιτο

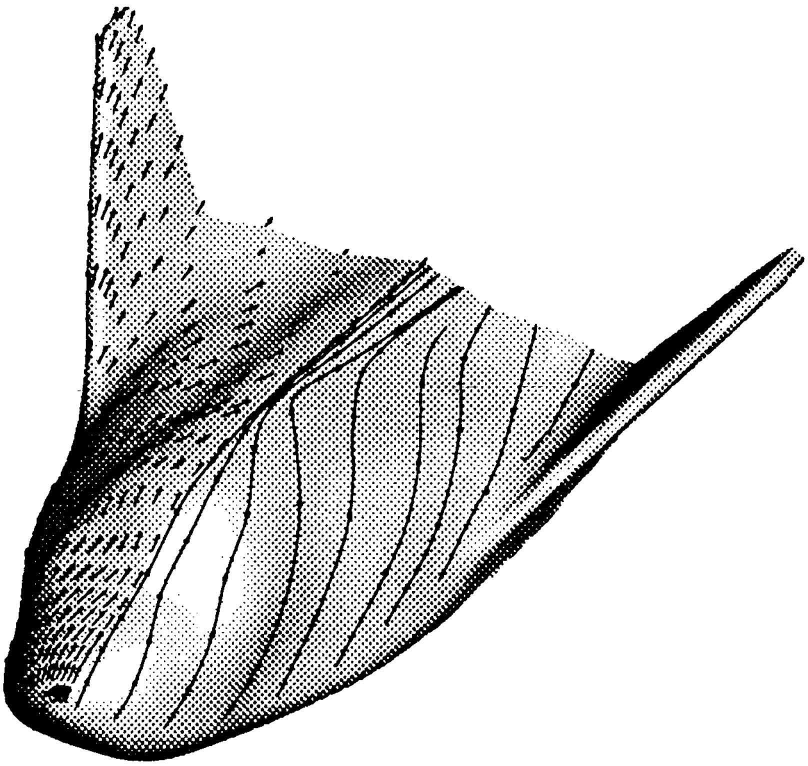
Σχήμα 1.5: Υπολογισμός ροϊκού πεδίου ταχυτήτων στο εσωτερικό κτιρίου που θερμαίνεται κατά τη διάρκεια του χειμώνα



Σχήμα 1.6: Υπολογισμός ροϊκού πεδίου ταχυτήτων εντός κυλίνδρου Μ.Ε.Κ. όταν το έμβολο βρίσκεται στο Κ.Ν.Σ. της διαδρομής του



Σχήμα 1.7: (Άνω) Υπολογιστικό πλέγμα και (κάτω) ροϊκό πεδίο γύρω από αυτοκίνητο καθώς αυτό κινείται προς τα αριστερά

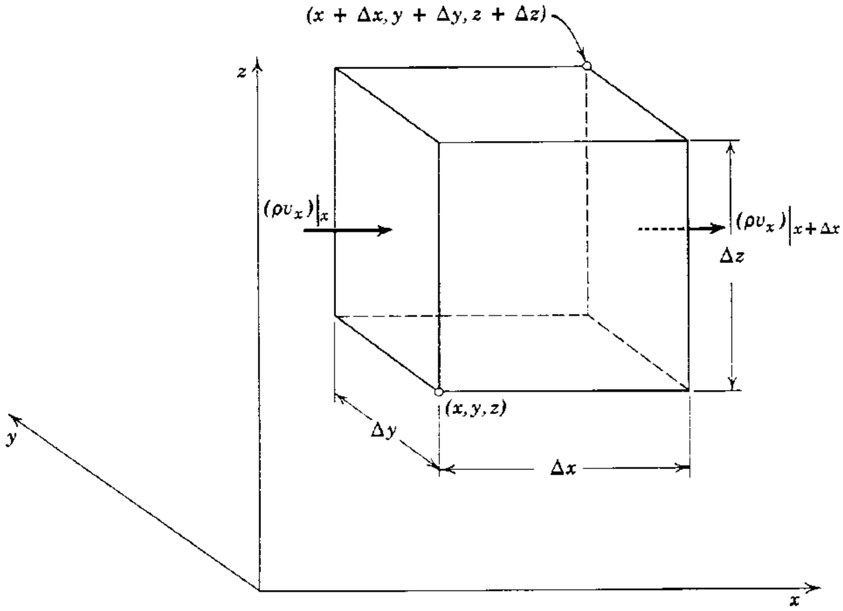


Σχήμα 1.8: Υπολογισμός ροϊκών γραμμών και διανυσμάτων ταχύτητας γύρω από υπερ-υπερηχητικό τρισδιάστατο σώμα

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

2.1 Εξίσωση της συνέχειας

Η εξίσωση της συνέχειας ή διατήρηση της μάζας, προκύπτει αν θεωρήσουμε το ισοζύγιο μάζας σε ένα στοιχειώδη όγκο ελέγχου που ανήκει σε ένα ρευστό. Ο όγκος ελέγχου έχει διαστάσεις $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ όπως στο παρακάτω σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Διατήρηση της μάζας σε ένα στοιχειώδη όγκο $\Delta x \Delta y \Delta z$

Η διατήρηση της μάζας του ρευστού που διέρχεται από τον στοιχειώδη όγκο $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ εκφράζεται ως:

$$\begin{bmatrix} Συσσώρευση \\ μάζας\ ανά \\ μονάδα\ χρόνου \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Εισερχόμενη \\ μάζα \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Εξερχόμενη \\ μάζα \end{bmatrix} \tag{1}$$

Αρχικά θεωρούμε τις δύο πλευρές του στοιχειώδους όγκου που είναι κάθετες στον άξονα x. Η μεταβολή της μάζας του ρευστού που περνά από τη πλευρά στο σημείο x είναι $(\rho u_x)|_x\ \Delta y \Delta z$ ενώ η μεταβολή της μάζας του ρευστού που περνά από τη πλευρά στο σημείο $x + \Delta x$ είναι $(\rho u_x)|_{x+\Delta x}\ \Delta y \Delta z$. Παρόμοιες εκφράσεις μπορούν να εξαχθούν για τις δύο πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα y και για τις υπόλοιπες δύο πλευρές που είναι κάθετες στον άξονα z. Η συσσώρευση μάζας στη μονάδα του χρόνου εντός του στοιχειώδους όγκου είναι $(\Delta x \Delta y \Delta z)({}^{\partial \rho}/_{\partial t})$. Έτσι το ισοζύγιο μάζας γίνεται:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z\left[(\rho u_x)_x - (\rho u_x)_{x+\Delta_x}\right] +$$

$$\Delta x \Delta z\left[(\rho u_y)_y - (\rho u_y)_{y+\Delta_y}\right] + \Delta x \Delta y\left[(\rho u_z)_z - (\rho u_z)_{z+\Delta_z}\right] \tag{2}$$

Η εξίσωση της συνέχειας σε διαφορική μορφή μπορεί να γραφεί σαν:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] \tag{3}$$

Η ίδια εξίσωση σε πιο συμπυκνωμένη μορφή με τη χρήση του τελεστή ανάδελτα (∇) γράφεται ως:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\vec{\nabla}\rho\vec{u}) \qquad (4)$$

Η ποσότητα $\overline{(\vec{\nabla}\rho\vec{u})}$ ονομάζεται *«απόκλιση»* (divergence) του $\rho\vec{u}$ και γι'αυτό μερικές φορές η προηγούμενη εξίσωση εμφανίζεται σαν:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\ \rho\vec{u}$$

Ο ορισμός της απόκλισης $\overline{(\vec{\nabla}\rho\vec{u})}$ είναι:

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}$$

Αναλύοντας το δεξί μέρος της εξίσωσης (3) παίρνουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \qquad (5)$$

Το αριστερό μέρος της προηγούμενης εξίσωσης ονομάζεται *ουσιαστική παράγωγος* (substantial derivative) της πυκνότητας ρ και εκφράζει τη χρονική παράγωγο της διαδρομής που ακολουθεί τη κίνηση του ρευστού. Έτσι η εξίσωση της συνέχειας παίρνει τη μορφή:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\vec{\nabla}\rho\vec{u}) \qquad (6)$$

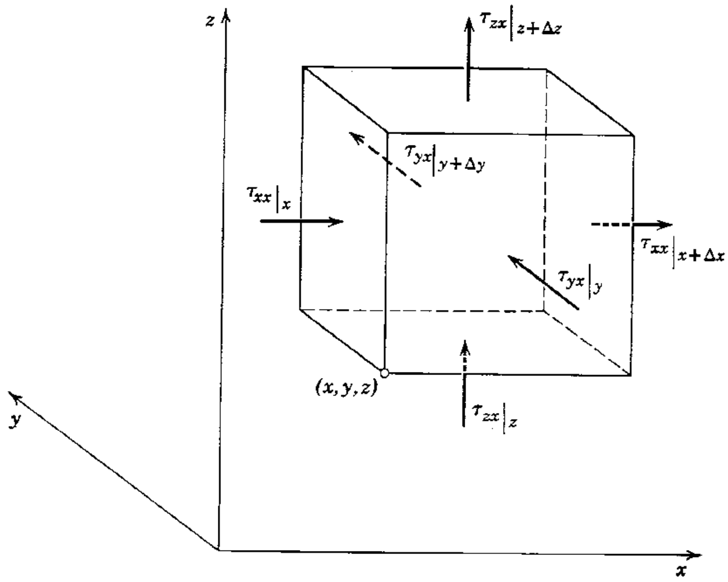
Για ασυμπίεστη και μόνιμη ροή, η πυκνότητα είναι σταθερή πράγμα που σημαίνει ότι

$$\rho = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \;\; => \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 => \vec{\nabla}\vec{u} = 0 \qquad (6\alpha)$$

2.2 Εξισώσεις κίνησης (ορμής)

Θεωρώντας ένα στοιχειώδη όγκο ελέγχου διαστάσεων $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ όπως στο παρακάτω σχήμα 2.2, γράφουμε την εξίσωση διατήρησης της ορμής με το ίδιο σκεπτικό σαν αυτό του προηγούμενου εδαφίου όπου παρουσιάστηκε το ισοζύγιο μάζας:

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{Συσσώρευσης} \\ \text{Ορμής} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{Εισερχόμενης} \\ \text{Ορμής} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{Εξερχόμενης} \\ \text{Ορμής} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Άθροισμα των} \\ \text{Δυνάμεων που} \\ \text{ενεργούν στο σύστημα} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 2.2: Διατήρηση της ορμής σε ένα στοιχειώδη όγκο $\Delta x \Delta y \Delta z$

Ο ρυθμός εισόδου της x-συνιστώσας της ορμής λόγω μεταφοράς στην μονάδα του χρόνου στο σημείο x είναι:

$$\rho u_x u_x|_x \Delta y \Delta z$$

στον όγκο $\Delta x \Delta y \Delta z$ από την επιφάνεια κάθετη στον άξονα x στο σημείο *(x,y,z)*.

Ο ρυθμός εξόδου ορμής λόγω μεταφοράς στο σημείο $x + \Delta x, \Delta y, \Delta z$ είναι :

$$\rho u_x u_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z.$$

Ο ρυθμός εισόδου ορμής από μοριακή μεταφορά στο σημείο x,y,z είναι :

$$\tau_{xx}|_{\,x} \Delta y \Delta z$$

Ο ρυθμός εξόδου ορμής από μοριακής μεταφοράς στο σημείο $x + \Delta x, \Delta y, \Delta z$ είναι :

$$\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$$

όπου τ_{xx} είναι η ορθή τάση στον όγκο $\Delta x \Delta y \Delta z$. Με παρόμοια συλλογιστική τ_{yx} είναι η διατμητική τάση στην επιφάνεια y. Ο ρυθμός εισόδου στο σημείο y είναι:

$$\tau_{yx}|_{\,y} \Delta x \Delta z$$

και ο ρυθμός εξόδου στο σημείο $y + \Delta y$ είναι:

$$\tau_{yx}|_{\,y+\Delta y} \Delta x \Delta z$$

Έτσι η εξίσωση της ορμής στη x διεύθυνση γίνεται :

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Με τον ίδιο τρόπο για τις διευθύνσεις y και z έχουμε:

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_y)}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_z)}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

- Οι ποσότητες $\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z$ εκφράζουν την ορμή στη μονάδα του όγκου του ρευστού στις διευθύνσεις *x,y,z* αντίστοιχα.

- Οι ποσότητες g_x, g_y, g_z εκφράζουν τις συνιστώσες της επιτάχυνσης της βαρύτητας στις διευθύνσεις *x,y,z*.

- Οι ποσότητες $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$ εκφράζουν τη βαθμίδα πίεσης στις διευθύνσεις *x,y,z*.

- Οι ποσότητες $\rho u_x u_x$, $\rho u_x u_y$, $\rho u_x u_z$ κλπ είναι οι 9 συντελεστές της ορμής λόγω μεταφοράς μάζας $\rho\vec{u}\vec{u}$ που είναι το δυαδικό γινόμενο $\rho\vec{u}$ $\varepsilon\pi\acute{\iota}$ $\vec{u}$.

- Όμοια οι ποσότητες $\tau_{xy}, \tau_{xx}, \tau_{xz}$ κλπ είναι οι 9 συντελεστές του τανυστή τάσεων τ.

Οι παραπάνω 3 εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν σε συμπυκνωμένη μορφή:

$$\underset{(1)}{\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t}} = \underset{(2)}{-[\vec{\nabla}\rho\vec{u}\vec{u}]} \underset{(3)}{-\vec{\nabla}P} \underset{(4)}{-[\vec{\nabla}\vec{\tau}]} \underset{(5)}{+\rho\vec{g}}$$

Η φυσική σημασία των όρων της παραπάνω εξίσωσης είναι:
(1): Χρονική Μεταβολή της ορμής ανά μονάδα όγκου.
(2): Μεταβολή της ορμής λόγω μεταφοράς ανά μονάδα όγκου.
(3): Δυνάμεις πίεσης ανά μονάδα όγκου.
(4): Μεταβολή της ορμής λόγω ιξώδους μεταφοράς ανά μονάδα όγκου.
(5): Δυνάμεις βαρύτητας ανά μονάδα όγκου.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ουσιαστικής παραγώγου, η εξίσωση της ορμής γίνεται:

$$\underset{(1)}{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}} = \underset{(2)}{-\vec{\nabla}P} \underset{(3)}{-[\vec{\nabla}\vec{\tau}]} \underset{(4)}{+\rho\vec{g}}$$

Η φυσική σημασία των όρων της παραπάνω εξίσωσης είναι:
(1): Μάζα ανά μονάδα όγκου επί επιτάχυνση
(2): Δυνάμεις πίεσης στο στοιχείο ανά μονάδα όγκου
(3): Δυνάμεις ιξώδους ανά μονάδα όγκου.
(4): Δυνάμεις βαρύτητας ανά μονάδα όγκου.

Τα παραπάνω μας θυμίζουν τον νόμο του Νεύτωνα που λέει ότι:

$$\boxed{Μάζα \ * \ Επιτάχυνση \ = Άθροισμα \ δυνάμεων}$$

Για να προσδιοριστούν οι συνιστώσες των ταχυτήτων σαν επίλυση των εξισώσεων κίνησης εισάγονται οι ακόλουθες εξισώσεις για τις ορθές και διατμητικές τάσεις τ, που ισχύουν <u>μόνο</u> για νευτωνικά ρευστά:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\vec{V}\vec{u})$$
$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$
$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xy} = -\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$$

Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τη κατά στατική εξίσωση του ρευστού που είναι μορφής *P=P(ρ)* και τη εξίσωση που συνδέει το ιξώδες με την πυκνότητα του ρευστού *μ=μ(ρ)* όπως επίσης και της οριακές συνθήκες και της αρχικές συνθήκες του κάθε προβλήματος αρκούν για να προσδιορίσουν τη πυκνότητα, πίεσης και της τρείς συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού.

(i) Για **ασυμπίεστη ροή** ($\rho = σταθερή\ σε\ όλο\ το\ ροϊκό\ πεδίο$) οι εξισώσεις Navier Stokes παίρνουν τη μορφή:
(α) Η εξίσωση της συνέχειας δίνει: $\vec{\nabla}\vec{u} = 0$
(β) Η εξίσωση της ορμής δίνει: $\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \mu\overrightarrow{\nabla^2}\vec{u} + \rho\vec{g}$
όπου ο τελεστής $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ονομάζεται τελεστής Laplace ή Λαπλασιανή

(ii) Για **ροή δίχως τριβή** οι Navier stokes παίρνουν τη μορφή:

Τότε $\vec{\nabla}\vec{\tau} = 0$ και οι εξισώσεις γίνονται :

(α) Η εξίσωση μάζας παραμένει αμετάβλητη $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\vec{\nabla}\vec{u})$

(β) Η εξίσωση της ορμής δίνει

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}$$

που είναι το σύστημα εξισώσεων Euler.

2.3 Η εξίσωση της ενέργειας

Το πρώτο Θερμοδυναμικό αξίωμα για τη περίπτωση ενός ανοικτού θερμοδυναμικού συστήματος μπορεί να γραφεί για ένα στοιχειώδη όγκο ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \textit{Μεταβολή εσωτερικής} \\ \textit{και κινητικής ενέργειας} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \textit{Εισροή εσωτερικής} \\ \textit{και κινητικής ενέργειας} \\ \textit{από συναγωγή} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \textit{Εκροή εσωτερικής} \\ \textit{και κινητικής ενέργειας} \\ \textit{από συναγωγή} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textit{Προσθήκη θερμότητας} \\ \textit{από αγωγή} \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} \textit{Παραγόμενο έργο} \\ \textit{απο το περιβάλλον} \\ \textit{του ρευστου} \end{bmatrix}$$

Η κινητική ενέργεια αντιστοιχεί στην ποσότητα $\frac{1}{2}\rho u^2$, δηλαδή συνδέεται με τη κίνηση του ρευστού.
Η εσωτερική ενέργεια αντιστοιχεί σε τυχαίες εσωτερικές κινήσεις των μορίων του ρευστού συν την ενέργεια από αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μορίων του ρευστού και εξαρτάται από θερμοκρασία και την πυκνότητα του.
Για την εξαγωγή της εξίσωσης της ενέργειας ακολουθείται παρόμοιο σκεπτικό με αυτό της εξίσωσης της ορμής.
Έτσι λαμβάνουμε :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\widehat{U} + \frac{1}{2}u^2\right) = -\left[\vec{V}\rho\vec{u}\left(\widehat{U} + \frac{1}{2}u^2\right)\right] - (\vec{\nabla}\vec{q}) + \rho(\vec{u}\vec{g}) - (\vec{\nabla}P\vec{u}) - (\vec{V}[\vec{\tau}\vec{u}])$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Η φυσική σημασία των παραπάνω όρων είναι:

(1) Μεταβολή ενέργειας ανά μονάδα όγκου
(2) Εισροή ενέργειας λόγω συναγωγής
(3) Εισροή ενέργειας λόγω αγωγής
(4) Παραγόμενο έργο από δυνάμεις βαρύτητας
(5) Παραγόμενο έργο από δυνάμεις πίεσης
(6) Παραγόμενο έργο από δυνάμεις τριβής

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ουσιαστικής παραγώγου, η εξίσωση της ενέργειας γίνεται :

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\vec{\nabla}\vec{q}) - P(\vec{V}\vec{u}) - (\vec{\tau}:\vec{V}\vec{u})$$

(1) (2) (3) (4)

(1) : Μεταβολή εσωτερικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου.
(2) : Μεταβολή εισροής εσωτερικής ενέργειας ανά μονάδα όγκο
(3) : Αντιστρεπτή μεταβολή εσωτερικής ενέργειας λόγω συμπίεσης ανά μονάδα όγκου.
(4) : Αναντιστρεπτή μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας λόγω ιξώδους διάχυσης ανά μονάδα όγκου.

Χρησιμοποιώντας από τη Θερμοδυναμική ότι :

$$d\hat{U} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T}\right)_v dT = \left[-P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v\right] dV + C_v dT$$

και ότι με τη βοήθεια της εξίσωσης της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = P \frac{D\left(1/g\right)}{D_t} = -\frac{1}{g}\frac{Dg}{Dt} = (\vec{V}\vec{u})$$

Η εξίσωση της ενέργειας μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας T για ένα νευτωνικό ρευστό με σταθερή θερμική αγωγιμότητα, ως εξής:

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k\overrightarrow{\nabla^2}T - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p (\vec{\nabla}\vec{u}) + \mu\Phi_v$$

(1) (2) (3)

Η φυσική σημασία της εξίσωσης αυτής είναι ότι η θερμοκρασία ενός κινούμενου ρευστού μεταβάλλεται από:
(1) φαινόμενα συναγωγή θερμότητας (με τον όρο $k\overrightarrow{\nabla^2}T$), (2) φαινόμενα εκτόνωσης (με τον όρο $T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p (\vec{\nabla}\vec{u})$) (3) ιξώδη θερμότητα (με τον όρο $\mu\Phi_v$). Ο όρος Φ_v είναι γνωστός σαν όρος διάχυσης (dissipation term) και ορίζεται σαν :

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 +$$
$$\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2$$

2.4 Απλοποιημένες μορφές της εξίσωσης της ενέργειας

Τρείς απλοποιημένες μορφές της εξίσωσης της ενέργειας χρησιμοποιούνται ευρέως και θα αναφερθούν παρακάτω. Σε όλες αυτές τιε απλοποιημένες μορφές παραλείπεται ο όρος διάχυσης. Στις μορφές αυτές υποθέτουμε επίσης σταθερή θερμική αγωγιμότητα.
(α) Για ένα ιδανικό αέριο ισχύει ότι:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p = \frac{P}{T}$$

Έτσι για τη περίπτωση ιδανικού αερίου έχουμε ότι:

$$C_v \frac{DT}{Dt} = k\overrightarrow{\nabla^2}T - P(\vec{\nabla}\vec{u})$$

(β) Για ένα ρευστό που βρίσκεται υπό σταθερή πίεση, η εσωτερική του ενέργεια δίνεται από την εξίσωση:

$$\widehat{U} = -PdV + C_v dT$$

και η εξίσωση της ενέργειας γίνεται:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k\overrightarrow{\nabla^2}T$$

(δ) Για στερεά, θεωρούμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή και μπορούμε να γράψουμε ότι $\vec{u} = 0$. Έτσι η εξίσωση της ενέργειας γίνεται:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\overrightarrow{\nabla^2}T$$

2.5 Αδιαστατοποίηση εξισώσεων

Σαν αδιάστατο μέγεθος ορίζεται το πηλίκο του μεγέθους με διαστάσεις διά ενός χαρακτηριστικού μεγέθους αναφοράς. Το αδιάστατο μέγεθος είναι καθαρός αριθμός δηλαδή δεν έχει μονάδες μέτρησης:

$$Αδιάστατο\ μέγεθος = \frac{Μέγεθος\ με\ διαστάσεις}{Χαρακτηριστικό\ μέγεθος\ αναφοράς}$$

Από την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων, προέκυψαν οι ακόλουθοι αδιάστατοι αριθμοί.

$$R_e = \frac{Du\rho}{\mu} = \frac{Δυνάμεις\ Αδράνειας}{Δυνάμεις\ Τριβής} = \frac{\frac{\rho u^2}{D}}{\frac{\mu u}{D^2}}$$

$$F_r = \frac{u^2}{gD} = \frac{Δυνάμεις\ Αδράνειας}{Δυνάμεις\ Βαρύτητας} = \frac{\frac{\rho u^2}{D}}{\rho g}$$

$$P_r = \frac{\mu Cp}{k} = \frac{Παραγόμενη\ θερμότητα\ από\ τριβή}{Παραγόμενη\ θερμότητα\ από\ συναγωγή}$$

$$B_r = \frac{\mu u^2}{k(T_1 - T_0)} = \frac{Παραγόμενη\ θερμότητα\ από\ ιξώδη\ διάχυση}{Παραγόμενη\ θερμότητα\ από\ αγωγημότητα}$$

$$E_{ec} = \frac{\frac{\rho C_p u(T_0 - T_1)}{D}}{\frac{k(T_0 - T_1)}{D^2}} = \frac{Μεταφορά\ θερμότητας\ από\ φαινόμενο\ μεταφορας}{Μεταφορά\ θερμότητας\ από\ φαινόμενο\ αγωγής}$$

Σε πολλά βιβλία ο λόγος $\frac{B_r}{P_r} = \frac{u^2}{Cp(T_1-T_0)}$ ορίζεται σαν αδιάστατος αριθμός *Eckert, Ec*.

Επίσης συχνά συναντάται ο αριθμός Mach.

$$M = \frac{u}{a} = \frac{u}{\sqrt{\gamma RT^0}} = \frac{Ταχύτητα\ του\ ρευστού}{Ταχύτητα\ του\ ήχου\ κάτω\ από\ τις\ ίδιες\ συνθήκες}$$

Η εξίσωση συνέχειας παραμένει αμετάβλητη, δεν μπορεί να απλοποιηθεί, διότι εκφράζει τη διατήρηση της μάζας σε έναν όγκο ελέγχου στο ρευστό. Άρα:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = 0$$

Οι εξισώσεις της ορμής με την εισαγωγή αδιάστατων αριθμών γίνονται:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{Re}\,\vec{\nabla}^2\vec{u} - \nabla P + \frac{1}{Fr}\rho g$$

(α) Για ρευστό με αμελητέο βάρος ο αριθμός Froude τείνει στο άπειρο, $Fr \to \infty$ και
(β) Για ρευστό με πολύ μικρό ιξώδες ο αριθμός Reynolds τείνει στο άπειρο, $Re \to \infty$

Μετά από αυτές τις θεωρήσεις οι εξισώσεις της ορμής για ρευστό με πολύ μικρό ιξώδες και αμελητέο βάρος, λαμβάνουν τη μορφή:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}P$$

Δηλαδή τη στιγμή που $\frac{1}{Re} \to 0$ ουσιαστικά αμελούνται οι όροι εσωτερικού ιξώδους (τριβής) των εξισώσεων. Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις του Euler οι οποίες δεν περιλαμβάνουν τους όρους τριβής.

Με την εισαγωγή αδιάστατων αριθμών, η εξίσωση της ενέργειας γίνεται:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Re \cdot Pr}\,\vec{\nabla}^2 T + \frac{Br}{Re \cdot Pr}\Phi_v$$

για πολύ μεγάλους αριθμούς Reynolds, $Re \to \infty$ λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{DT}{Dt} = 0$$

2.6 Ολοκληρωτική μορφή του συστήματος Navier-Stokes

Στα προηγούμενα εδάφια έχουμε αναλύσαμε μεμονωμένα τους νόμους διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας (conservative laws, συντηρητικούς νόμους). Τώρα, μπορούμε να τους εντάξουμε όλους σε ένα ενιαίο σύστημα εξισώσεων, με σκοπό να αποκτήσουμε μια συνολική εικόνα των συσχετιζόμενων όρων. Η διαφορική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes προήλθε από την εφαρμογή της διατήρησης μάζας, ορμής κι ενέργειας σε ένα στοιχειώδη όγκο διαστάσεων ΔxΔyΔz, ενώ η ολοκληρωτική μορφή που παρουσιάζουμε εδώ εφαρμόζεται δια ολόκληρο τον όγκο ελέγχου στο χώρο. Για λόγους που θα εξηγηθούν αργότερα, θα εντάξουμε δύο διανύσματα αριθμητικών ροών, ονόματι $\vec{F}_C$ και $\vec{F}_V$. Το πρώτο, $\vec{F}_C$, σχετίζεται με κατακόρυφη μεταφορά ποσοτήτων του ρευστού λόγω αδράνειας. Συχνά χαρακτηρίζεται διάνυσμα ροών συναγωγής. Το δεύτερο διάνυσμα αριθμητικών ροών – διάνυσμα του ιξώδους των αριθμητικών ροών $\vec{F}_V$, συμπεριλαμβάνει τόσο τις διατμητικές τάσεις όσο και τη θερμική διάχυση. Επιπλέον, διευκρινίζουμε εδώ τον όρο $\vec{Q}$, ο οποίος περιλαμβάνει όλες τις πηγές έντασης λόγω των δυνάμεων του σώματος και της θερμότητας. Λαμβάνοντας όλα αυτά υπόψη μας, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις διατήρησης στη παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F_c - F_v) dS = \oint_{\Omega} \vec{Q}\, d\Omega$$

Το διάνυσμα της αποκαλούμενης συντηρητικής μεταβλητής $\vec{U}$, απαρτίζεται σε τρεις διαστάσεις από τα ακόλουθα πέντε στοιχεία:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \upsilon \\ \rho \omega \\ \rho E \end{bmatrix}$$

Για το διάνυσμα των ροών συναγωγής και για το διάνυσμα των ροών διάχυσης έχουμε αντίστοιχα:

$$\vec{F_c} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_z p \\ \rho \upsilon V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho H V \end{bmatrix} \qquad \vec{F_v} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_z T_{zz} + n_y T_{zy} + n_z T_{zz} \\ n_y T_{yz} + n_y T_{yy} + n_z T_{yz} \\ n_z T_{zz} + n_y T_{zy} + n_z T_{zz} \\ n_x \Theta_z + n_z \Theta_y + n_x \Theta_z \end{bmatrix}$$

Με την ταχύτητα V – η ταχύτητα κάθετη στην επιφάνεια του στοιχείου dS – καθορίζεται ως γινόμενο της διανυσματικής ταχύτητας και του κάθετου διανύσματος, δηλαδή

$$V \equiv \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} = n_z u + n_y \upsilon + n_z w$$

όπου

$$\Theta_x = uT_{zx} + uT_{zy} + wT_{xz} + k\frac{\partial T}{\partial x}$$
$$\Theta_y = uT_{yz} + \upsilon T_{yy} + wT_{yz} + k\frac{\partial T}{\partial y}$$
$$\Theta_z = uT_{zz} + \upsilon T_{zy} + wT_{zz} + k\frac{\partial T}{\partial z}$$

είναι οι όροι που περιγράφουν την πίεση του ιξώδες και τη θερμική αγωγιμότητα στα ρευστά. Τελικά ο πηγιαίος όρος (source term) είναι:

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{c,x} \\ \rho f_{c,y} \\ \rho f_{c,z} \\ \rho \vec{f_c} \cdot \vec{\upsilon} + \dot{q} \end{bmatrix}$$

Στη περίπτωση ενός Νευτονικού ρευστού το παραπάνω σύστημα εξισώσεων ονομάζεται Navier-Stokes. Περιγράφει την μεταβολή της μάζας, της ορμής και της ενέργειας μέσω του ορίου $d\Omega$ του όγκου ελέγχου Ω το οποίο καθορίζεται έτσι.
Σε μερικές περιπτώσεις, για παράδειγμα σε εφαρμογές στροβιλομηχανών ή στην γεωφυσική, η ελεγχόμενη ταχύτητα αντιστρέφεται (σταθερά συνήθως), για κάποιο άξονα. Σε μια τέτοια περίπτωση οι εξισώσεις Navier-Stokes μετατρέπονται σε μια σύνθετη αντιστρεπτή πράξη και ως συνέπεια ο όρος $\vec{Q}$ πρέπει να επεκταθεί από τα αποτελέσματα λόγω του φαινομένου Coriolis και της φυγοκεντρικής δύναμης. Σε άλλες περιπτώσεις ο όγκος ελέγχου μπορεί να είναι θέμα για μετάφραση η παραμόρφωση. Τότε οι εξισώσεις Navier-Stokes θα πρέπει να επεκταθούν από έναν όρο, τον οποίο να περιγράφει μια οικεία κίνηση του επίπεδου στοιχείου dS με βάση το σύστημα συντεταγμένων.
Οι εξισώσεις Navier-Stokes εκφράζουν σε τρεις διαστάσεις ένα σύστημα πέντε εξισώσεων για τις πέντε συντηρητικές μεταβλητές $\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E$. Αλλά περιέχουν και επτά άγνωστες μεταβλητές πεδίων ροής, ονόματι ρ, u, v, w, E, P και T. Επιπλέον, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε δύο επιπλέον εξισώσεις, οι οποίες θα πρέπει να έχουν θερμοδυναμικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών καταστάσεων, όπως για παράδειγμα η πίεση ως μια συνάρτηση της πυκνότητας και της θερμοκρασίας, και η εσωτερική ενέργεια ή η ενθαλπία σαν μία συνάρτηση πίεσης και θερμοκρασίας. Πέρα από αυτό θα πρέπει να ορίσουμε το συντελεστή ιξώδους μ, και το συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας k, σαν μία συνάρτηση της κατάστασης του ρευστού, με σκοπό να ολοκληρωθεί το συνολικό σύστημα των εξισώσεων. Προφανώς, οι σχέσεις εξαρτώνται από το είδος του ρευστού που εξετάζεται. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε μεθόδους ολοκλήρωσης των εξισώσεων για δύο επιμέρους περιπτώσεις.

Στην αεροδυναμική, είναι γενικά εύλογο να υποθέτουμε πως ένα ρευστό συμπεριφέρεται όπως ένα θερμικά τέλειο αέριο, για το οποίο η καταστατική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$P = \rho \cdot R \cdot T$$

όπου το R δηλώνει την ορισμένη σταθερά του αερίου. Για ιδανικό αέριο, η ενθαλπία ορίζεται από τη σχέση:

$$h = c_p \cdot T$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την πίεση συναρτήσει των συντηρητικών μεταβλητών:

$$R = c_p - c_v, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Τελικά η πίεση συνδυάζεται με την εσωτερική ενέργεια και τις συνιστώσες της ταχύτητας με τη σχέση:

$$P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \left[E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right]$$

Η θερμοκρασία τότε υπολογίζεται με την βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης. Ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους μ που είναι για τα τέλεια αέρια εξαρτάται πολύ από την θερμοκρασία και ελάχιστα από την πίεση. Γίνεται συχνή χρήση της εξίσωσης του Sutherland. Το αποτέλεσμα για αέρα σε πρότυπες συνθήκες (μονάδες S.I), είναι για παράδειγμα:

$$\mu = \frac{1.45 T^{3/2}}{T + 110} \cdot 10^{-6}$$

όπου η θερμοκρασία T είναι σε βαθμούς Kelvin (K). Για $T=288K$ βρίσκουμε ότι μ=1.78·10^{-5}kg/ms. Η θερμική αγωγιμότητα k μοιάζει με αύτη του ιξώδους μ στην περίπτωση των αερίων. Αντίθετα το k είναι περίπου σταθερό στην περίπτωση των υγρών. Για το λόγο αυτό η σχέση

$$k = c_p \frac{\mu}{Pr}$$

χρησιμοποιείται γενικευμένα για τον αέρα. Επιπλέον, είναι γενικώς αποδεκτό ότι ο αριθμός Prandtl , *Pr,* είναι σταθερός σε ολόκληρο το πεδίο ροής. Για τον αέρα, ο αριθμός Prandtl παίρνει την τιμή *Pr=0.72*

2.7 Απλοποιημένες μορφές των εξισώσεων Navier-Stokes

Η πιο γενική περιγραφή της ροής ενός ρευστού δίνεται από το πλήρες σύστημα εξισώσεων των Navier-Stokes. Σε αυτές τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, οι νόμοι διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας (εφεξής: συντηρητικοί νόμοι) για τα τρία βασικά ροϊκά μεγέθη $\left(\rho, \rho\cdot\vec{u}, \rho\cdot E\right)$ μπορεί να γραφούν σε μια συμπαγή μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = Q$$

Η παραπάνω εξίσωση ορίζει ένα διάνυσμα-στήλη (5x1) $\vec{U}$ των συντηρητικών μεταβλητών:

$$U = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \rho E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{vmatrix}$$

με καρτεσιανές συντεταγμένες *f, g, h* κάθε μια από αυτές τις συνιστώσες που είναι ένα (5x1) διάνυσμα στήλη. Η δεξιά στήλη περιέχει τους αρχικούς όρους και αυτοί μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ένα (5x1) διάνυσμα στήλη $\vec{Q}$, που ορίζεται ως:

$$Q = \begin{vmatrix} 0 \\ \vec{f_c} \\ W_f + qH \end{vmatrix}$$

Ο όρος $\vec{Q}$, εκφράζει τις επιδράσεις των εξωτερικών δυνάμεων $\vec{f_c}$, από τις πηγές θερμότητας q_H και το έργο που εκτελείται από τις εξωτερικές δυνάμεις $W_f = \rho\vec{f_c}\cdot\vec{v}$. Η ομάδα των παραπάνω εξισώσεων παίρνει τότε την ακόλουθη συνοπτική μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = Q$$

Εκφράζοντας τις εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αποκτάμε την πιο συνοπτική αλγεβρική μορφή:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = Q$$

ή σε μια εναλλακτική συνοπτική μορφή:

$$\partial_t U + \partial_x f + \partial_y g + \partial_z h = Q$$

όπου *u*, *v*, *w* είναι οι *x*, *y*, *z* συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας και το διάνυσμα αριθμητικών ροών ορίζεται από τις συνιστώσες των *f, g, h* (οι δείκτες υποδεικνύουν τις αντίστοιχες καρτεσιανές συνιστώσες):

$$f = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \rho - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xx} \\ \rho uH - (\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v})_x - k\partial_x T \end{vmatrix} \quad g = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho vu - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + \rho - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho uH - (\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v})_y - k\vartheta_y T \end{vmatrix}$$

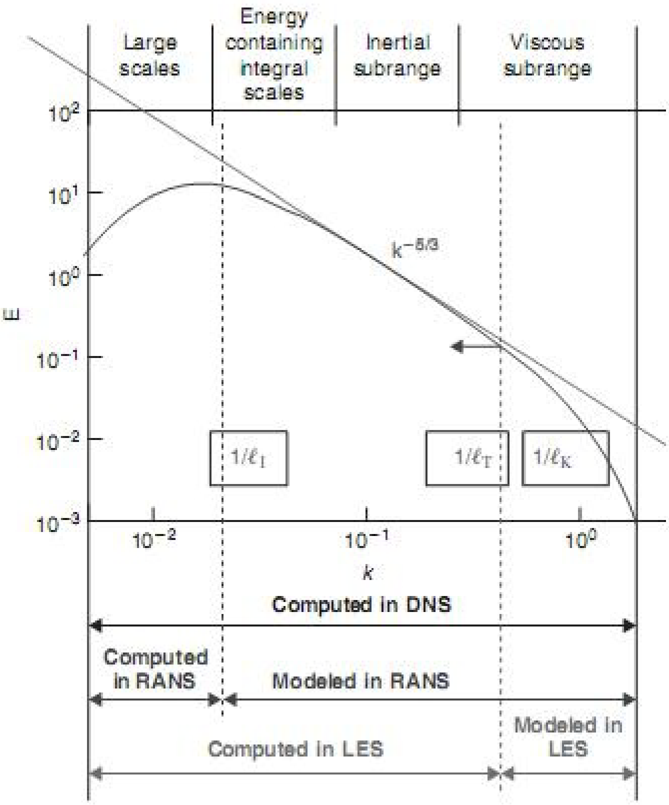
$$h = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho wu - \tau_{zx} \\ \rho wv - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + \rho - \tau_{zz} \\ \rho wH - (\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v})_z - k\vartheta_z T \end{vmatrix}$$

Το σύστημα των εξισώσεων Navier – Stokes είναι έγκυρο για οποιαδήποτε στρωτή ή τυρβώδη ροή οποιουδήποτε υγρού, που ορίζεται από την καταστατική εξίσωση που αφορούν τις διατμητικές τάσεις με τις άλλες μεταβλητές ροής.

Το σχηματικό διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζει τα επίπεδα προσέγγισης που έχουν καταγραφεί και εφαρμόζονται ση Διεθνή Βιβλιογραφία για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes.

2.8 Προσεγγίσεις Τυρβωδών Ροών

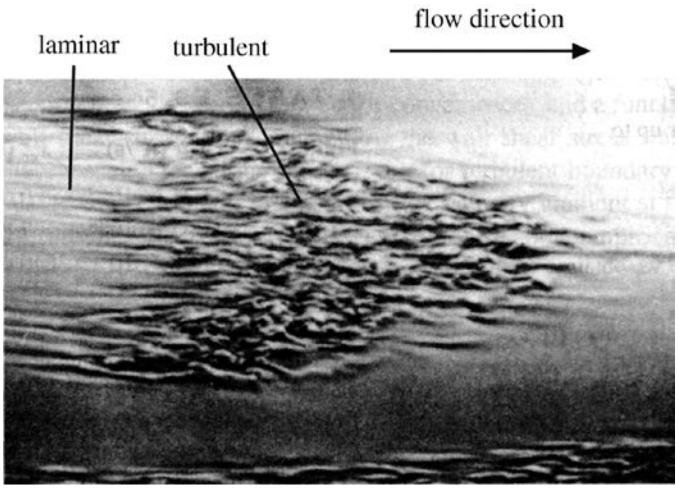
Οι εφαρμογές του CFD σε πραγματικά συστήματα ροής, στη φύση ή στην τεχνολογία, απαιτούν την ικανότητα να διαχειριστούν τυρβώδεις ροές, καθώς αυτές είναι που διέπουν το πραγματικό ροϊκό πεδίο. Ως εκ τούτου πρέπει να υπολογίσουμε τις επιδράσεις της τύρβης στη μέση ροή και αυτό απαιτεί προσεγγιστικά μοντέλα για τις μεθόδους επίλυσης των Navier-Stokes με μέση τιμή κατά Reynolds (RANS), καθώς η Άμεση Αριθμητική Εξομοίωση (DNS) δεν απαιτεί κάτι τέτοιο.
Δυο οικογένειες μοντέλων είναι προς το παρόν διαθέσιμες: μια οικογένεια, ονομαζόμενη **Εξομοίωση Μεγάλων Δινών (LES)** είναι της ίδιας κατηγορίας με την DNS, υπό την έννοια ότι **υπολογίζει άμεσα τις διακυμάνσεις της τύρβης στο χώρο και το χρόνο, αλλά μόνο πάνω από μια συγκεκριμένη κλίμακα μήκους. Κάτω από την κλίμακα αυτή, που ονομάζεται κλίμακα υπό-πλέγματος (subgrid scale), η τύρβη μοντελοποιείται με ημί-εμπειρικούς νόμους.**
Η άλλη οικογένεια, ονομάζεται Navier-Stokes με μέση τιμή κατά Reynolds (RANS), αγνοεί τις διακυμάνσεις της τύρβης και στοχεύει στον υπολογισμό μόνο της μέσης τυρβώδους ροής. Αυτή είναι σίγουρα η πιο διαδεδομένη προσέγγιση στη χρήση του CFD.
Η ιεράρχηση μεταξύ των τριών επιπέδων μοντελοποίησης της τύρβης συνοψίζεται στο παρακάτω σχήμα 2.1, το οποίο δείχνει το ενεργειακό φάσμα της τύρβης σε συνάρτηση με τον αριθμό κύματος *k*, ο οποίος ορίζεται ως $k = 2\pi/\lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος και τα όρια του εύρους της εφαρμογής των μοντέλων LES και RANS.

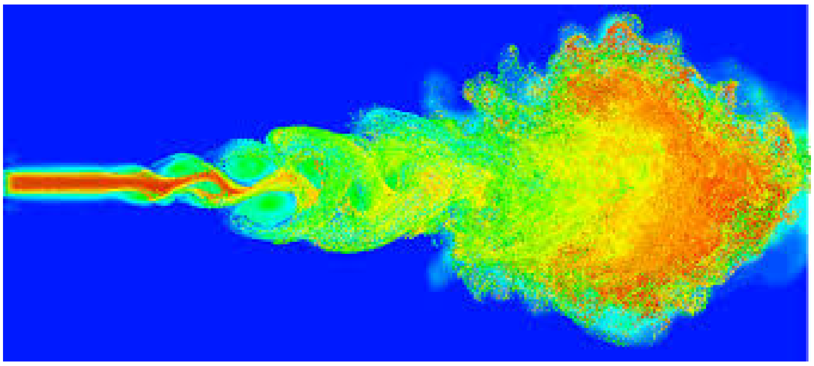


Σχήμα 2.3 Ενεργειακό φάσμα τύρβης σε συνάρτηση με τον αριθμό κύματος k, με ένδειξη του εύρους της εφαρμογής των μεθόδων DNS, LES και RANS. Οι κλίμακες μήκους l_T και l_I σχετίζονται με τις προσεγγίσεις LES και RANS αντίστοιχα.

2.8.1 Άμεση Αριθμητική Εξομοίωση Τυρβωδών Ροών (DNS)

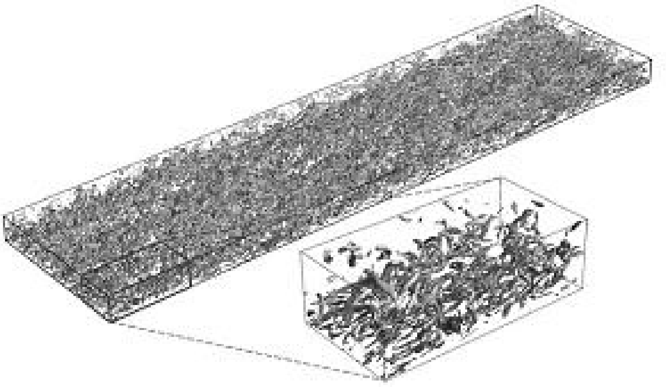
Μια θεμελιώδης ιδιότητα της Μηχανικής των Ρευστών είναι η εμφάνιση τύρβης. Οποιοδήποτε ροϊκό πεδίο θα παραμείνει στρωτό μέχρι μια ορισμένη κρίσιμη τιμή του αριθμού Reynolds, $u \cdot L/\nu$, όπου u και L είναι οι αντιπροσωπευτικές τιμές για τις κλίμακες της ταχύτητας και του μήκους για το συγκεκριμένο σύστημα ροής και ν είναι το κινηματικό ιξώδες (εκφρασμένο σε m/s^2). Πάνω από την κρίσιμη τιμή του αριθμού Reynolds, όλες οι ροές γίνονται τυρβώδεις. Στη συνέχεια χαρακτηρίζονται από την εμφάνιση στατιστικών διακυμάνσεων όλων των μεταβλητών (ταχύτητα, πίεση, πυκνότητα, θερμοκρασία κλπ) γύρω από τις μέσες τιμές τους. Ως εκ τούτου, δεν μπορούν πια να περιγραφούν με προκαθορισμένο τρόπο.





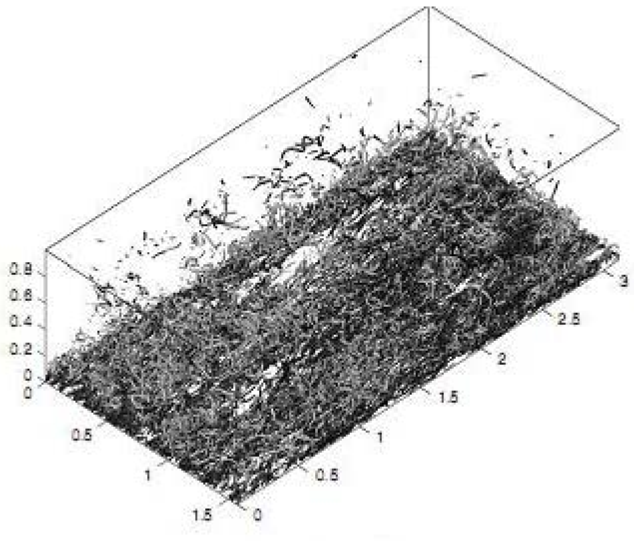
Σχήμα 2.4 Απεικόνιση ροϊκών πεδίων στα οποία η ροή από στρωτή γίνεται τυρβώδης μετά από μία μεταβατική περιοχή.

Ωστόσο, θα μπορούσαν να υπολογιστούν αριθμητικά με άμεση προσομοίωση της τύρβης, με DNS ή σε ένα χαμηλότερο επίπεδο προσέγγισης, με την **"Εξομοίωση Μεγάλων Δινών" (LES), σύμφωνα με την οποία μόνο οι μικρής κλίμακας τυρβώδεις διακυμάνσεις μοντελοποιούνται, ενώ οι μεγάλης κλίμακας διακυμάνσεις υπολογίζονται άμεσα.**
Η Άμεση Αριθμητική Εξομοίωση Τυρβωδών Ροών (DNS) έχεις ως αντικείμενο την προσομοίωση σε υπολογιστή ολόκληρου του εύρους των τυρβωδών στατιστικών διακυμάνσεων σε όλες τις κλίμακες που σχετίζονται με φυσικά μεγέθη. Αυτό είναι τεράστια πρόκληση, η οποία μεγαλώνει καθώς ο αριθμός Reynolds αυξάνεται, δεδομένου ότι **το μέγεθος των μικρότερων τυρβωδών δινών είναι αντιστρόφως ανάλογο του $\boldsymbol{Re^{3/4}}$**, που είναι η γνωστή **κλίμακα $\boldsymbol{Kolmogorov}$** που σχετίζεται με την διάχυση της τύρβης. Αν θέλουμε μια λύση **$\boldsymbol{n}$ σημείων** ανά μονάδα μήκους της μικρότερης δίνης, ο συνολικός αριθμός των σημείων του πλέγματος που απαιτείται, και ο αριθμός των αριθμητικών πράξεων, θα είναι της τάξης $\boldsymbol{n^3 \cdot Re^{9/4}}$. Όπως οι εξισώσεις Navier – Stokes πρέπει να ολοκληρωθούν ως προς το χρόνο, με ένα χρονικό βήμα που καθορίζεται από τις μικρότερες τυρβώδεις χρονικές κλίμακες, που είναι ανάλογες του $Re^{3/4}$, η συνολική υπολογιστική προσπάθεια για DNS προσομοιώσεις είναι ανάλογη του Re^3 για ομογενή τύρβη. Ροές σε τοίχωμα και άλλες ανομοιογενείς περιπτώσεις, είναι ακόμα πιο ακριβές, αφού το πλέγμα θα έπρεπε να προσαρμοστεί στις κλίμακες ανάλυσης δομών κοντά στο τοίχωμα.
Αυτό σημαίνει ότι **αυξάνοντας τον αριθμό Reynolds κατά ένα συντελεστή 10**, απαιτείται μια **αύξηση της υπολογιστικής δύναμης τουλάχιστον κατά ένα συντελεστή 1000 και κατά ένα συντελεστή $\boldsymbol{10^{9/4} = 178}$ για τις αποθηκευτικές απαιτήσεις.** Ως εκ τούτου, οι προσομοιώσεις DNS για ρεαλιστικούς αριθμούς Reynolds της τάξης του 10^5 - 10^7, όπως βρίσκονται σε πολλές βιομηχανικές εξωτερικές ροές γύρω από αεροσκάφη, αυτοκίνητα, κτίρια, ή εσωτερικές ροές σε μηχανές, αντλίες, συμπιεστές, στροβίλους κλπ, είναι ανέφικτες για μεγάλο χρονικό διάστημα με βάση τις τρέχουσες και προβλεπόμενες υπολογιστικές ικανότητες.
Παρόλα αυτά, η DNS είναι ευρέως εφαρμοσμένη ως ένα βασικό εργαλείο έρευνας για καλύτερη κατανόηση των θεμελιωδών μηχανισμών της τύρβης, με στόχο να δημιουργηθεί μια βάση δεδομένων πληροφοριών που θα χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση χαμηλότερου επιπέδου προσέγγισης όπως η LES ή μοντέλα τύρβης για προσομοιώσεις RANS.
Κάποιες από τις πιο προηγμένες προσομοιώσεις DNS έχουν διεξαχθεί από τον J. Jimenez και τους συνεργάτες του στο Πανεπιστήμιο της Μαδρίτης και στο Πανεπιστήμιο του Ιλλινόις (συγκεκριμένα ο R.D. Moser). Οι θεμελιώδεις προσομοιώσεις DNS της τυρβώδους ροής μέσα σε έναν απλό αγωγό παρέχουν πλούτο πληροφοριών για τις βασικές ιδιότητες της τύρβης σε όλες τις κλίμακες.



Σχήμα 2.5: Στιγμιαία αναπαράσταση τυρβώδους ροής από ροή σε αγωγό

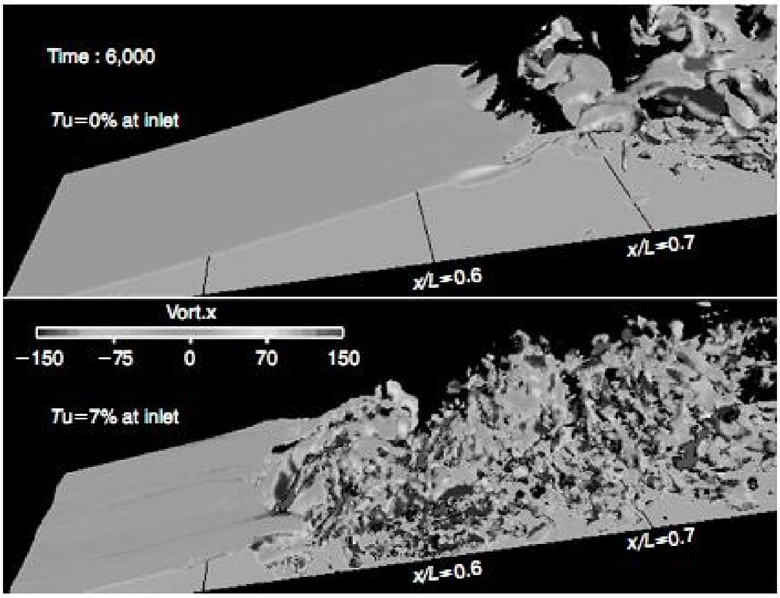
Δεν είναι το κατάλληλο εδάφιο εδώ για να μπούμε σε λεπτομερή συζήτηση των ιδιοτήτων αυτών, αλλά τα σχήματα 2.5 και 2.6 παρέχουν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα εξομοιώσεων DNS, υπό την μορφή απεικόνισης του στιγμιαίου πεδίου διακυμάνσεων της τύρβης και της υποκείμενης δομής της δίνης.
Τα δυο σχήματα αντιστοιχούν σε προσομοιώσεις σε δυο διαφορετικούς αριθμούς Reynolds. Το σχήμα 2.5 έχει ληφθεί για αριθμό Reynolds 47.500 που βασίζεται στο πλάτος του αγωγού και την κεντρική ταχύτητα των για μια τριβή αριθμών Reynolds Re_{tau} (βασισμένη στο μισό πλάτος και στην ταχύτητα τριβής = 950). Οι προσομοιώσεις έχουν πραγματοποιηθεί σε ένα υπολογιστικό πλέγμα με NX x NY x NZ = 1048 x 385 x 1556 = 1.226.847.880 σημεία πλέγματος. Η το πρόγραμμα εκτελέστηκε σε αρκετούς υπολογιστές που άνηκαν στο Υπουργείο Ενέργειας των ΗΠΑ ή στο Σαν Ντιέγκο, κυρίως από την ομάδα του καθηγητή R.D. Moser, μετά στο Πανεπιστήμιο του Ιλλινόις στην Ούρμπανα. Πήρε περίπου 10^6 ώρες επεξεργασίας σε 384 επεξεργαστές SP2/SP3. Το σχήμα επιτρέπει την παρατήρηση της δομής ενιαίων δινών, ενώ η πολυπλοκότητα της ροής έχει επισημανθεί στο κύριο μέρος του σχήματος.



Σχήμα 2.6: Στιγμιαία υλοποίηση πολύπλοκης ομαδοποίησης δινών σε μια τυρβώδη ροή σε αγωγό σε αριθμό Reynolds 100,000 (Re_{tau}=2000).

Το σχήμα 2.6 δείχνει μια παρόμοια εικόνα του στιγμιαίου τυρβώδους πεδίου σε έναν αριθμό Reynolds 100.000 που βασίζεται σε πλάτος αγωγού και σε κεντρική ταχύτητα των (Re_{tau} βασισμένος στο μισό πλάτος του αγωγού και ταχύτητα τριβής = 2000). Οι προσομοιώσεις έχουν πραγματοποιηθεί σε υπολογιστικό πλέγμα με NX x NY x NZ = 4094 x 633 x3072 = 7.964.983.296 σημεία πλέγματος, με τυπικούς χρόνους υπολογισμού τις $6*10^6$ ώρες επεξεργασίας στον υπερυπολογιστή (super computer) “Mare Mostrum” στη Βαρκελώνη σε 2100 επεξεργαστές για περίπου 6 μήνες. Αυτός είναι ο υψηλότερος αριθμός Reynolds μέχρι σήμερα που έχει εφαρμοστεί για προσομοιώσεις DNS.

Άλλος σοβαρός τομέας εφαρμογής της DNS είναι η προσομοίωση της μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή, περίπτωση για την οποία πολλά θεμελιώδη χαρακτηριστικά είναι ακόμη άγνωστα. Η εξομοίωση DNS προσφέρει ένα σημαντικό τρόπο διερεύνησης της πολυπλοκότητας των φαινομένων μετάβασης και το σχήμα 2.7 απεικονίζει ένα στιγμιότυπο μια προσομοίωσης DNS εκτελούμενη από τους J. Wissink και W. Rodi του Πανεπιστημίου της Καρλσρούης, με ένα πλέγμα 56 εκατομμυρίων σημείων, με αριθμό Reynolds 60.000. Οι προσομοιώσεις ερευνούν τις επιδράσεις μιας εξωτερικής τύρβης στην μετάβαση (transition), συγκρίνοντας μια στρωτή εισερχόμενη φυσαλίδα αποκόλλησης (separation buble) χωρίς τύρβη με μια εισερχόμενη με ένταση τύρβης 7%.



Σχήμα 2.7: Στιγμιότυπο από μια εξομοίωση DNS με αριθμό Reynolds 60,000 που απεικονίζει τις επιδράσεις μια εξωτερικής τύρβης, συγκρίνοντας το πεδίο δινών μιας στρωτής εισερχόμενης ροής χωρίς τύρβη με μια με ένταση τύρβης 7%.

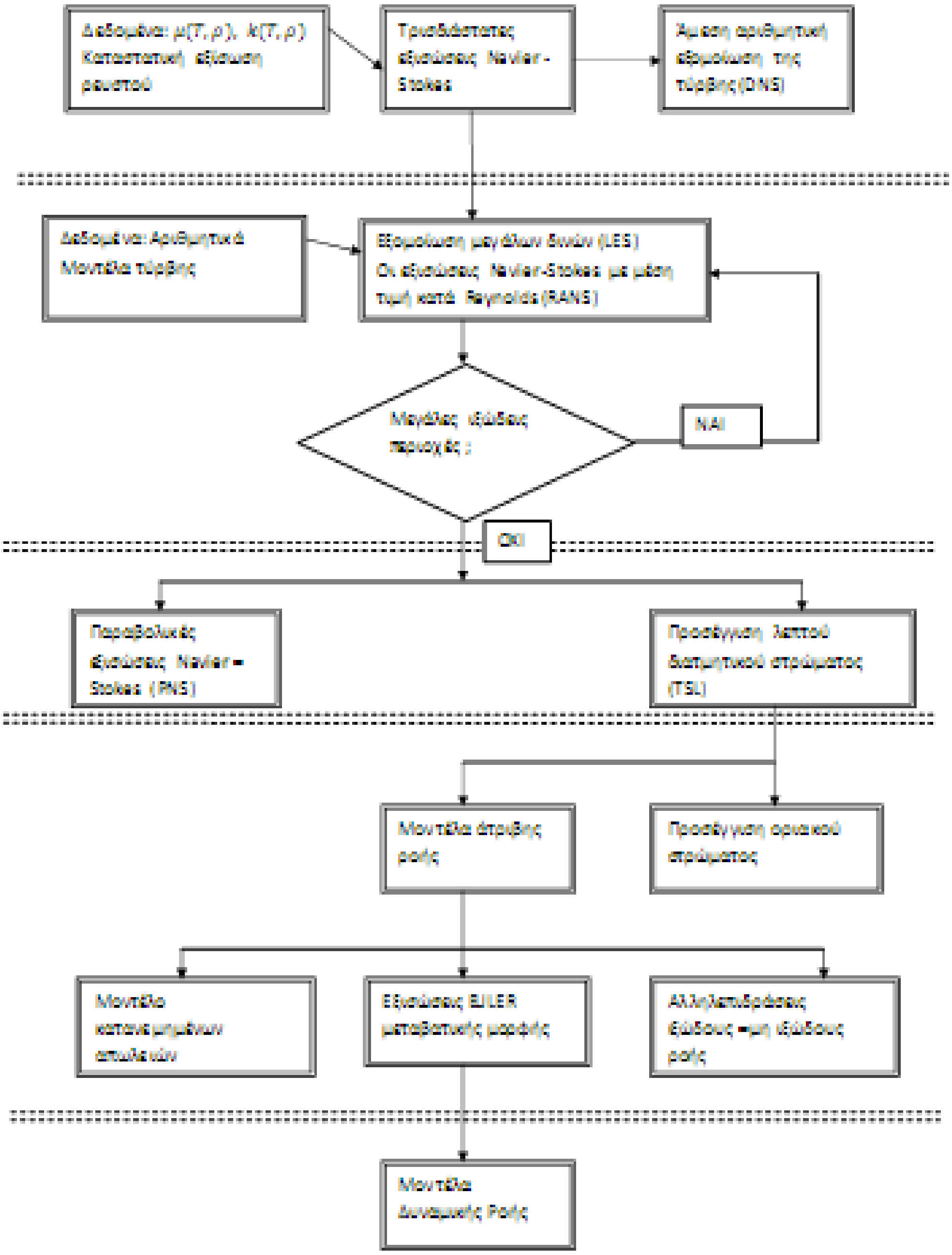
2.8.2 Εξομοίωση Μεγάλων Δινών (LES) των Τυρβωδών Ροών

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα μοντέλα LES λαμβάνονται από τους νόμους της διατήρησης των εξισωσεων Navier-Stokes μέσω μιας διαδικασίας φιλτραρίσματος, σύμφωνα με την οποία οι εξισώσεις είναι κατά μέσο όρο πάνω από το τμήμα του φάσματος που δεν υπολογίζεται, που είναι πάνω από τις μικρότερες κλίμακες μήκους (αυτή είναι η περιοχή με υψηλό αριθμό κύματος). Στην πράξη, οι μικρότερες ταυτοποιημένες κλίμακες σχετίζονται με το μέγεθος του πλέγματος και ως εκ τούτου τα μοντέλα LES συχνά αναφέρονται και ως αριθμητικά μοντέλα κλίμακας υπό-πλέγματος (subgrid scale).

Δεδομένου ότι οι εναπομείναντες τυρβώδεις διακυμάνσεις μεγάλης κλίμακας προσομοιώνονται κατευθείαν, οι υπολογιστικές απαιτήσεις των προσομοιώσεων LES εξακολουθούν να είναι μεγάλες. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για μια λύση ***n* σημείων** ανά μονάδα μήκους των προσομοιωμένων δινών, ο αριθμός των αριθμητικών πράξεων θα είναι της κλίμακας $\boldsymbol{n^3 \cdot Re^{3/2}}$ και λαμβάνοντας υπόψη την ένταξη του χρόνου, η συνολική υπολογιστική προσπάθεια για τις προσομοιώσεις LES είναι ανάλογη του $Re^{9/4}$. Αυτό είναι σημαντικά χαμηλότερο από τις απαιτήσεις τις προσομοιώσεις DNS ειδικά για ροές που οριοθετούνται από τοιχώματα (wall-bounded flows).

Ένας τομέας όπου η LES έρχεται ξεκάθαρα κοντά σε πρακτικές βιομηχανικές εφαρμογές είναι η μοντελοποίηση των φαινομένων της καύσης.

Για πολλές εφαρμογές που αφορούν ροές που οριοθετούνται από τοίχωμα και συνδεδεμένα οριακά στρώματα, διάφοροι υβριδικοί συνδυασμοί των LES και RANS εξετάζονται, σύμφωνα με τους οποίους η προσέγγιση RANS διατηρείται στην περιοχή όπου τα οριακά στρώματα είναι συνδεδεμένα με στέρεα τοιχώματα. Μια πρόσφατη έκθεση μπορεί να βρεθεί από τον Haase κ.α.(2006).



Σχήμα 2.8: Κατηγοριοποίηση εξισώσεων επίλυσης ροών

2.8.3 Οι εξισώσεις Navier Stokes με μέση τιμή κατά Reynolds (RANS)

Η πλειοψηφία ροών με βιομηχανικές εφαρμογές, καθώς και ροών που σχετίζονται με τον αεροδυναμικό σχεδιασμό οχημάτων, αεροσκαφών και κινητήρων εσωτερικής καύσης, είναι τυρβώδεις ροές. Για το λόγο αυτό και με δεδομένη την υπολογιστική δύναμη σύγχρονων Η/Υ, μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα έχει αφιερωθεί στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων και τεχνικών επίλυσης τυρβωδών ροών. Η πλέον ευρέως διαδεδομένη εφαρμοσμένη προσέγγιση για τις βιομηχανικές εφαρμογές του CFD είναι η προσέγγιση κατά την οποία λαμβάνεται η μέση χρονική τιμή των εξισώσεων Navier-Stokes για ολόκληρο το φάσμα των τυρβωδών διακυμάνσεων. Αυτό οδηγεί στις επονομαζόμενες μέσες τιμές εξισώσεων Navier Stokes κατά Reynolds (RANS) οι οποίες απαιτούν επί πρόσθετα εμπειρικές ή τουλάχιστον ημι-εμπειρικές πληροφορίες σχετικά με την δομή της τύρβης και την σχέση της με την κατά μέση ροή. Σύμφωνα με τη θεωρία του O.Reynolds, κάθε τυρβώδες ροϊκό μέγεθος A μπορεί να αναλυθεί ως:

$$A = \overline{A} + A'$$

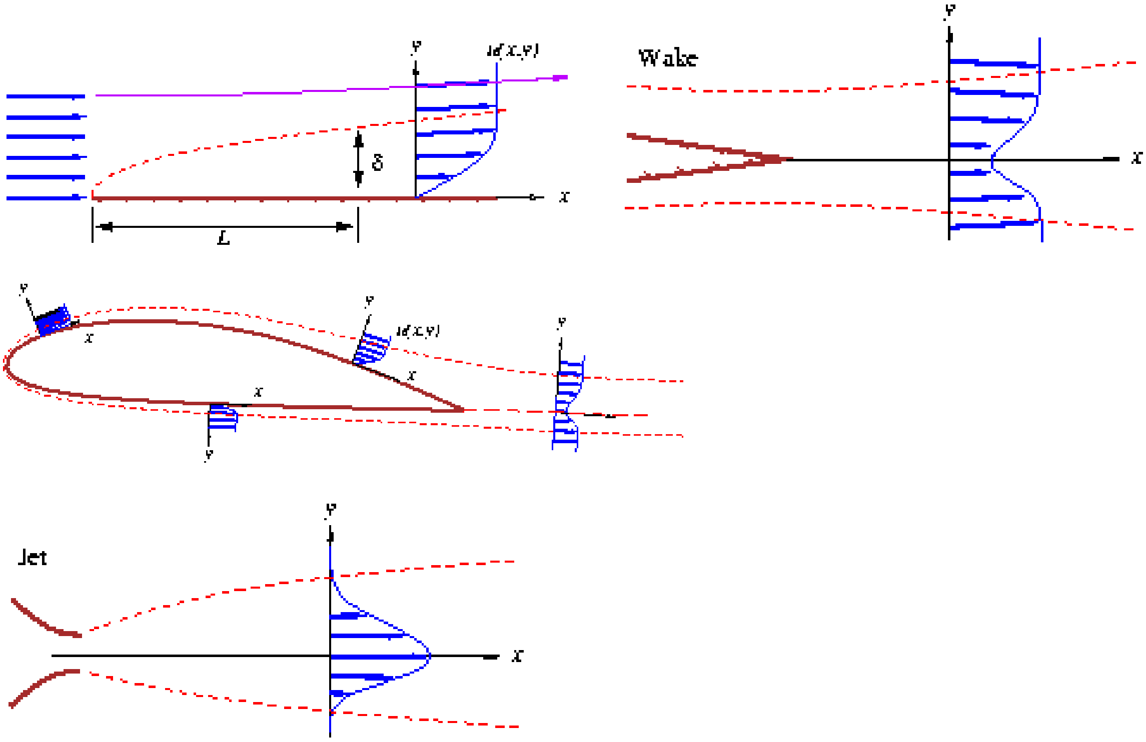
όπου

$$\overline{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A(\vec{x},\tau)\, d\tau$$

είναι η χρονικά μέση τιμή του μεγέθους A σε χρονική περίοδο T που επιλέγεται ώστε να είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη κλίμακα της τύρβης στο συγκεκριμένο τυρβώδες ροϊκό πεδίο, αλλά αρκετά μικρότερη από τη χρονική κλίμακα όλων των μη μόνιμων ροϊκών φαινομένων. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι αν τα μη μόνιμα ροϊκά φαινόμενα έχουν την ίδια κλίμακα με τη κλίμακα της τύρβης, η μέθοδος RANS δεν θα μπορέσει να υπολογίζει αυτού του είδους τις ροές. Αλλά για τις περισσότερες βιομηχανικές ροές, τα μη-μόνιμα ροϊκά φαινόμενα έχουν περιοχές συχνοτήτων εκτός των περιοχών συχνοτήτων της τύρβης.
Ο όρος A' ονομάζεται τυρβώδης διακύμανση και ο προσδιορισμός του ποικίλει για κάθε ροϊκό φαινόμενο και βασίζεται στη στοχαστική φύση του προσδιορισμού και μοντελοποίησης της τύρβης. Περισσότερες λεπτομέρειες για τυρβώδη ροϊκά φαινόμενα παρατίθενται σε επόμενο κεφάλαιο.

2.9 Η προσέγγιση διατμητικών τάσεων λεπτού στρώματος (Thin Shear Layer, TSL)

Στη περίπτωση **υψηλών αριθμών Reynolds οι ιξώδεις περιοχές του ροϊκού πεδίου** σε διατμητικές ροές (shear flows) γύρω από στερεές επιφάνειες ή σε απορρεύματα (wakes) πίσω από σώματα, είναι **περιορισμένης έκτασης**. Αν το μέγεθος της ιξώδους περιοχής παραμένει περιορισμένο κατά την εξέλιξη της ροής, τότε η κύρια συνεισφορά στις διατμητικές τάσεις θα έρθει κατά κύριο λόγο από την μεταβολές μεγεθών εγκάρσια στη κύρια διεύθυνση της ροής.



Σχήμα 2.9: Είδη ροών λεπτού διατμητικού στρώματος

Εάν θεωρήσουμε στη περίπτωση τρισδιάστατης ροής ένα αυθαίρετο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων που έχει τις συντεταγμένες ξ^1 και ξ^2 επάνω στην επιφάνεια ενός σώματος και $\xi^3 \equiv n$ που κατευθύνεται κάθετα στο επίπεδο των άλλων δύο συντεταγμένων, τότε η προσέγγιση διατμητικών τάσεων λεπτού στρώματος (TSL) εξισώσεων Navier Stokes συντελεί στο να εξαλειφθούν όλες οι παράγωγοι ως προς τα ξ^1 και ξ^2 που υπάρχουν στους τυρβώδεις και ιξώδεις όρους των εξισώσεων. Αυτή η προσέγγιση υποστηρίζεται επίσης από το γεγονός ότι γενικά με υψηλούς αριθμούς Reynolds (τυπικά $Re>10^4$) το υπολογιστικό πλέγμα είναι πυκνό έχει κατεύθυνση κάθετη στη περιοχή του ρευστού όπου οι διατμητικές τάσεις είναι μεγάλες και ως εκ τούτου οι όροι που παραλείπονται υπολογίζονται με

χαμηλότερη ακρίβεια (λόγω του αραιού υπολογιστικού πλέγματος στις διευθύνσεις των συντεταγμένων ξ^1 και ξ^2) από ότι οι παράγωγοι κάθετες στα τοιχώματα γύρω από σώματα.
Αυτή η προσέγγιση πλησιάζει την προσέγγιση οριακού στρώματος από την στιγμή που οι ιξώδεις όροι οι οποίοι παραλείπονται στην προσέγγιση οριακού στρώματος παραλείπονται κι εδώ. Παρόλα αυτά η εξίσωση ορμής στη διεύθυνση κάθετη στο τοίχωμα παραμένει, αντί για την υπόθεση της σταθερής στατικής πίεσης κάθετα στο τοίχωμα που γίνεται στις εξισώσεις οριακού στρώματος. Σαν συνέπεια η μετάβαση από περιοχές όπου κυριαρχεί το ιξώδες σε περιοχές που είναι κυρίως άτριβες (δηλ. δίχως ιξώδες), είναι αναπόσπαστο κομμάτι του υπολογισμού και υπάρχει εδώ μια μορφή προσέγγισης «υψηλής τάξης» οριακού στρώματος. Η κλασική προσέγγιση οριακού στρώματος αποκτάται όταν η εξίσωση ορμής με κατεύθυνση κάθετη στο τοίχωμα αντικαθίσταται από τον εξής όρο:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{n}} \approx 0$$

Η προσέγγιση διατμητικών τάσεων λεπτού στρώματος (TSL) ισοδυναμεί με το να αμελήσει κανείς την ιξώδη διάχυση με κατεύθυνση παράλληλη στην επιφάνεια του τοιχώματος και να κρατήσει μόνο τις συνεισφορές από την διάχυση στην κάθετη κατεύθυνση.
Το βασικό κίνητρο για την προσέγγιση TSL είναι ιστορικό καθώς επέτρεψε την δεκαετία του 1980 κάποια εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου συγκρινόμενο με τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο μια πλήρη προσέγγιση RANS.
Σήμερα αυτή η προσέγγιση δεν χρησιμοποιείται σχεδόν καθόλου καθώς πρέπει να βασιστεί πάνω στα ίδια μοντέλα τύρβης όπως οι σύγχρονες προσομοιώσεις RANS.
Με τη προσέγγιση του λεπτού διατμητικών τάσεων λεπτού στρώματος, για τη περίπτωση δυδιάστασης, ασυμπίεστης ροής, η εξίσωση της συνέχειας γίνεται:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Οι εξισώσεις της ορμής γίνονται:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\langle u'^2\rangle - \frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\langle v'^2\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\langle u'v'\rangle$$

όπου u', v' είναι οι τυρβώδεις διακυμάνσεις γύρω από τις μέσες τιμές των συνιστωσών u, v της ταχύτητας.
Η πίεση υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$P(x,y) + \rho\langle v'^2\rangle = P_\infty(x) + O\left(\left(\frac{\delta}{L}\right)\rho U_0 \Delta U\right)$$

Έτσι η συνιστώσα της ορμής κατά τη *x*-διεύθυνση γίνεται:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dP_\infty}{dx} + \nu\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle$$

Οι διατμητικές τάσεις είναι αμελητέες όταν $\frac{\delta\cdot\Delta U}{\nu} \gg \frac{L}{\delta}$ δηλ. για υψηλούς αριθμούς Reynolds.

2.10 Παραβολικές εξισώσεις Navier-Stokes (Parabolized Navier Stokes, PNS)

Η προσέγγιση των παραβολικών εξισώσεων Navier-Stokes (PNS) βασίζεται σε θεωρήσεις παρόμοιες με την προσέγγιση του λεπτού διατμητικού στρώματος (TSL), αλλά **εφαρμόζεται μόνο στη μη μεταβατική μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes**. Αυτή η προσέγγιση απευθύνεται για τον υπολογισμό ροϊκών

πεδίων που έχουν μια κυρίαρχη κατεύθυνση της κύριας ροής, όπως συμβαίνει στη περίπτωση ροής εντός αγωγού, όπου οι εγκάρσιες συνιστώσες της ροής είναι μικρότερης σπουδαιότητας από τη διαμήκη συνιστώσα. Επιπλέον οι ιξώδεις περιοχές κοντά σε στερεά τοιχώματα θεωρείται ότι κυριαρχούνται από διατμητικές τάσεις ανάλογες με τις κάθετες στα τοιχώματα βαθμίδες και ως εκ τούτου οι όροι διάχυσης ανάλογοι με βαθμίδες παράλληλες στα τοιχώματα μπορούν να μην ληφθούν υπόψη. Η προσέγγιση των παραβολικών εξισώσεων Navier-Stokes (PNS) έγινε πολύ δημοφιλής διότι μπορεί με αυτήν κανείς να υπολογίσει **χρονικά μόνιμες ιξώδεις υπερηχητικές ροές** με πολύ αποδοτικό τρόπο. Σύμφωνα με τη προσέγγιση αυτή, γίνεται επίλυση του ροϊκού πεδίου με βηματισμό ως προς το χώρο (space marching) αντί του βηματισμού ως προς το χρόνο (time marching) που είναι πολύ χρονοβόρος και χρησιμοποιείται από άλλες μεθόδους.
Εάν x είναι η συντεταγμένη κατά μήκος της κύριας διεύθυνσης της ροής, τότε οι παράγωγοι ως προς το x στους όρους διατμητικών τάσεων θεωρούνται αμελητέες σε σύγκριση με τις παραγώγους στις δυο εγκάρσιες κατευθύνσεις y και z. Μια παρόμοια προσέγγιση εισάγεται στους όρους διάχυσης στην εξίσωση της ενέργειας. Αυτή η προσέγγιση είναι επομένως έγκυρη όσο η βασική συνιστώσα της ροϊκής ταχύτητας u είναι η κυρίαρχη σε σχέση με τις άλλες δύο συνιστώσες, το οποίο σημαίνει ή δηλαδή τόσο δηλαδή η θετική κατεύθυνση του x ισοδυναμεί με την κύρια κατεύθυνση ροής. Αυτό δεν θα μπορεί να συμβεί εάν υπάρχει μια περιοχή αντίθετης ροής της κύριας συνιστώσας της ροϊκής ταχύτητας. Σε αυτήν την περίπτωση οι παράγωγοι της ταχύτητας u κατά μήκος της κύριας διεύθυνσης θα γίνουν της ίδιας τάξης μεγέθους με τις παραγώγους στις εγκάρσιες διευθύνσεις και όλη η παραπάνω προσέγγιση θα παύσει να ισχύει.
Σημειώστε ώστε ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί σε χρονικά μόνιμες υπερηχητικές ροές όπου η κύρια κατεύθυνση παίζει το ρόλο της «χρονικής κατεύθυνσης».

2.11 Προσέγγιση οριακού στρώματος (Boundary Layer)

Το σπουδαίο κατόρθωμα του L.Prandtl ήταν ότι κατάφερε να διαπιστώσει ότι σε υψηλούς αριθμούς Reynolds οι ιξώδεις περιοχές ροϊκών πεδίων παραμένουν περιορισμένης έκτασης δ (τάξη μεγέθους του $\delta/\mathrm{L} \approx \sqrt{\nu/\mathrm{U} \cdot \mathrm{L}}$, για ένα σώμα μήκους L) κατά μήκος σωμάτων γύρω από τα οποία διέρχεται η ροή ή εντός των οποίων περιορίζεται η ροή. Στη πράξη αυτό σημαίνει ότι για ένα αριθμό Reynolds τάξης μεγέθους 10^6, σε σώμα με μήκος χορδής 1m το οριακό στρώμα θα έχει πάχος λίγων mm. Εάν θεωρήσετε μία πτέρυγα αεροσκάφους το οποίο πετά σε μια ταχύτητα περίπου 800km/h, η ταχύτητα του αέρα επάνω από το φτερό θα αλλάξει από 0 στην επιφάνεια της πτέρυγας, σε ταχύτητες του εύρους των 800km/h σε απόσταση λίγων mm από την επιφάνεια της πτέρυγας. Για αυτό το λόγο η βαθμίδα της ταχύτητας είναι πολύ μεγαλύτερη στη κάθετη διεύθυνση προς τη κύρια ροή σε σχέση με τη βαθμίδα της ταχύτητας κατά μήκος της κύριας διεύθυνσης της ροής.
Σε όλες τις περιπτώσεις στις οποίες αυτές οι ιξώδεις περιοχές παραμένουν κοντά στην επιφάνεια του σώματος δηλαδή στην απουσία αποκόλλησης, ο υπολογισμός του πεδίου πίεσης μπορεί να διαχωριστεί από τον υπολογισμό του πεδίου ταχύτητας. Μια λεπτομερής συζήτηση των όρων για την προέλευση των εξισώσεων οριακού στρώματος μπορεί να βρεθεί στα βιβλία των Batchelor (1970), Schlichting (1971) και Cebeci Brandshaw (1984).
Με την προϋπόθεση ότι η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας εντός του οριακού στρώματος είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την κύρια ταχύτητα της ροής, η εξίσωση ορμής στη κάθετη διεύθυνση ανάγεται στη συνθήκη μηδενισμού της εγκάρσιας βαθμίδας πίεσης:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{n}} \approx 0$$

Σαν συνέπεια η πίεση $P(x, y, z)$ μέσα στο ιξώδες οριακό στρώμα μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει την ίδια τιμή με τη πίεση έξω από το στρώμα και σαν συνέπεια ότι έχει την ίδια τιμή με τη πίεσης της ελεύθερης ροής $P_e(x, y, z)$ που έχει αποκτηθεί από υπολογισμούς άτριβου ροϊκού πεδίου. Η πίεση $P_e(x, y, z)$ είναι η τιμή που λαμβάνεται από το μη ιξώδες ροϊκό πεδίο έξω από το οριακό στρώμα στο σημείο *(x,y)* επί της επιφάνειας του σώματος.

Οι εξισώσεις που διέπουν την ασυμπίεστη ροή οριακού στρώματος βγαίνουν από τις γενικευμένες εξισώσεις Navier-Stokes κάτω από τη παραδοχή ότι το πάχος δ του οριακού στρώματος είναι κατά

πολύ μικρότερο από το χαρακτηριστικό μήκος L του σώματος. Θεωρώντας λεπτό, δισδιάστατο οριακό στρώμα γύρω από σώμα που έχει την επιφάνεια του παράλληλη στον άξονα x και κάθετη στον άξονα y, οι Kuethe και Chow κάνοντας διαστατική ανάλυση, βρήκαν ότι $v \ll u$ και ότι $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$ είτε εφαρμόζεται στην ταχύτητα της ροής είτε στη θερμοκρασία της ροής. Αν x είναι η συνιστώσα των εξισώσεων που έχει τάξη μεγέθους 1, τότε η συνιστώσα y έχει τάξη μεγέθους δ/L. Όταν οι τελευταίοι όροι αγνοούνται, τότε η παράγωγος $\frac{\partial P}{\partial y}$ είναι περίπου ίση με το μηδέν.
Έτσι οι εξισώσεις Navier-Stokes για τη περίπτωση της τρισδιάστατης συμπιεστής ροής (με τις συντεταγμένες x και z να βρίσκονται επί της επιφάνειας του σώματος και η συντεταγμένη y να είναι κάθετη στην επιφάνεια) γίνονται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Οι εξισώσεις αυτές μαζί με τις εξισώσεις της άτριβης ροής:

$$\frac{\partial(\rho \overrightarrow{U_e})}{\partial t} + \overrightarrow{U_e} \cdot \overrightarrow{\nabla}(\rho \overrightarrow{U_e}) = 0$$

όπου $\overrightarrow{U_e} = \overrightarrow{u_e} + \overrightarrow{v_e}$ είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας που υπολογίζονται από την άτριβη ροή εξωτερικά της περιοχής του οριακού στρώματος, με οριακή συνθήκη:

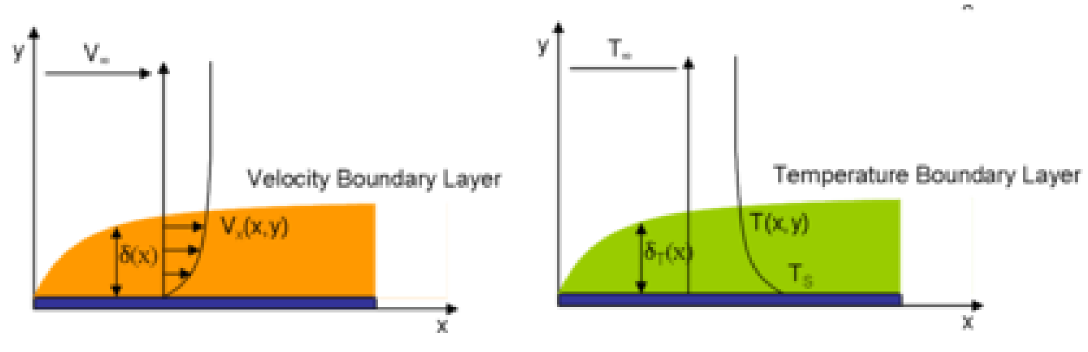
$$u = \overrightarrow{u_e} \quad \text{και} \quad v = \overrightarrow{v_e} \quad \text{όταν} \quad z = \delta$$

και τη καταστατική εξίσωση:

$$P = \rho \cdot R \cdot T$$

αποτελούν ένα σύστημα με 5 εξισώσεις και 5 αγνώστους, τα P, ρ, u, v, w. Η βαθμίδα της πίεσης P αποκτάται από υπολογισμό άτριβης ροής πριν από την επίλυση εξισώσεων οριακού στρώματος και δρα σαν εξωτερική δύναμη στην ιξώδη περιοχή του ροϊκού πεδίου. Επίσης οι συνιστώσες της ταχύτητας στο όριο μεταξύ ιξώδους και μη ιξώδους πεδίου υπολογίζονται από την άτριβη ροή και χρησιμεύουν ως οριακές συνθήκες στις εξισώσεις οριακού στρώματος. θεωρείται γνωστή αν γνωρίζουμε τη πυκνότητα ρ, και είναι σταθερή κατά πλάτος του οριακού στρώματος.

Πιο διαδεδομένη είναι η μορφή των εξισώσεων για τη περίπτωση διδιάστατης, ασυμπίεστης και μόνιμης ροής γύρω από επίπεδη πλάκα.



Σχήμα 2.10: Οριακό στρώμα ταχύτητας και θερμικό οριακό στρώμα επάνω από επίπεδη πλάκα

Για τη περίπτωση αυτή οι απλοποιημένες εξισώσεις οριακού στρώματος είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

όπου $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.
Αδιαστατοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιώντας τον αριθμό *Reynolds*, το σύστημα των Μ.Δ.Ε. γίνεται:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{Re}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{Re}\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Υποθέτοντας στρωτή ροή, η ταχύτητα κάθετη στη κύρια διεύθυνση της ροής είναι αμελητέα, άρα $v=0$.
Έτσι το σύστημα των Μ.Δ.Ε. γίνεται:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{Re}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Οριακές συνθήκες: $\Gamma\iota\alpha\ \ y=0\ \Rightarrow u=v=0$

$\Gamma\iota\alpha\ \ y=\delta\Rightarrow u=U_\infty$

όπου δ είναι το πάχος του οριακού στρώματος και U_∞ είναι η ταχύτητα της αδιατάραχτης ροής μακριά από την επίπεδη πλάκα.

2.12 Το μοντέλο κατανεμημένων απωλειών (Distributed Loss Model)

Το μοντέλο κατανεμημένων απωλειών είναι μια προσέγγιση που εφαρμόζεται βασικά σε εσωτερικές ροές, πιο συγκεκριμένα στα ροϊκά πεδία εντός στροβιλοκινητήρων, αντλιών και στην ωκεανογραφία.
Αυτό το μοντέλο ορίζεται από την υπόθεση ότι το αποτέλεσμα των διατμητικών τάσεων στην κίνηση του ρευστού είναι ισοδύναμο με μία κατανεμημένη δύναμη τριβής που ορίζεται από εμπειρικές σχέσεις. Προφανώς ένας συγκεκριμένος αριθμός από λεπτομέρειες τρισδιάστατων ροϊκών πεδίων θα χαθούν κάνοντας μια τέτοια προσέγγιση, συγκεκριμένα όλα τα ροϊκά μεγέθη μπορούν να αποδοθούν ή επηρεάζονται έντονα από το ιξώδες της ροής.
Από την στιγμή που οι εμπειρικές πληροφορίες για τον μηχανισμό κατανομής των απωλειών, δηλαδή των διατμητικών τάσεων δεν λαμβάνονται υπόψη, οι εξισώσεις αυτές λαμβάνονται σαν να περιγράφουν ιξώδες μοντέλο συν ένα αριθμητικό όρο που να παράγει εντροπία. Οι οριακές συνθήκες για το πεδίο ταχύτητας είναι συνεπώς ιδιότητες μη ιξώδους ροϊκού πεδίου, δηλαδή είναι συνθήκες που μηδενίζουν τις κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας στα τοιχώματα με μια μη μηδενική εφαπτόμενη ταχύτητα μέσα σε αυτά όρια. Η τελική προσέγγιση είναι της μη ιξώδους φύσεως αλλά όχι ισεντροπικής από την στιγμή που

η εντροπία στη διεύθυνση ενός σωματιδίου του ρευστού θα συνδεθεί με την διασπορά της ενέργειας, Hirsch and Deconinck (1985).
Μια παρόμοια προσέγγιση εισάγεται στην υδραυλική των ποταμών όπου οι συνέπειες από την τριβή στα τοιχώματα αντιπροσωπεύονται από μια δύναμη αντίδρασης εμπειρικής προέλευσης. Το μοντέλο κατανεμημένων απωλειών συνίσταται στο να αντικαταστήσει τις διατμητικές τάσεις με μία εξωτερική δύναμη τριβής που είναι συνάρτηση της ροϊκής ταχύτητας ή άλλων ροϊκών μεταβλητών, αλλά δεν εκφράζεται απευθείας σαν παράγωγος του πεδίου ταχύτητας.

2.13 Μοντέλο μη ιξώδους (άτριβου) ροϊκού πεδίου: Εξισώσεις του EULER

Η πιο γενική διαμόρφωση ροής για ένα μη ιξώδες, μη-θερμαινόμενο μη-αγώγιμο ρευστό περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων του EULER το οποίο αποκτήθηκε από τις εξισώσεις Navier-Stokes εξαλείφοντας όλους τους όρους που αφορούν διατμητικές τάσεις και μετάδοση θερμότητας λόγω αγωγής. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία οριακού στρώματος του Prandtl, αυτός είναι ένας έγκυρος υπολογισμός για ροές σε υψηλούς αριθμούς Reynolds μακριά από ιξώδεις περιοχές που αναπτύσσονται κοντά σε στερεές επιφάνειες.
Αυτή η προσέγγιση εισάγει μια δραστική αλλαγή στην μαθηματική διατύπωση σε σχέση με όλα τα προηγούμενα μοντέλα τα οποία περιέχουν ιξώδεις όρους από την στιγμή που το σύστημα των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων που περιγράφουν το μοντέλο αφορά άτριβα ροϊκά πεδία, μειώνεται από δεύτερης τάξης σε πρώτης τάξης. Αυτό είναι πολύ μεγάλης σημασίας καθώς αυτό θα καθορίσει την αριθμητική και φυσική προσέγγιση στον υπολογισμό αυτών των ροών. Επιπλέον, ο αριθμός των οριακών συνθηκών που επιτρέπονται τροποποιείται από το δεύτερο επίπεδο των εξισώσεων της συνεκτικής ροής (δηλ. Navier-Stokes) στο πρώτο επίπεδο με το σύστημα των μη ιξωδών εξισώσεων (δηλ. Euler).
Οι χρονικά εξαρτώμενες εξισώσεις του EULER σε συντηρητική μορφή και σε απόλυτο πλαίσιο αναφοράς για τις συντηρητικές μεταβλητές U ορίζονται από την εξής εξίσωση:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathrm{F}} = 0$$

δημιουργούν ένα σύστημα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων πρώτης τάξης, που είναι υπερβολικές στο χρόνο (όπως θα φανεί αργότερα) όπου το διάνυσμα αριθμητικών ροών $\vec{\mathrm{F}}$ έχει συνιστώσες στις τρεις διευθύνσεις τις F, G, H .
Οι εξισώσεις Euler σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λαμβάνουν στις τρεις διαστάσεις τη μορφή :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = 0$$

όπου

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u v \\ \rho u w \\ \rho u\left(E + {}^{P}/_{\rho}\right) \end{bmatrix} \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + P \\ \rho u w \\ \rho v\left(E + {}^{P}/_{\rho}\right) \end{bmatrix} \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + P \\ \rho w\left(E + {}^{P}/_{\rho}\right) \end{bmatrix}$$

Γενικά οι πηγές θερμότητας δεν θα ληφθούν υπόψη από την στιγμή που τα αποτελέσματα μετάδοσης θερμότητας εγκαταλείπονται στο σύστημα εξισώσεων EULER.
Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε τις ιδιότητες των μεταβολών θερμικής τροπής στην ιδιότητα του μη ιξώδους ρεύματος. Η εξίσωση της εντροπίας γίνεται:

$$T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s\right) = 0$$

εκφράζοντας ότι η παραγωγή της εντροπίας είναι μηδενική. Ως εκ τούτου οι εξισώσεις EULER περιγράφουν ισεντροπικές ροές, όταν δεν υπάρχουν ασυνέχειες στη ροή.
Όπως είναι γνωστό η ομάδα εξισώσεων του EULER επιτρέπει επίσης λύσεις σε ροϊκά πεδία με ασυνέχειες σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπως τα φύλλα δίνης ή οι ασυνέχειες επαφής ή υπερηχητικές ροές με κρουστικά κύματα. Οι ιδιότητες αυτών των λύσεων με ροϊκές ασυνέχειες μπορούν να αποκτηθούν μόνο από την ολοκληρωτική μορφή των συντηρητικών εξισώσεων αφού οι κλίσεις των αριθμητικών ροών δε μπορούν να καθοριστούν σε επιφάνειες διακοπής.
Μπορεί κανείς να παρατηρήσει από τις πιο πάνω εξισώσεις ότι λείπουν οι όροι ιξώδους που υπάρχουν στις πλήρεις εξισώσεις Navier-Stokes. Αυτό σημαίνει ότι οι εξισώσεις Euler μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων σε περιοχές της ροής όπου οι όροι ιξώδους είναι πολύ μικρότεροι από τους όρους αδράνειας, όπως π.χ. μακριά από στερεά τοιχώματα σωμάτων όπου οι όροι διάχυσης είναι πολύ μικρότεροι από τους όρους αδράνειας.

2.14 Μοντέλο Δυναμικής ροής (Potential Flow model)

Η πιο εντυπωσιακή απλοποίηση μαθηματικής περιγραφής ενός συστήματος ροής εξασφαλίζεται με την προσέγγιση της ιδιότητας του μη ιξώδους που λέγεται ροή δίχως στροβιλότητα (irrotational flow). Βάζοντας το στροβιλισμό της ροής ίσο με 0, τότε έχουμε ότι:

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{v}} = 0$$

το τρισδιάστατο πεδίο της διανυσματικής ταχύτητας μπορεί να περιγραφεί από την μοναδική μονόμετρη ροϊκή συνάρτηση φ, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{\nu} = \vec{\nabla} * \varphi$$

μειώνοντας την γνώση των τριών συνιστωσών της διανυσματικής ταχύτητας, σε μία που είναι η ροϊκή συνάρτηση φ.
Όπως είδαμε στο προηγούμενο τμήμα του κεφαλαίου εάν οι αρχικές συνθήκες είναι συμβατές με ομοιόμορφη εντροπία, παρά με τις συνεχείς ροές, η εξίσωση $\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{v}} = 0$ υποδηλώνει ότι η εντροπία είναι συνεχής σε ολόκληρο το ροϊκό πεδίο.Ως εκ τούτου για τις ισεντροπικές ροές η εξίσωση ορμής σύμφωνα με τον Crocco γίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial t} + \vec{\nabla}\mathrm{H} = 0$$

ή

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial t} + \mathrm{H} = \mathrm{H}_0$$

Η σταθερά H_0 έχει την ίδια τιμή κατά μήκος ροϊκών γραμμών.
Αυτή η εξίσωση δείχνει ότι η εξίσωση ενέργειας δεν είναι ανεξάρτητη πια από την εξίσωση ορμής και σαν συνέπεια η ροή θα αποφασιστεί εντελώς από τις αρχικές και οριακές συνθήκες καθώς επίσης και από την γνώση της μοναδικής συνάρτησης φ. Αυτή πράγματι είναι μια αξιοσημείωτη απλοποίηση.
Η εξίσωση για την συνάρτηση δυναμικού της ροής εξασφαλίζεται από την εξίσωση της συνέχειας λαμβάνοντας υπόψη τις ισεντροπικές συνθήκες ώστε να περιγραφεί η πυκνότητα στην συνάρτηση της διανυσματικής ταχύτητας και σαν συνέπεια σαν συνάρτηση της συνάρτησης δυναμικού της ροής. Αποκτούμε την βασική εξίσωση δυναμικού σε συντηρητική μορφή:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho\vec{\nabla}\varphi\right) = 0$$

και η σχέση μεταξύ πυκνότητας και συνάρτησης δυναμικού που αποκτήθηκε με την εισαγωγή του ορισμού της ολικής ενθαλπίας (ή ενθαλπίας αποκοπής) σε συνάρτηση με τη διανυσματική ταχύτητα και με τη στατική ενθαπλία *h* για ένα ιδανικό αέριο:

$$\frac{\rho}{\rho_A} = \left(\frac{h}{h_A}\right)^{1/\gamma-1} = \left[\frac{\left(\mathrm{H}_0 - \frac{v^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{h_A}\right]^{1/\gamma-1}$$

Ο όρος Α αναφέρεται σε μια αυθαίρετη κατάσταση αναφοράς για παράδειγμα τις καταστάσεις αποκοπής $\rho_A = \rho_0$ και $h_A = \mathrm{H}_0$.

2.14.1 Μόνιμες δυναμικές ροές

Μια περαιτέρω απλοποίηση για τις σταθερές εν δυνάμει ροές εξασφαλίζεται από την στιγμή που η εξίσωση δυναμικού μειώνεται έχοντας ότι $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 =$ σταθερό.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\rho\vec{\nabla}\varphi\right) = 0$$

και η πυκνότητα δίνεται από την εξίσωση (2.8.6) που h_A μπορεί να είναι ίσο με το H_0. Για αυτό το λόγο έχουμε

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2}{2H_0}\right]^{1/(\gamma-1)}$$

όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα ανακοπής και είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ροής.
Για τις χρονικά μόνιμες και μεταβατικές ροές η οριακή συνθήκη κατά μήκος ενός συμπαγούς ορίου είναι η συνθήκη ότι η ταχύτητα επάνω στο στέρεο τοίχωμα με κάθετη κατεύθυνση από το στέρεο τοίχωμα, είναι μηδέν.

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{n}} = \mathrm{u}_w \cdot \mathrm{e}_n$$

όπου αυτό u_w είναι η διανυσματική ταχύτητα ενός στέρεου τοιχώματος σε σχέση με το σύστημα αναφοράς.

2.14.2 Η συνθήκη Kutta Joukowski

Αν και ο τοπικός στροβιλισμός στην ροή είναι μηδέν, μπορεί να συμβεί για μια δυναμική ροή, να πάρει μη-μηδενική τιμή η κυκλοφορία γύρω από κλειστή καμπύλη C. Αυτή είναι η περίπτωση για αεροτομές που παρουσιάζουν δυνάμεις άντωσης. Για να επιτευχθεί μη μηδενική άντωση σε αεροτομή, επιβάλλεται η τιμή της κυκλοφορίας Γ γύρω από την αεροτομή. Αυτή η κυκλοφορία αντιπροσωπεύεται από ένα ιδιόμορφο σημείο ελεύθερης δίνης αν και προέρχεται από την παραγωγή στροβιλισμού που δημιουργείται στο οριακό στρώμα. Ως εκ τούτου η τιμή της Γ δεν μπορεί να προσδιοριστεί από την θεωρία μη αστρόβιλων πεδίων και έχει μια δεδομένη τιμή για δυναμική ροή. Δεν πρέπει να ξεχάσουμε ότι με την προσθήκη του ιδιόμορφου σημείου της ελεύθερης δίνης Γ, μια πληθώρα πιθανών ροών μπορεί να αποκτηθεί για τις ίδιες συνεπαγόμενες συνθήκες ροής. Κάθε μια από αυτές τις λύσεις αντιστοιχεί σε μια διαφορετική τιμή του Γ. Παρόλα αυτά για τα αεροδυναμικά διαμορφωμένα σώματα όπως είναι οι αεροτομές, μια αρκετά καλή προσέγγιση της κυκλοφορίας και ως εκ τούτου της άντωσης μπορεί να αποκτηθεί από την συνθήκη του Kutta- Joukowski με την προϋπόθεση ότι καμία αποκόλληση οριακού στρώματος συμβαίνει στην πραγματική ροή. Η συνθήκη Kutta-Joukowski αναφέρει ότι η τιμή της κυκλοφορίας η οποία προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα την αληθινή (ιξώδη) προσκολλημένη ροή, αποκτιέται όταν το σημείο αποκοπής βρίσκεται στο χείλος εκφυγής της αεροτομής.

2.14.3 Υπερκρίσιμες αεροτομές

Η ανάπτυξη της αεριοδυναμικής κατάστασης αεροσκάφους η οποία ορίζεται σαν τη μετάβαση κρουστικά κύματα από υπερηχητικές σε υποηχητικές ταχύτητες επιφάνειας είναι ένα από τα ποιο εντυπωσιακά αποτελέσματα της αρχικής ανάπτυξης της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής. Αυτές οι αεροτομές χρησιμοποιούνται στις μέρες μας ευρέως στα πολιτικά αεροσκάφη και επιτρέπουν σημαντική οικονομία στο κόστος καυσίμων λόγω της έλλειψης οπισθέλκουσας που απορρέει από το κρουστικό κύμα.

2.14.4 Υποηχητικές δυναμικές ροές

Στην υποηχητική κλίμακα το μοντέλο δυναμικής ροής έχει την ίδια εγκυρότητα με το μοντέλο EULER για συνθήκες ομοιόμορφης εισροής στο σώμα από τη στιγμή που η ροή παραμένει χωρίς στροβιλισμό.

2.14.5 Η προσέγγιση μικρών διαταραχών της εξίσωσης δυναμικού

Σε μόνιμη ή μεταβατική (μη - μόνιμη) ροή γύρω από πτέρυγες που έχουν μικρό πάχος σε σχέση με τη χορδή, μπορούμε να θεωρήσουμε γενικά ότι η ροή κατευθύνεται κυρίως στη κατεύθυνση χορδής η οποία λαμβάνεται σαν την κατεύθυνση x. Σε αυτήν την περίπτωση οι ταχύτητες στην εγκάρσια κατεύθυνση μπορούν να αγνοηθούν και η εξίσωση δυναμικού της ροής γίνεται η επονομαζόμενη εξίσωση μικρών διαταραχών:

$$(1-\mathrm{M}_{\infty}^{2})\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial z^{2}}=\frac{1}{\alpha^{2}}\cdot\left(\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial t^{2}}+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial t\partial x}\right)$$

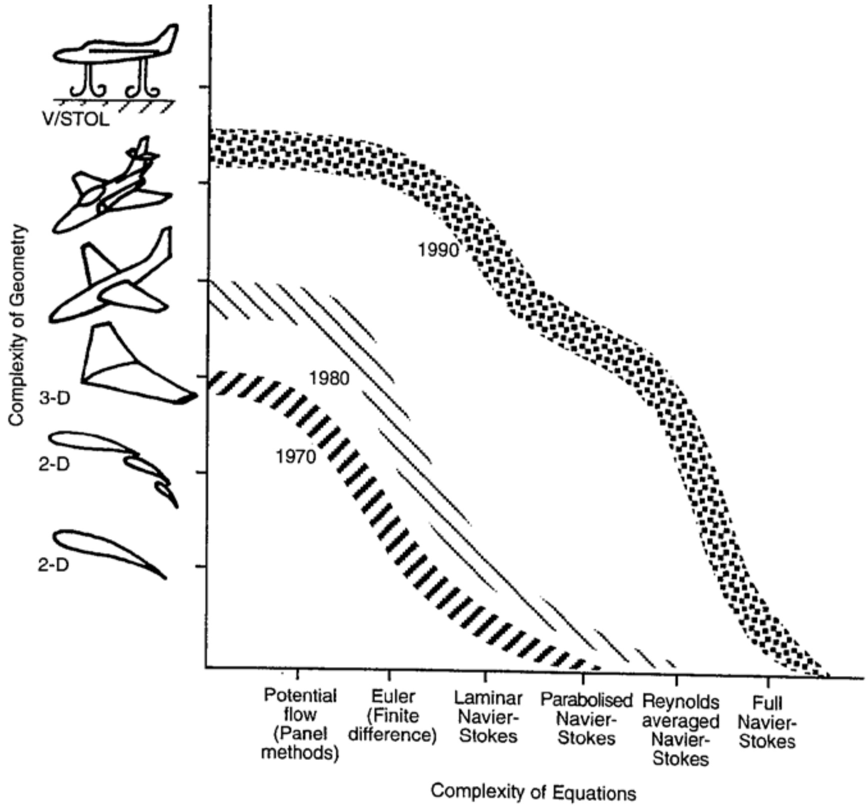
Ιστορικά η μορφή μόνιμης και δισδιάστατης ροής αυτής της εξίσωσης χρησιμοποιήθηκε από τους Murman και Cole (1961) για να βρουν την πρώτη αριθμητική λύση για μια ροή διηχητικής ροής γύρω από αεροτομή με τη παρουσία κρουστικών κυμάτων.

2.14.6 Γραμμικοποιημένες δυναμικές ροές: μέθοδοι ιδιόμορφων σημείων

Εάν η ροή μπορεί να θεωρηθεί σαν ασυμπίεστη η εξίσωση δυναμικού γίνεται γραμμική εξίσωση Laplace για την οποία υπάρχουν πολλές καθιερωμένες τεχνικές λύσεις. Μια από αυτές βασιζόμενη στην γραμμικότητα της εξίσωσης είναι η ιδιόμορφη μέθοδος κατά την οποία μια γραμμική υπέρθεση στοιχειωδών πεδίων ροής όπως ορίζονται οι ιδιομορφίες δίνης και πηγής - καταβόθρας. Οι άγνωστοι συντελεστές αυτής της γραμμικής υπέρθεσης αποκτούνται με την επιβολή ότι το προκύπτον πεδίο ταχύτητας ικανοποιεί την συνθήκη ότι μηδενίζεται η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας επάνω σε επιφάνειες του στερεού σώματος.
Η τρισδιάστατη επέκταση της μεθόδου ιδιόμορφων σημείων, η μέθοδος Panel, έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στην αεροναυπηγική βιομηχανία ώστε να υπολογιστεί το τρισδιάστατο πεδίο ροής γύρω από πολύπλοκα γεωμετρικά σώματα. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ακόμη και αν έχουν δημιουργηθεί επεκτάσεις για να αντιμετωπιστεί η συμπιεστότητα, αυτές οι μέθοδοι αντικαθιστούνται όσο το δυνατόν καλύτερα για ροές υψηλής ταχύτητας από καλύτερες προσεγγίσεις όπως είναι η μη-γραμμική εξίσωση δυναμικού και οι εξισώσεις EULER για άτριβες ροές.

2.15 Συμπέρασμα

Συμπερασματικά αναφέρουμε ότι όσο περισσότερο πολύπλοκη είναι η γεωμετρία το σώματος γύρω από το οποίο θέλουμε να επιλύσουμε το ροϊκό πεδίο, τόσο πιο πολύπλοκες εξισώσεις πρέπει να επιλύσουμε για να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη ροή. Το παρακάτω σχήμα δείχνει αντιπροσωπευτικές γεωμετρίες διδιάστατων και τρισδιάστατων σωμάτων σε σχέση με το είδος των εξισώσεων που επιλέγουμε για την επίλυση. Σημειώστε ότι τη τελευταία εικοσαετία χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes για τρισδιάστατα γεωμετρικά σώματα.



Σχήμα 2.11: Χρονολογική εξέλιξη εφαρμογής απλοποιημένων μορφών των εξισώσεων Navier-Stokes

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

3.1 Ανάλυση Μ.Δ.Ε. 2^{ου} βαθμού

Θεωρούμε τη Μ.Δ.Ε. 2^{ου} βαθμού

$$\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = h \tag{3.1}$$

όπου τα *α, b, c* μπορεί να εξαρτώνται από τις συντεταγμένες *x* και *y*, όπως επίσης και η συνάρτηση Φ και οι παράγωγοί της ως προς *x* και *y*. Ο όρος *h* μπορεί να είναι είτε μηδέν είτε μία συνάρτηση της μορφής:

$$h = -\left(d \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f \cdot \Phi + g \right)$$

Η λύση της εξίσωσης (3.1) μπορεί να αναπαρασταθεί στο χώρο σαν μία επιφάνεια όπου για κάθε σημείο στο χώρο περνά και μία επιφάνεια.

Η εξίσωση (3.1) μπορεί να γραφεί σαν σύστημα Μ.Δ.Ε. εισάγοντας τα $u,\ \upsilon$ ως εξής:

Ορίζουμε τις ποσότητες:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \text{και} \qquad \upsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Έτσι η (1) γίνεται:

$$\left\{ \begin{aligned} & a\frac{\partial u}{\partial x} + 2b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0 \\ & \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ \upsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & c \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} u \\ \upsilon \end{bmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Ορίζω $\quad U = \begin{bmatrix} u \\ \upsilon \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A}^1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 2b & c \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Έτσι η εξίσωση (3.2) γράφεται:

$$\mathrm{A}^1 \frac{\partial U}{\partial x} + A^2 \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{3.3}$$

Υποθέτουμε ότι οι λύσεις παραπάνω συνάρτησης είναι κυματοειδούς μορφής:

$$U = \hat{U} \cdot e^{i(\vec{n} \cdot \vec{x})} = \hat{U} \cdot e^{i(n_x x + n_y y)} \tag{3.4}$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ και η είναι η διεύθυνση μετάδοσης της διαταραχής

Η εξίσωση (3.3) θα έχει λύσης της μορφής (3.4) αν το ομογενές σύστημα

$$\left(\mathrm{A}^1\eta_x + \mathrm{A}^2\eta_y\right)\cdot\hat{U} = 0$$

Δέχεται σαν λύση τη μη μηδενική λύση για το $\hat{U}$. Αυτό μπορεί να συμβεί αν η ορίζουσα

$$\det\left|\mathrm{A}^1\eta_x + \mathrm{A}^2\eta_y\right| = 0 \qquad (3.5)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha n_x + 2bn_y & cn_y \\ -n_y & n_x \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{n_x}{n_y}\right)^2 + 2b\left(\frac{n_x}{n_y}\right) + c = 0$$

Η διακρίνουσα του συστήματος είναι η:

$$\Delta = \sqrt{(2b)^2 - 4\cdot a\cdot c} = 2\sqrt{b^2 - a\cdot c}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3.5) είναι οι:

$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - a\cdot c}}{a}$$

<u>Περίπτωση (i):</u> $\left(b^2 - a\cdot c\right) > 0 \Rightarrow \Delta$: πραγματικός αριθμός. Στη περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο κυματοειδείς λύσεις του προβλήματος και η Μ.Δ.Ε. είναι **υπερβολικού** τύπου.

<u>Περίπτωση (ii):</u> $\left(b^2 - a\cdot c\right) < 0 \Rightarrow \Delta$: μιγαδικός αριθμός. Στη περίπτωση αυτή οι λύσεις είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί και η Μ.Δ.Ε. είναι **ελλειπτικού** τύπου.

<u>Περίπτωση (iii:</u> $\left(b^2 - a\cdot c\right) = 0 \Rightarrow \Delta = 0$. Στη περίπτωση αυτή οι δύο λύσεις ανάγονται σε μία διπλή λύση που είναι η $\frac{n_x}{n_y} = -\frac{b}{a}$ και η Μ.Δ.Ε. είναι **παραβολικού** τύπου.

Παράδειγμα <u>**Υπερβολικής**</u> Μ.Δ.Ε.

Μία Μ.Δ.Ε. της μορφής (1) είναι υπερβολική αν $b^2 - a\cdot c > 0$ >0 για όλα τα σημεία της περιοχής. Μία υπερβολική Μ.Δ.Ε. έχει δύο πραγματικές χαρακτηριστικές γραμμές.
Ένα παράδειγμα υπερβολικής Μ.Δ.Ε. είναι η εξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

Μία πλήρης περιγραφή ροής που περιγράφεται από μία υπερβολικής Μ.Δ.Ε. 2ας τάξης απαιτεί δύο σετ αρχικών και δύο σετ οριακών συνθηκών.
Οι αρχικές συνθήκες για το t=0 είναι οι ακόλουθες:

$$\Phi(x,0) = f(x)$$

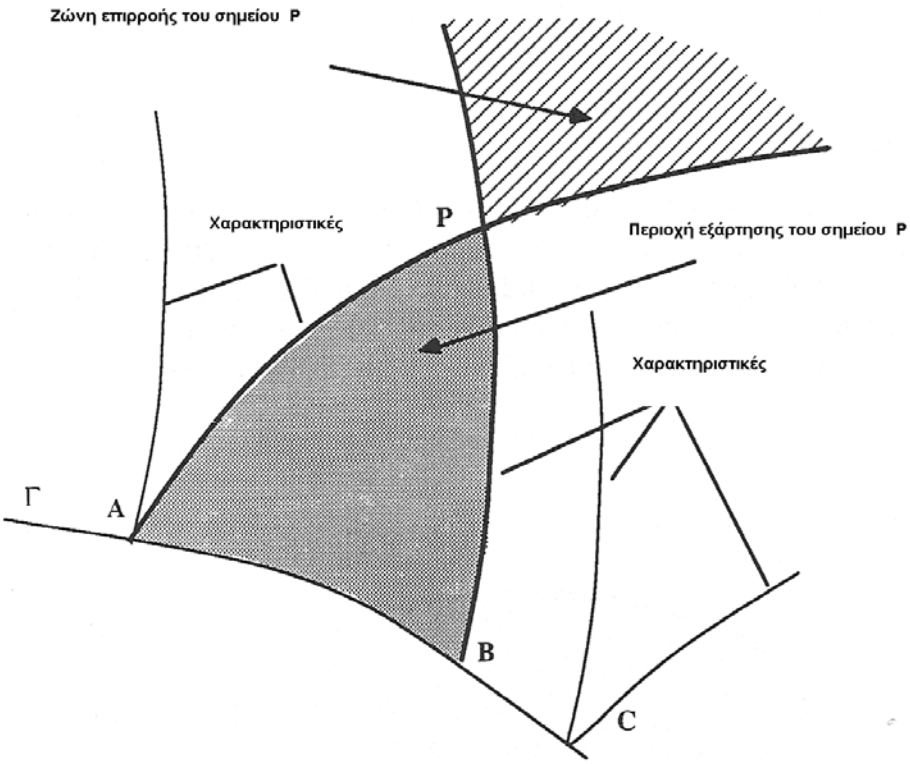
$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

όπου οι συναρτήσεις *f (x), g(x)* δίνονται για το κάθε ξεχωριστό πρόβλημα.

Μία υπερβολική εξίσωση 1ης τάξης είναι η :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -a\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

όπου μία μόνον αρχική συνθήκη απαιτείται. Η αρχική συνθήκη <u>δεν</u> μπορεί να καθοριστεί κατά μήκος χαρακτηριστικής γραμμής.



Μία κλασική μέθοδος επίλυσης υπερβολικών Μ.Δ.Ε. είναι η μέθοδος επίλυσης υπερβολικών Μ.Δ.Ε. είναι η μέθοδος των χαρακτηριστικών. Κατά μήκος των χαρακτηριστικών γραμμών η ΜΔΕ ανάγεται σε Συνήθη Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ) που μπορεί με ευκολία να ολοκληρωθεί και επιλυθεί.

Παράδειγμα <u>**Ελλειπτικής**</u> Μ.Δ.Ε.

Μία Μ.Δ.Ε. της μορφής της εξίσωσης (1) είναι ελλειπτική αν $b^2 - a \cdot c < 0$ για όλα τα σημεία μίας περιοχής.

Μία ελλειπτική ΜΔΕ δεν έχει πραγματικές χαρακτηριστικές καμπύλες. Μία διαταραχή μεταδίδεται στιγμιαία σε όλες τις διευθύνσεις της περιοχής.

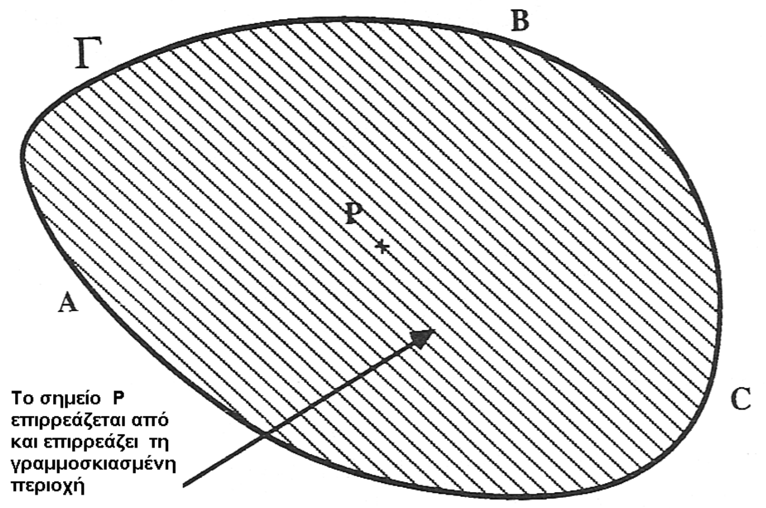
Παραδείγματα αποτελούν η εξίσωση του Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

και η εξίσωση του Poisson:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Η περιοχή λύσεως μίας ελλειπτικής Μ.Δ.Ε. είναι μία κλειστή περιοχή R, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.
Στο κλειστό σύνορο R πρέπει να καθορίζονται οι οριακές συνθήκες (τιμή μεταβλητών ή βαθμίδα) και η λύση της ΜΔΕ είναι για όλα τα εσωτερικά σημεία του ορίου R.



Περιοχή λύσης ελλειπτικής Μ.Δ.Ε.

Παράδειγμα **<u>Παραβολικής</u>** Μ.Δ.Ε.

Μία Μ.Δ.Ε. της μορφής της εξίσωσης (1) είναι παραβολική αν $b^2 - a \cdot c = 0$ για όλα τα σημεία της περιοχής λύσης.
Το πεδίο λύσεων μίας παραβολικής Μ.Δ.Ε. είναι μία ανοικτή περιοχή, όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα. Για μία υπερβολική Μ.Δ.Ε. υπάρχει μία μόνο χαρακτηριστική γραμμή.

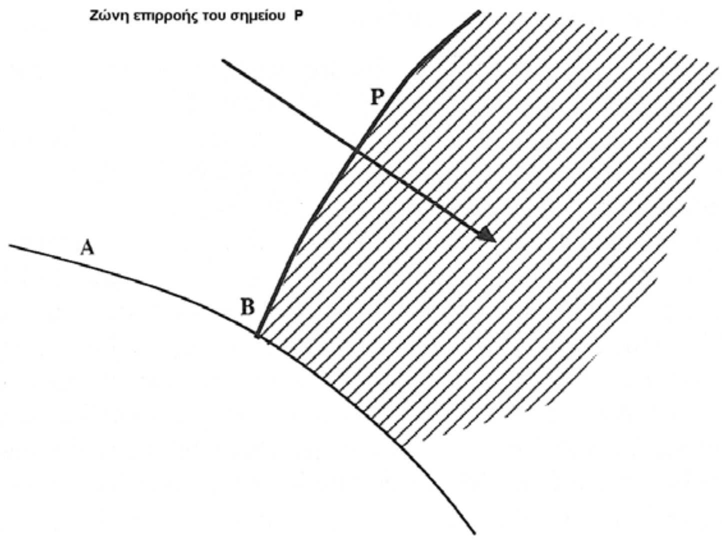
Παράδειγμα παραβολικής Μ.Δ.Ε. είναι η μη μόνιμη μετάδοση θερμότητας με αγωγή στη μία διάσταση

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

και η εξίσωση συνεκτικότητας που είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Η αρχική τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής και δύο σετ οριακών συνθηκών απαιτούνται για τον πλήρη καθορισμό του προβλήματος.



Οι οριακές αυτές συνθήκες μπορεί να είναι είτε ο καθορισμός μεταβλητής στα όρια του πεδίου ή της βαθμίδας της μεταβλητής στα όρια του πεδίου.
Η λύση της παραβολικής ΜΔΕ προχωρά κατάντη του πεδίου ικανοποιώντας σε κάθε βήμα το σετ των οριακών συνθηκών.

3.2 Διερεύνηση της Δυναμικής Εξίσωσης Μικρών Διαταραχών

Μορφή της Μ.Δ.Ε.:

$$\left(1-\mathrm{M}_{\infty}^{2}\right)\cdot\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial y^{2}}=0$$

όπου M_{∞} είναι ο αριθμός Mach της ελεύθερης ροής ανάντη του σώματος.
Σύμφωνα με τα όσα ειπώθηκαν περί κατηγοριοποίησης ΜΔΕ, έχουμε ότι:

$$\alpha=1-M_{\infty}^{2}$$
$$b=0$$
$$c=1$$

Η διακρίνουσα $\Delta=b^{2}-a\cdot c=-\left(1-M_{\infty}^{2}\right)$

Περίπτωση (i): $M_{\infty}<1\Rightarrow M_{\infty}^{2}<1$ (υποηχητική ροή ανάντη του σώματος)
$\Rightarrow b^{2}-a\cdot c<0\Rightarrow$ Ελλειπτική Μερική Διαφορική Εξίσωση

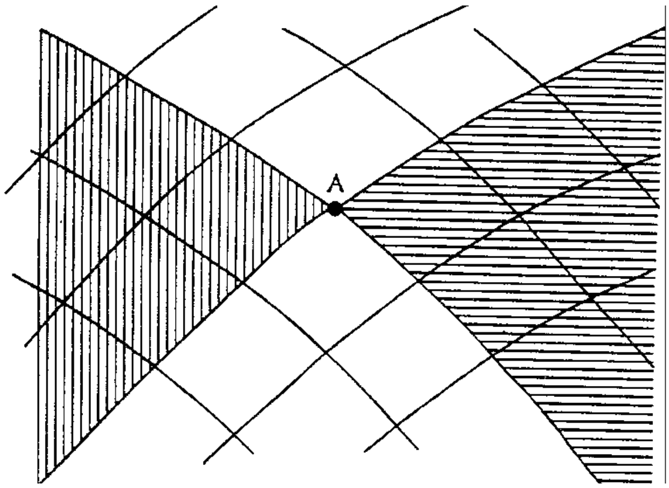
Περίπτωση (ii): $b^{2}-a\cdot c=0\Rightarrow M_{\infty}=1$ (διηχητική ροή ανάντη του σώματος)
$\Rightarrow b^{2}-a\cdot c=0\Rightarrow$ Παραβολική Μερική Διαφορική Εξίσωση

Περίπτωση(iii): $b^{2}-a\cdot c>0\Rightarrow M_{\infty}^{2}>1$(υπερηχητική ροή ανάντη του σώματος)
$\Rightarrow b^{2}-4ac>0$ Υπερβολική Μερική Διαφορική Εξίσωση.

Όταν $b^{2}-a\cdot c<0\Rightarrow$ Υπάρχουν 2 μιγαδικές συζυγείς λύσεις στην εξίσωση (5) και τότε η αρχική Μ.Δ.Ε. είναι ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΥ τύπου

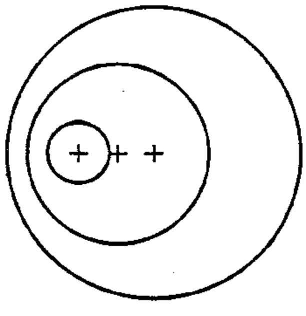
Όταν $b^2 - a \cdot c = 0$, τότε οι 2 λύσεις της εξίσωσης (5) ανάγονται σε 1 διπλή, που είναι η $\frac{n_x}{n_y} = \frac{b}{2a}$ και η αρχική Μ.Δ.Ε. είναι ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ τύπου

Τα παραπάνω μπορούν να παρασταθούν γραφικά στο πιο κάτω σχήμα. Στη περίπτωση όπου υπάρχουν 2 πραγματικές λύσεις $\left(b^2 - \alpha \cdot c\right) > 0$ μία διαταραχή (δηλ. ένα κύμα) μπορεί να διαδοθεί μόνο σε μία πεπερασμένη περιοχή. Η περιοχή αυτή που εξαρτάται από τη διαταραχή στη σημείο Α ονομάζεται περιοχή επιρροής (και αναπαρίσταται με τις οριζόντιες γραμμές σκίασης). Η περιοχή η οποία επηρεάζει τη τιμή της διαταραχής στο σημείο Α λέγεται περιοχή εξάρτησης και συμβολίζεται με τις κατακόρυφες γραμμές σκίασης).



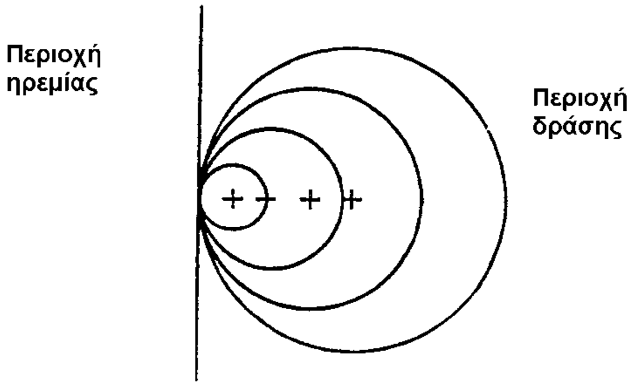
Ας θεωρήσουμε τώρα την φυσική σημασία των διαφόρων περιπτώσεων της Μ.Δ.Ε. δυναμικού. Υποθέτουμε ότι ένα σώμα, σε ένα ρευστό δίχως ιξώδες, κινείται με ταχύτητα u δημιουργώντας διαταραχές στο ρευστό με την κίνησή του. Υποθέτουμε επίσης ότι η ταχύτητα μετάδοσης του ήχου συμβολίζεται με α.

(i) Αν u<α, σημαίνει ότι $M = \frac{u}{a} < 1 \Rightarrow$ Υποηχητική Ροή και τότε οι διαταραχές ένεκα του σώματος μεταδίδονται παντού στο ροϊκό πεδίο, όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα.

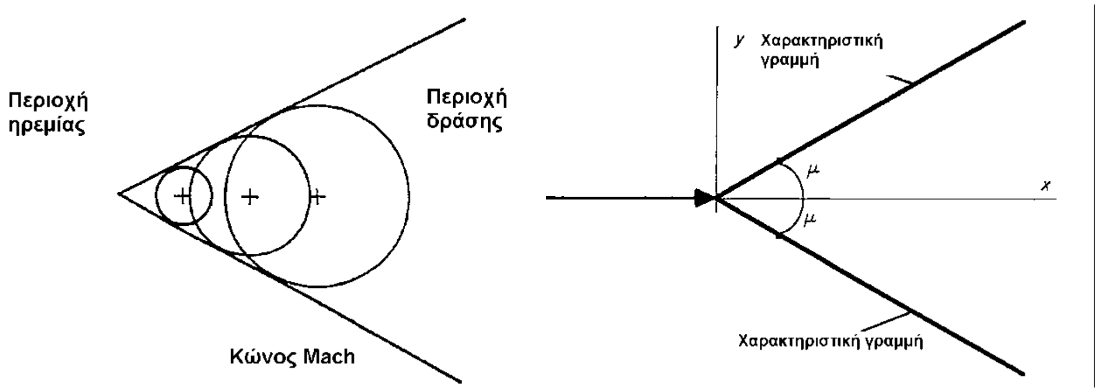


Μετάδοση διαταραχών σε υποηχητική ροή

(ii) Καθώς η ταχύτητα του σώματος u αυξάνει, έρχεται μία στιγμή που φθάνει τη ταχύτητα του ήχου, α . Τότε σχηματίζεται ένα μέτωπο ανάντη του οποίου δεν γίνεται αισθητή η παρουσία του σώματος (και κατά συνέπεια των διαταραχών ένεκα του σώματος), όπως το παρακάτω σχήμα. Αυτή η περιοχή ονομάζεται περιοχή ηρεμίας. Οι διαταραχές γίνονται αισθητές κατάντη του σώματος σε μία ζώνη που λέγεται περιοχή δράσης.



Όταν η ταχύτητα του σώματος αυξάνεται περαιτέρω και γίνεται μεγαλύτερη από τη ταχύτητα του ήχου, τότε σχηματίζεται ένα κωνικό μέτωπο, όπως το παρακάτω σχήμα. Το αποτέλεσμα των διαταραχών γίνεται αισθητό μόνο εντός της περιοχής του μετώπου αυτού. Ισχύει ότι: $\sin\mu = \dfrac{1}{M_\infty}$



Μετάδοση διαταραχών σε υπερηχητική ροή

Ασκήσεις στη κατηγοριοποίηση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Να κατηγοριοποιήσετε σε παραβολικές, υπερβολικές ή ελλειπτικές τις παρακάτω Μ.Δ.Ε.

$$3\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} + K = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \beta\frac{\partial\phi}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$$

$$4\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial\phi}{\partial x} + x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 4\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - 4xy = 0$$

4. ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ NAVIER-STOKES

4.1 Αρχικές συνθήκες

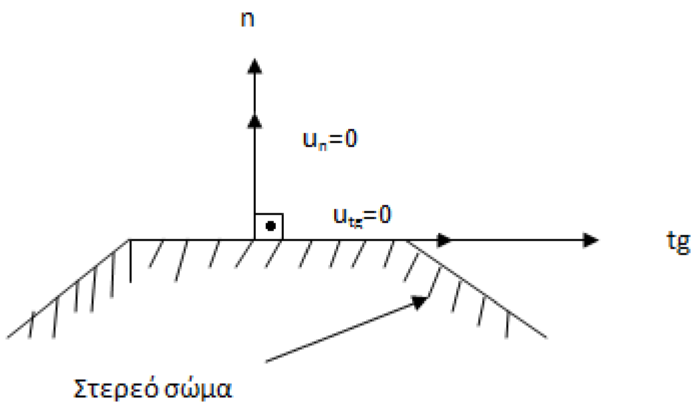
Στην πλήρη τους μορφή, οι εξισώσεις περιέχουν τους όρους $\frac{\partial(....)}{\partial t}$**.** Αρχικές συνθήκες, είναι εκείνες οι συνθήκες που προσδιορίζουν τη λύση των εξισώσεων (ταχύτητας, πίεσης, πυκνότητα κλπ.) σε χρονικό επίπεδο t=t_o σε όλα τα σημεία του ροϊκού πεδίου.

3.2 Οριακές συνθήκες σε στερεά τοιχώματα σωμάτων

Στερεά τοιχώματα σωμάτων (π.χ. πτέρυγες, κελύφη αεριοστρόβιλοι 2D ή 3D στερεά σώματα) προσδιορίζονται με τις συνθήκες :

$u_{n/WALL} = 0$ (δηλ. η κάθετη στην επιφάνεια του σώματος συνιστώσα της ταχύτητας είναι ίση με το μηδέν). (Dirichlet)

$u_{tg/WALL} = 0$ (δηλ. η εφαπτομενική ή οι εφαπτομενικές συνιστώσες της ταχύτητας επί του σώματος είναι ίση με το μηδέν). (Dirichlet)



Σχήμα 4.1: Οριακές συνθήκες σε στερεό σώμα

$k\frac{\partial T}{\partial \eta}\Big|_{WALL}$ = q (δηλ. η κάθετη βαθμίδα της θερμοκρασίας στην επιφάνεια του σώματος είναι ίση με τη ροή θερμότητας από το ρευστό προς το σώμα) (συνθήκη Neumann).

$T|_{WALL} = \Theta$ (δηλ. η θερμοκρασία του ρευστού επί της επιφάνειας του σώματος, $T|_{WALL}$, ισούνται με τη θερμοκρασία του σώματος, Θ) (συνθήκη Dirichlet).

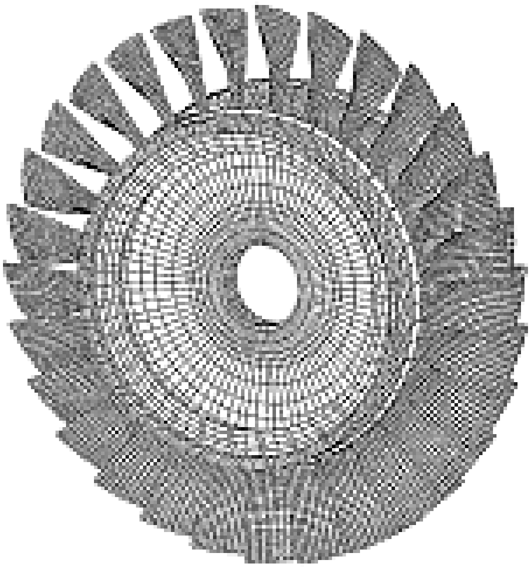
Για να επιτευχθεί μία μοναδική λύση μίας Μ.Δ.Ε , ένα επιπλέον σετ συνθηκών πρέπει να δοθεί έτσι ώστε να προσδιορισθεί η λύση που ικανοποιεί εκτός από την Μ.Δ.Ε., και το επιπλέον σετ των συνθηκών αυτών. Αυτές οι επιπλέον συνθήκες λέγονται **αρχικές** και **οριακές συνθήκες**.
Αρχική συνθήκη, είναι ο καθορισμός εξαρτημένης μεταβλητής σε κάποια αρχική κατάσταση ($t=t_o$).
Οριακή συνθήκη, είναι ο καθορισμός εξαρτημένης μεταβλητής ή της παραγωγού της επάνω στο όριο του πεδίου της Μ.Δ.Ε.

Τα κυριότερα ειδή οριακών συνθηκών είναι:

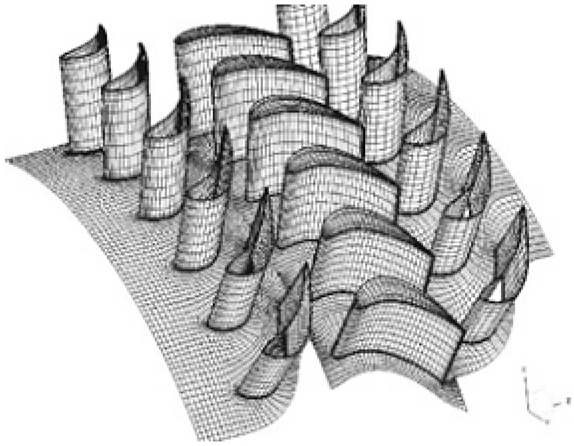
(i) Συνθήκη Dirichlet: όταν καθορίζεται η εξαρτημένη μεταβλητή κατά μήκος του ορίου.
(ii) Συνθήκη Neumann: όταν καθορίζεται η παραγωγός της μεταβλητής κάθετα στο όριο του πεδίου.
(iii) Συνθήκη Robin όταν οι οριακές συνθήκες είναι γραμμικός συνδυασμός Dirichlet και Neumann.
(iv) Μεικτές οριακές συνθήκες: όταν κατά μήκος ενός τμήματος του ορίου καθορίζεται συνθήκη τύπου Dirichlet και κατά μήκος άλλου τμήματος καθορίζεται συνθήκη τύπου Neumann.

4.3 Περιοδικές συνθήκες για υπολογισμούς στροβιλοκινητήρων ή αντλιών

Στη περίπτωση όπου ζητείται ο υπολογισμός ροϊκών πεδίων εντός θερμο-υδραυλικών στροβιλομηχανών (δηλ. συμπιεστών, στροβίλων, αντλιών), πρέπει να επισημανθεί ότι το στροφείο (ή τα στροφεία) των στροβιλομηχανών αυτών αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό πτερυγίων. Το υπολογιστικό πλέγμα που πρέπει να αναπτυχθεί για τον υπολογισμό της ροής γύρω από το στροφείο, θα έπρεπε να επεκταθεί στη περιφερειακή διεύθυνση περιλαμβάνοντας όλα τα πτερύγια του στροφείου. Αυτό θα είχε σαν επακόλουθο τη χρήση πολλών σημείων για τους υπολογισμούς, ενώ στη κατάσταση μόνιμης ροής η ροή είναι αξονοσυμμετρική, πράγμα που σημαίνει ότι αντί να απαιτηθούν όλα τα πτερύγια του στροφείου, να υπολογισθεί η ροή μόνο μεταξύ δύο πτερυγίων και με τη χρήση κατάλληλων περιοδικών συνθηκών κατά τη περιφερειακή διεύθυνση, να εξομοιωθεί η περιφερειακή αξονοσυμμετρία του ροϊκού πεδίου.



Σχήμα 4.2: Πλέγμα γύρω από στροφείο αξονικού συμπιεστή

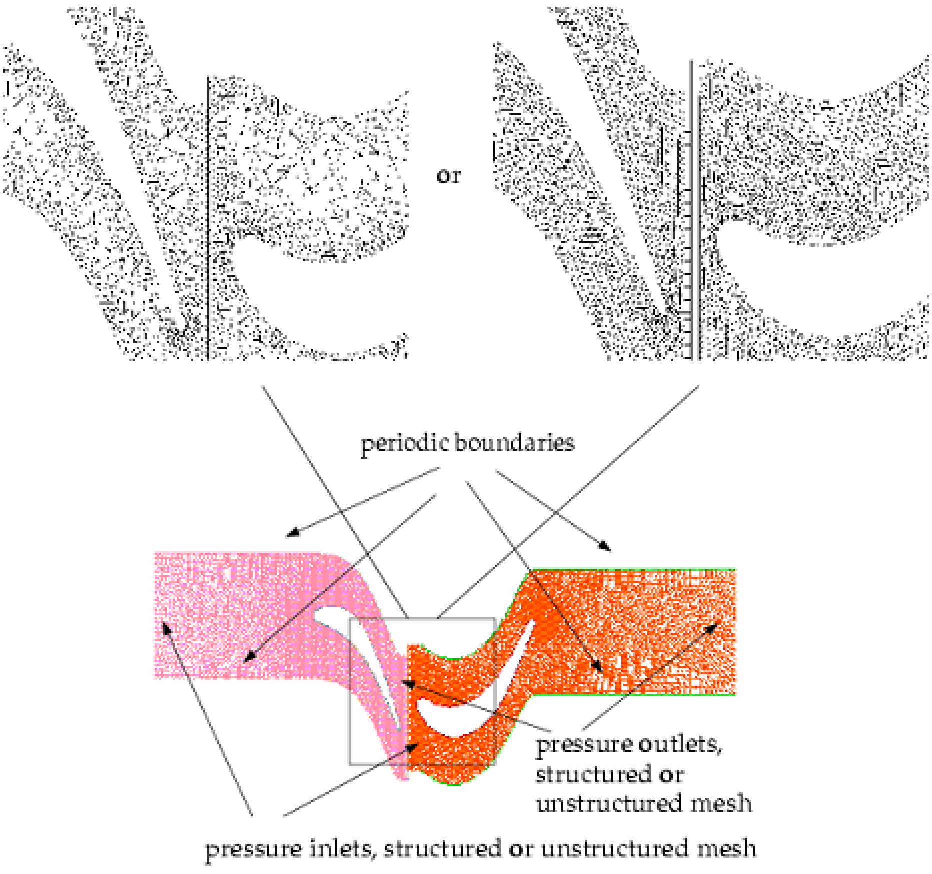


Σχήμα 4.3: Τρισδιάστατο πλέγμα γύρω από βαθμίδα στροβίλου

Με τη τεχνική αυτή, οι περιοδικές οριακές συνθήκες είναι για κάθε ροϊκή ποσότητα (ταχύτητες, πυκνότητα, πίεση) στη περιφερειακή διεύθυνση είναι:

$$\varphi(r, z, \theta = 0) = \varphi\left(r, z, \theta = \frac{2\pi}{N}\right)$$

όπου *N* είναι ο αριθμός των πτερυγίων του στροφείου.



Σχήμα 4.4: Περιοδικές συνθήκες για τον υπολογισμό ροϊκών πεδίων σε στροβιλοκινητήρες

5. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

5.1 Ορισμοί ευστάθειας και συνέπειας και σύγκλισης

Η συνέπεια είναι συνθήκη στο αριθμητικό σχήμα, δηλαδή το αριθμητικό σχήμα πρέπει να τείνει στη διαφορική εξίσωση, όταν τα βήματα ως προς το χρόνο Δt και το χώρο Δx τείνουν στο μηδέν.

Η ευστάθεια είναι συνθήκη στην αριθμητική λύση, δηλαδή όλα τα λάθη, όπως ο το λάθος στρογγύλευσης (λόγω της πεπερασμένων δεκαδικών που κρατά στη μνήμη ο υπολογιστής) πρέπει να παραμείνουν περιορισμένα καθώς η επαναληπτική διαδικασία προχωρά. Αυτό σημαίνει ότι για πεπερασμένες τιμές των Δt και Δx, το σφάλμα (που ορίζεται ως την διαφορά ανάμεσα στην αριθμητική λύση και την ακριβή λύση του αριθμητικού σχήματος) πρέπει να παραμείνει περιορισμένο όταν ο αριθμός των χρονικών βημάτων τείνει στο άπειρο.

Εάν θεωρήσουμε το σφάλμα $\bar{\varepsilon}_i^n$ σαν τη διαφορά μεταξύ της υπολογιστικής λύσης u_i^n και της ακριβούς λύσης των διακριτοποιημένων εξισώσεων $\bar{u}_i^n$, τότε:

$$\bar{\varepsilon}_i^n = u_i^n - \bar{u}_i^n$$

Η συνθήκη ευστάθειας θα μπορούσε να διατυπωθεί από την απαίτηση οποιουδήποτε σφάλματος $\bar{\varepsilon}_i^n$ ανάμεσα στο u_i^n και $\bar{u}_i^n$ θα πρέπει να παραμείνει ομοιόμορφα περιορισμένο για το $n \to \infty$ για σταθερό χρονικό βήμα Δt. Κατά συνέπεια, η συνθήκη ευστάθειας μπορεί να γραφεί:

$$\lim_{n\to\infty} |\bar{\varepsilon}_i^n| \leq K \quad \text{σε σταθερό χρονικό βήμα } \Delta t$$

με K και ανεξάρτητο του n.
Αυτή η συνθήκη ευστάθειας είναι μια απαίτηση μόνο του αριθμητικού σχήματος και δεν εμπεριέχει καμία συνθήκη για τη διαφορική εξίσωση. Η συνθήκη ευστάθειας πρέπει να ισχύει για κάθε είδος σφάλματος.

Ο αυστηρός ορισμός της ευστάθειας εμπεριέχει λεπτομέρειες προχωρημένων μαθηματικών εννοιών, οι οποίες δεν ενδιαφέρουν σε αυτό το εισαγωγικό στάδιο. Ένα σημείο που αξίζει να αναφερθεί ωστόσο, σχετικά με την παραπάνω συνθήκη είναι ότι δεν διασφαλίζει ότι το σφάλμα δεν θα γίνει υπερβολικά μεγάλο σε ενδιάμεσα χρονικά βήματα $t^n = n \cdot \Delta t$, καθώς παραμένει περιορισμένο εννοώντας ότι δεν τείνει στο άπειρο.
Ένας πιο γενικός ορισμός της ευστάθειας εισάγεται από τους Lax και Richtmyer (1956) και αναπτύσσεται τους Richtmyer και Morton (1967) βασισμένο στη χρονική συμπεριφορά της λύσης αντί της συμπεριφοράς των σφαλμάτων. Αυτά θα εφαρμοστούν με την μέθοδο von Neumann για την ανάλυση ευστάθειας. Αυτό το κριτήριο της ευστάθειας ορίζει ότι κάθε στοιχείο από τις αρχικές λύσεις δεν θα πρέπει να περιορίζονται χωρίς όριο σε σταθερές τιμές για $t^n = n \cdot \Delta t$ ιδίως για τις $n \to \infty$, Δt με Δt σταθερό.

Η σύγκλιση είναι μία συνθήκη στην αριθμητική λύση: πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι το αποτέλεσμα της αριθμητικής εξομοίωσης είναι μια σωστή αντιπροσώπευση του μοντέλου που λύνουμε, δηλ. η αριθμητική λύση πρέπει να τείνει στην ακριβή λύση του μαθηματικού μοντέλου, όταν τείνουν τα βήματα χρόνου και χώρου στο μηδέν.

ΣΥΝΕΠΕΙΑ (consistency)

→ Συνθήκη στη δομή αριθμητικής προσέγγισης

Διακριτοποιημένη εξίσωση ↔ Μ.Δ.Ε.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ (stability)

→ Συνθήκη για τη λύση του αριθμητικού σχήματος

Αριθμητική λύση ↔ Ακριβής λύση διακριτοποιημένων εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών.

ΣΥΓΚΛΙΣΗ (convergence)

→ Συνθήκη για τη λύση του αριθμητικού σχήματος

Αριθμητική λύση ↔ Ακριβής λύση Μ.Δ.Ε.

Η μαθηματική διατύπωση της συνθήκης σύγκλισης δηλώνει ότι η αριθμητική λύση u_i^n πρέπει να πλησιάσει την ακριβή λύση *u(x,t)* της διαφορικής εξίσωσης, για οποιοδήποτε σημείο του χώρου $x_i = i \cdot \Delta x$ και του χρόνου $t^n = n \cdot \Delta t$ όταν τα Δx και Δt τείνουν στο μηδέν, δηλ. όταν καθορίζεται το πλέγμα x_i και t^n είναι καθορισμένα. Αυτή η συνθήκη υπονοεί ότι το i και το n τείνουν στο άπειρο ενώ Δx και ο Δt τείνει σε μηδέν, έτσι ώστε τα γινόμενα $i \cdot \Delta x$ και $n \cdot \Delta t$ παραμένουν σταθερά.
Εδώ καθορίζουμε το λάθος $\bar{\varepsilon}_i^n$ ως διαφορά μεταξύ της υπολογισμένης λύσης και της ακριβούς λύσης της αναλυτικής εξίσωσης που αντιπροσωπεύει το επιλεγμένο μαθηματικό μοντέλο:

$$\bar{\varepsilon}_i^n = u_i^n - u(i\Delta x, n\Delta t)$$

Αυτό το λάθος πρέπει να ικανοποιήσει την ακόλουθη συνθήκη σύγκλισης

$$\lim_{\substack{\Delta x \to o \\ \Delta t \to 0}} |\bar{\varepsilon}_i^n| = 0 \text{ σε σταθερές τιμές του } x_i = i \cdot \Delta x \text{ και } t^n = n \cdot \Delta t$$

Σημειώστε εδώ ότι οι συνθήκες σύγκλισης και ευστάθειας δεν αναφέρονται στα ίδια λάθη.

Σαφώς οι όροι της συνέπειας, της ευστάθειας και της σύγκλισης συσχετίζονται ο ένας με τον άλλον και η ακριβής σχέση περιλαμβάνεται στο θεμελιώδες **θεώρημα ισοδυναμίας του Lax**, μια απόδειξη του οποίου μπορεί να βρεθεί στο τώρα κλασσικό βιβλίο των Richtyer και Morton (1967).

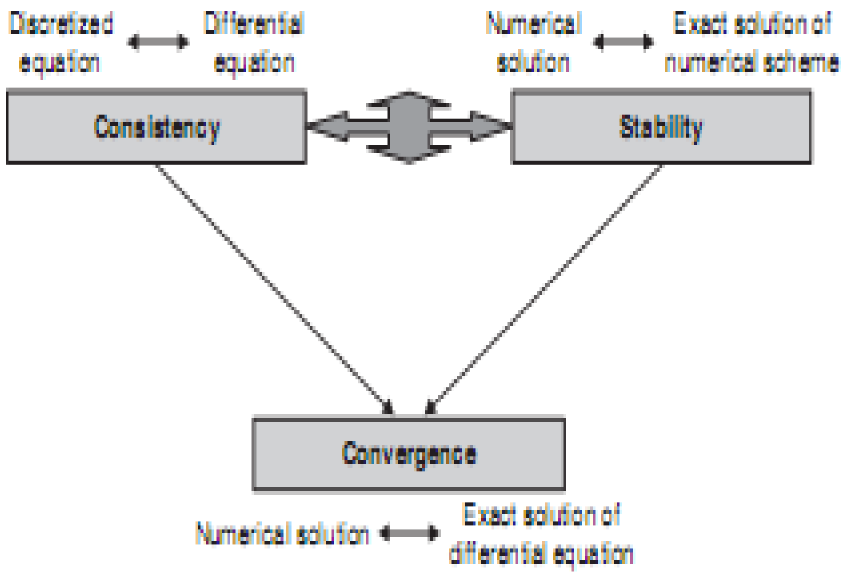
Θεώρημα ισοδυναμίας του Lax:

Για ένα καλά ορισμένο (well-posed) πρόβλημα αρχικών τιμών και για ένα συνεπές διακριτοποιημένο σχήμα, η ευστάθεια είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση.

Αυτό το θεμελιώδες θεώρημα δείχνει ότι προκειμένου να λυθεί ένα πρόβλημα χρονικά εξαρτημένο ή πρόβλημα αρχικών τιμών, πρέπει να πληρούνται δύο συνθήκες:

1η Συνθήκη: Ανάλυση της συνθήκης συνέπειας: Αυτό οδηγεί στον προσδιορισμό της τάξης ακρίβειας του σχήματος και του λάθους στρογγύλευσης του.
2η Συνθήκη: Ανάλυση των ιδιοτήτων ευστάθειας.
Ακολουθώντας αυτά τα δύο βήματα, η σύγκλιση μπορεί να επιτευχτεί χωρίς πρόσθετη ανάλυση.

Αυτή είναι μια κρίσιμη ιδιότητα, δεδομένου ότι εξασφαλίζει ότι αρκεί κανείς να εξετάσει για την ευστάθεια ενός συνεπούς σχήματος, ώστε να εξασφαλιστεί ότι η αριθμητική λύση θα παράσχει μια έγκυρη λύση του πραγματικού ροϊκού πεδίου που επιθυμούμε να εξομοιώσουμε αριθμητικά.



Σχήμα 5.1 Σχέσεις μεταξύ συνέπειας, ευστάθειας και σύγκλισης

Αυτές οι αμοιβαίες σχέσεις μεταξύ ευστάθειας, συνέπειας και σύγκλισης συνοψίζονται στο σχήμα 5.1 που εκφράζει, εν ολίγοις, ότι η συνθήκη ευστάθειας καθιερώνει μια σχέση μεταξύ της υπολογισμένης λύσης και της ακριβούς λύσης των διακριτοποιημένων εξισώσεων, ενώ ο όρος σύγκλισης συνδέει την υπολογισμένη λύση με την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης.
Στα παρακάτω εδάφια, θα εισαγάγουμε και θα περιγράψουμε τη σχετική μεθοδολογία για απλά χρονικά εξαρτημένα μονοδιάστατα μοντέλα

5.2 Ανάλυση ευστάθειας σε Μ.Δ.Ε.-μοντέλο

Θεωρούμε τη παραβολική Μ.Δ.Ε:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (5.1)$$

Και θεωρούμε τη διακριτοποιημένη της μορφή όπως παρακάτω:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t, \Delta x^2) \qquad (5.2)$$

Η διακριτοποιημένη αυτή μας δίνει 1ης τάξης ακρίβειας ως προς το χρόνο και 2ης τάξης ακριβείας ως προς το χώρο. Η αριθμητική λύση της Μ.Δ.Ε επηρεάζεται από δυο πηγές σφαλμάτων:

Λάθος διακριτοποίησης. Είναι η διαφορά ανάμεσα στην ακριβή (αναλυτική) λύση της Μ.Δ.Ε, της εξίσωσης (5.1) και την ακριβή (δίχως λάθη στρογγυλεύσεις) λύση της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών, όπως η εξίσωση (5.2). Το λάθος διακριτοποίησης είναι τα λάθη στρογγύλευσης της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών συν το οποίο λάθος εισάγεται από την αριθμητική επίλυση οριακών συνθηκών στα όρια του προβλήματος.

Λάθος στρογγύλευσης. Είναι το αριθμητικό λάθος που προκύπτει από τις επαναλήψεις υπολογισμών μια που ο υπολογιστής στρογγυλεύει τους αριθμούς σε μια επιθυμητή ακρίβεια.

Έτσι, ας θεωρούμε ότι:

$\underline{A}$: η αναλυτική λύση μιας Μ.Δ.Ε

$\underline{D}$: η ακριβής λύση της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών

$\underline{N}$: η ακριβής λύση από ένα υπολογιστή πεπερασμένης ακρίβειας

Τότε.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Λάθος διακριτοποίησης:}\quad A-D \\ &\text{Λάθος στρογγύλευσης:}\ \varepsilon = N-D \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Από τη (5.3) προκύπτει ότι: $N = D + \varepsilon$

Το λάθος στρογγύλευσης ε, θα το λέμε στο εξής απλά λάθος για συντομία

Η αριθμητική λύση *N* πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών Έτσι η (5.2) γίνεται:

$$\frac{D_i^{n+1}+\varepsilon_i^{n+1}-D_i^n-\varepsilon_i^n}{\Delta t} = \frac{D_{i+1}^n+\varepsilon_{i+1}^n-2D_i^n-2\varepsilon_i^n+D_{i-1}^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{5.4}$$

Αλλά εξ' ορισμού η *D* είναι η ακριβής λύση της (5.1) και πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση:

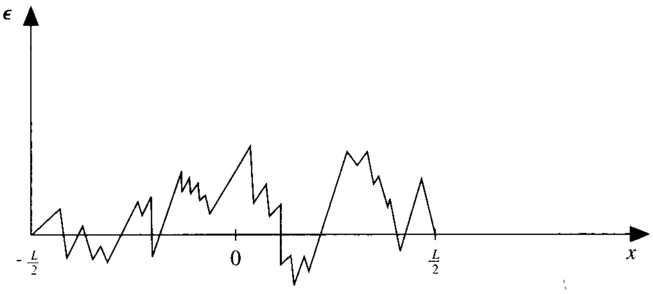
$$\frac{D_i^{n+1}-D_i^n}{\Delta t} = \frac{D_{i+1}^n-2D_i^n+D_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{5.5}$$

Αφαιρώντας τη (5.5) από την (5.4) προκύπτει ότι:

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}-\varepsilon_i^n}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{i+1}^n-2\varepsilon_i^n+\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{5.6}$$

Από την παραπάνω εξίσωση (5.6) προκύπτει ότι και το λάθος ε ικανοποιεί την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών.

Ας θεωρήσουμε τώρα την έννοια της ευστάθειας της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών (5.2).
Αν τα σφάλματα ε_i προϋπάρχουν σε κάποιο επίπεδο υπολογισμών, τότε η λύση είναι ευσταθής εάν τα σφάλματα ε_i για κάθε σημείο i φθίνουν (μειώνονται) καθώς η λύση περνά από την επανάληψη n στην επανάληψη $n+1$. Από την άλλη μεριά αν τα σφάλματα ε_i αυξάνονται καθώς η λύση περνά από την επανάληψη n στην επανάληψη $n+1$, τότε η λύση είναι ασταθής. Το σχήμα 5.2 δείχνει μία τυπική κατανομή του λάθους στογγύλευσης σε συνάρτηση με τη χωρική συντεταγμένη για το πρόβλημα της μονοδιάστατης αγωγής θερμότητας που περιγράφεται από τη παραβολική Μ.Δ.Ε. εξ. (5.1).



Σχήμα 5.2: Σχηματική αναπαράσταση του λάθους στρογγύλευσης σαν συνάρτηση του *x*

Έτσι για **ευσταθή λύση** , πρέπει ο **παράγοντας ενίσχυσης** (amplification factor) που ορίζεται ως:

$$G = \left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| \leq 1 \tag{5.7}$$

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή λαθών κατά μήκος του άξονα x μπορεί να προσεγγιστεί από σειρές Fourier κατά x και ότι η κατανομή αυτή είναι εκθετικής μορφής ως προς το χρόνο:

$$\varepsilon(x,t) = e^{at} \sum_m e^{ikmt} \tag{5.8}$$

όπου k_m είναι ο αριθμός κύματος (wave number) και το α είναι δεκαδικός αριθμός.

Τη στιγμή που η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών είναι γραμμική, η εξίσωση (5.8) μπορεί να αντικατασταθεί στην εξίσωση (5.6). Ας ασχοληθούμε με έναν όρο της σειράς και ας γράψουμε ότι:

$$\varepsilon_m(x,t) = e^{at} e^{ik_m x} \tag{5.9}$$

Αντικαθιστώντας την (5.8) στην (5.6) έχουμε:

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x}}{\Delta t} = \frac{e^{at} e^{ik_m (x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m (x-\Delta x)}}{(\Delta x)^2} \tag{5.10}$$

Διαιρώντας την (5.10) δια τη ποσότητα $e^{at} e^{ik_m x}$ παίρνουμε ότι:

$$\frac{e^{a\Delta t} - 1}{\Delta t} = \frac{e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-ik_m \Delta x}}{\Delta x^2} \Rightarrow e^{a\Delta t} = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(e^{ik_m \Delta x} + e^{-ik_m \Delta x} - 2\right)$$

Αλλά

$$\cos(k_m \Delta x) = \frac{e^{ik_m \Delta x} + e^{-ik_m \Delta x}}{2}$$

Έτσι η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$e^{a\Delta t} = 1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[\cos(k_m \Delta x) - 1\right]$$

Από την τριγωνομετρία:

$$sin^2\left[\frac{k_m \Delta x}{2}\right] = \frac{1 - \cos(k_m \Delta x)}{2}$$

και τελικά έχουμε ότι:

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} sin^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right)$$

Ο λόγος:

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} = \frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x}}{e^{at} e^{ik_m x}} = e^{a\Delta t}$$

$$=> \quad \left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| = |\varepsilon^{a\Delta t}| = \left|1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} sin^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right)\right| \leq 1 \tag{5.11}$$

Η εξίσωση (5.11) πρέπει να ικανοποιείται για να έχουμε ευσταθή λύση για την Μ.Δ.Ε. Στην εξίσωση (5.11) ο παράγοντας:

$$G = \left|1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} sin^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right)\right|$$

Για ευσταθή λύση πρέπει:

$G \leq 1$

και τότε υπάρχουν δυο συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

(i) $1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} sin^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right) \leq 1 \quad => \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} sin^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right) \geq 0$

Αφού το $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ είναι πάντα μεγαλύτερο από το μηδέν η συνθήκη αυτή πάντα ισχύει.

(ii) $1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} sin^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right) \geq -1 \quad => \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} sin^2\left(\frac{k_m \Delta x}{2}\right) - 1 \leq 1$

που για να ισχύει πρέπει:

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \tag{5.12}$$

Η εξίσωση (5.12) ονομάζεται **απαίτηση ευστάθειας** για να είναι η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών (5.2) ευσταθής. Αυτό σημαίνει ότι για δεδομένο πλέγμα (άρα για δεδομένο *Δx*) η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του χρονικού βήματος *Δt* πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση (5.12).

Όταν $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$ το σφάλμα δεν θα αυξάνεται για διαδοχικά χρονικά βήματα και από η Μ.Δ.Ε θα συγκλίνει με ευσταθή τρόπο.

Από την άλλη μεριά όταν $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} > \frac{1}{2}$, τότε το σφάλμα θα γίνεται όλο ένα και μεγαλύτερο και η λύση θα αποκλίνει.

Η παραπάνω ανάλυση είναι ένα παράδειγμα γενικευμένης ανάλυσης ευστάθειας που ονομάζεται μέθοδος ευστάθειας του von Neumann και χρησιμοποιείται συχνά για μελέτη ευστάθειας γραμμικών εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών.

Ας εξετάσουμε όμως τα χαρακτηριστικά ευστάθειας μιας υπερβολικής Μ.Δ.Ε που είναι η εξίσωση κύματος 1ης τάξης:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{5.13}$$

Διακριτοποιώντας τη χωρική μερική παράγωγο με κεντρικές διαφορές:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Η χρονική παράγωγος $\frac{\partial u}{\partial t}$ μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n}}{\Delta t} = \frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^{n} + u_{i-1}^{n})}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Συνδυάζοντας τις δυο παραπάνω εξισώσεις και λύνοντας ως προς u_i^{n+1} έχουμε ότι:

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^{n} + u_{i-1}^{n}}{\Delta t} - c\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}}{2}\right) \tag{5.14}$$

Η εξίσωση (5.14) είναι γνωστή σαν η μέθοδος του Lax πήρε το όνομα του μαθηματικού Peter Lax που την πρότεινε. Υποθέτουμε ότι το σφάλμα είναι της μορφής

$$\varepsilon_{m(x,t)} = e^{at}e^{ik_m x}$$

όπως και προηγουμένως και αντικαθιστώντας στην (5.14) ο παράγοντας ενίσχυσης G, γίνεται:

$$G = cos(k_m\,\Delta x) - iC\,sin(k_m\,\Delta x) \tag{5.15}$$

Όπου $C = c\frac{\Delta t}{\Delta x} <= 1$

Η απαίτηση ευστάθειας είναι ότι $|e^{at}| \leq 1$
Εφαρμοζόμενα στην (5.15) δίνει ότι:

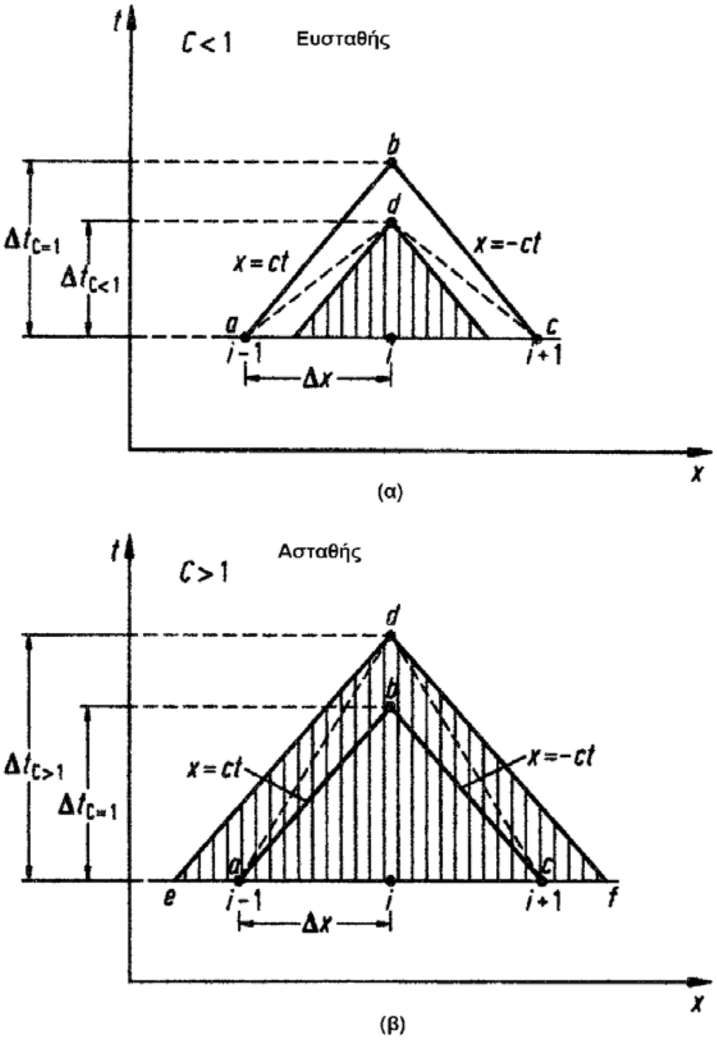
$$C = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{5.16}$$

Η ποσότητα C στην εξίσωση (5.16) ονομάζεται **αριθμός του Courant**. Η εξίσωση (5.16) λέει ότι πρέπει: $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$, για να είναι ευσταθής η αριθμητική λύση της Μ.Δ.Ε (εξίσωση (5.14)). Η εξίσωση (5.16) ονομάζεται επίσης συνθήκη των Courant-Friedrichs-Lewy ή ***συνθήκη CFL*** και είναι ένα πολύ σημαντικό κριτήριο για την ευστάθεια υπερβολικών Μ.Δ.Ε.

Ας εξετάσουμε τώρα την φυσική σημασία της συνθήκης CFL θεωρώντας την 2ης τάξης εξίσωση κύματος:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.17}$$

Οι χαρακτηριστικές γραμμές της εξίσωσης (5.17) είναι ότι: *x=ct* (χαρακτηριστική που μεταδίδεται προς τα δεξιά) και *x=-ct* (χαρακτηριστική που μεταδίδεται προς τα αριστερά) και φαίνονται στο σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3: Απεικόνιση της φυσικής σημασίας της συνθήκης CFL

Στα δυο τμήματα (α) και (β) του σχήματος 5.3 έστω ότι το σημείο b είναι η τομή της χαρακτηριστικής που μεταδίδεται προς δεξιά ξεκινώντας από το σημείο (*i-1*) με τη χαρακτηριστική γραμμή που μεταδίδεται προς τα αριστερά ξεκινώντας από το σημείο (*i+1*).

Για τη ΜΔΕ της εξίσωσης (5.17) η συνθήκη CFL όπου εκφράζεται από την εξίσωση (5.16), ισχύει σαν κριτήριο ευστάθειας. Συμβολίζουμε με $\Delta t_c=1$ τη τιμή του Δt όταν C=1. Τότε η τιμή $\Delta t_c = 1 = \frac{\Delta x}{c}$ είναι η κάθετη στον *x*-άξονα από το σημείο b ως το σημείο *i* του σχήματος 5.3α.

Υποθέτουμε ότι C<1, τότε όπως φαίνεται από το σχήμα 5.3α, $\Delta t_c<1 < \Delta t_c=1$

Αφού η τιμή του d υπολογίζεται αριθμητικά από τις τιμές των σημείων i-1 και i+1 το αριθμητικό πεδίο για το σημείο d είναι το τρίγωνο adc στο σχήμα 5.3α. Το αναλυτικό πεδίο για το σχήμα d είναι το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο του σχήματος 5.3α το οποίο ορίζεται από τις χαρακτηριστικές που διέρχονται από το σημείο d. Παρατηρούμε από το σχήμα 5.3α ότι το αριθμητικό πεδίο στο d εμπεριέχει το αναλυτικό πεδίο.

Αντίθετα στη περίπτωση C>1 στο σχήμα 5.3β τότε από την εξίσωση (5.16) προκύπτει ότι $\Delta t_c > \Delta t_c=1$.

Έστω ότι το σημείο d στο σχήμα 5.3β αντιστοιχεί στο σημείο τη χρονική στιγμή $t+\Delta t_c>1$.Τη στιγμή που το σημείο υπολογίζεται αριθμητικά από τις τιμές των σημείων *(i-1)* και *(i+1)* το αριθμητικό πεδίο για το σημείο d είναι το τρίγωνο adc στο σχήμα 5.3β Το αναλυτικό πεδίο για σημείο d είναι το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο στο σχήμα 5.3β.

Παρατηρούμε ότι το αριθμητικό πεδίο δεν περιλαμβάνει όλο το αναλυτικό πεδίο και το γεγονός αυτό οδηγεί σε ασταθή συμπεριφορά το αριθμητικό σχήμα. Έτσι δίνουμε την ακόλουθη φυσική σημασία της συνθήκης CFL:

“Για ευστάθεια πρέπει το υπολογιστικό πεδίο να περιλαμβάνει όλο το αναλυτικό πεδίο”

Τα παραπάνω έχουν να κάνουν με την ευστάθεια. Το θέμα της ακριβείας (accuracy) είναι εντελώς διαφορετικό άλλα μπορεί να εξεταστεί χρησιμοποιώντας το σχήμα 5.3α. Παρατηρούμε ότι το αναλυτικό πεδίο (περιοχή) εξάρτησης του σημείου d είναι το γραμμοσκιασμένο τρίγωνο adc. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του d εξαρτάται από αυτές των σημείων εντός του τριγώνου.
Όμως τα σημεία του πλέγματος (i-1) και ($i+1$) βρίσκονται εκτός της περιοχής εξάρτησης και έτσι θεωρητικά δεν επηρεάζουν τη τιμή του d Από την άλλη μεριά ο αριθμητικός υπολογισμός του σημείου d παίρνει πληροφορίες από τα σημεία (i-1) και ($i+1$) Η κατάσταση αυτή γίνεται $\Delta t_c<1<\Delta t_c=1$.
Στην περίπτωση αυτή αν και οι υπολογισμοί είναι ευσταθείς τα αποτελέσματα μπορεί να μην είναι ακριβή λόγο της μεγάλης αντιστοιχίας μεταξύ της περιοχής εξάρτησης του σημείου d και τη θέσης των σημείων του πλέγματος που χρησιμοποιώντας για τον υπολογισμό των σημείων d.

Συνοψίζοντας συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός CFL πρέπει να είναι μικρότερος η όσος του ένα για ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος αλλά ταυτόχρονα είναι επιθυμητό να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στη μονάδα για καλή ακρίβεια.

5.3 Ισοδύναμη Διαφορική Εξίσωση ενός Αριθμητικού Σχήματος

Η συνέπεια εκφράζει ότι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις πρέπει να τείνουν στις διαφορικές εξισώσεις με τις οποίες συσχετίζονται, όταν τα Δt και Δx τείνουν στο μηδέν. Αυτή η μάλλον απλή δήλωση εντούτοις θα μας οδηγήσει στην εισαγωγή δύο ουσιαστικών ιδιοτήτων αριθμητικά διακριτοποιημένων, δηλαδή **το λάθος αποκοπής (στρογγύλευσης)** ενός αριθμητικού σχήματος και **της ισοδύναμης διαφορικής εξίσωσης (Equivalent Differential Equation).**
Εκφράζουν μία νέα κατηγορία σχέσεων μεταξύ των αριθμητικών και ακριβών λύσεων, το αριθμητικό σχέδιο και η διαφορική εξίσωση, μέσω του λάθους αποκοπής (truncation). Η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση θα εμφανιστεί έπειτα ως ισχυρότερη έκφραση αυτών των σχέσεων. Ένα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα της ανάλυσης που ακολουθεί είναι ότι η αριθμητική λύση, λόγω των λαθών διακριτοποίησης, δεν ικανοποιεί τις εξισώσεις του μαθηματικού μοντέλου, αλλά είναι μια λύση της ισοδύναμης διαφορικής εξίσωσης. Ως εκ τούτου, οποιεσδήποτε πληροφορίες για τις ιδιότητες της λύσης της ισοδύναμης διαφορικής εξίσωσης (EDE), θα μας δώσει πληροφορίες για τη συμπεριφορά και τα σχετικά λάθη της αριθμητικής λύσης.

Προκειμένου να σας καθοδηγήσουμε μέσω των βημάτων αυτών, εφαρμόζουμε την ακόλουθη μεθοδολογία:

Προκειμένου να ελέγξουμε για τη συνέπεια θεωρούμε τη διακριτοποιημένη εξίσωση για το άγνωστο u_i^n .
Αυτή η εξίσωση περιέχει τις τιμές σε άλλα σημεία $(i+j)$ και άλλα χρονικά επίπεδα $(n+k)$:

- Οι τιμές της συνάρτησης u_{i+j}^{n+k} στο αριθμητικό σχήμα αναπτύσσονται σε μια σειρά Taylor γύρω από το u_i^n και όροι μεγάλης τάξης μένουν για να αντικαταστήσουν αυτά τα αναπτύγματα πίσω στην αριθμητική εξίσωση.
- Μια εξίσωση λαμβάνεται γράφοντας το αριθμητικό σχήμα σαν την εξίσωση του μαθηματικού μοντέλου συν τους πρόσθετους όρους ως αποτέλεσμα της σειράς Taylor. Αυτοί οι πρόσθετοι όροι ονομάζονται **λάθος αποκοπής** που συμβολίζεται με $\boldsymbol{\varepsilon_T}$
- Το λάθος αποκοπής θα έχει τη μορφή:

$$\varepsilon_T = 0\,(\Delta t^q, \Delta x^p) \tag{5.18}$$

όπου το p και το q είναι οι χαμηλότερες τιμές που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα του λάθους αποκοπής. Αυτό καθορίζει τη **τάξη της ακρίβειας του σχήματος**. Η εξίσωση (5.18) μας λέει πράγματι ότι το εξεταζόμενο σχήμα είναι τάξης q ως προς στο χρόνο και p ως προς το χώρο.

Η συνθήκη για συνέπεια μπορεί να δηλωθεί ως εξής: Ένα σχήμα είναι συνεπές εάν το λάθος αποκοπής τείνει σε μηδέν για *Δt, Δx* που τείνουν στο μηδέν. Αυτό μπορεί επίσης να δηλωθεί ως απαίτηση ότι οι τάξεις ακρίβειας ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο πρέπει να είστε θετικές για οποιουσδήποτε συνδυασμούς των Δt και Δx όταν τείνουν και τα δύο σε μηδέν. Μπορούμε να επιλέξουμε το u_i^n αντιπροσωπεύοντας είτε την ακριβή λύση του μαθηματικού μοντέλου, είτε ως ακριβή λύση του αριθμητικού σχήματος. Αυτό θα οδηγήσει σε διαφορετικές, αλλά συμπληρωματικές ερμηνείες.

Για να επεξηγήσουμε τη μεθοδολογία και τα βήματα που οδηγούν στην **ισοδύναμη διαφορική εξίσωση** του αριθμητικού σχεδίου, θεωρούμε πρώτα τη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση μεταφοράς (convection).

$$u_t + au_x = 0 \tag{5.19}$$

και επιλέγουμε, για πρώτο παράδειγμα, κεντρική διακριτοποίηση δεύτερης τάξης ακρίβειας ως προς το χώρο και ρητή (explicit) πρώτης τάξης ακρίβεια προς τα εμπρός διαφορές ως προς το χρόνο. Αυτό είναι το σχήμα:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) = 0 \tag{5.20}$$

Βήμα 1: Γράφουμε το ανάπτυγμα σειράς Taylor ως προς x και ως προς t :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t (u_i)_i^n + \frac{\Delta t^2}{2}(u_{tt})_i^n + \frac{\Delta t^3}{6}(u_{ttt})_i^n + \cdots \tag{5.21}$$

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x (u_x)_i^n + \frac{\Delta x^2}{2}(u_{xx})_i^n + \frac{\Delta x^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \cdots \tag{5.22}$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x (u_x)_i^n + \frac{\Delta x^2}{2}(u_{xx})_i^n - \frac{\Delta x^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \cdots \tag{5.23}$$

όπου οι δείκτες x και t δείχνουν μερικές παραγώγους ως προς το χώρο και ως προς το χρόνο αντίστοιχα.

Βήμα 2: Αντικαθιστούμε αυτά τα αναπτύγματα κατά Taylor στην εξίσωση (5.20) και παίρνουμε:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \alpha\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - (u_t + a \cdot u_x)_i^n = \frac{\Delta t}{2}(u_{tt})_i^n + \frac{\Delta x^2}{6}a(u_{xxx})_i^n + O(\Delta t^2, \Delta x^4) \tag{5.24}$$

Η δεξιά πλευρά αυτής της σχέσης συνέπειας αντιπροσωπεύει το **λάθος αποκοπής ε_T** που είναι ίσο με:

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta t}{2}(u_{tt})_i^n + a\frac{\Delta x^2}{6}(u_{xxx})_i^n + O(\Delta t^2, \Delta x^4) \tag{5.25}$$

Το λάθος αποκοπής (truncation error) επομένως ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ του αριθμητικού σχήματος και της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Φαίνεται επίσης από την παραπάνω εξίσωση ότι το δεξί μέρος εξαφανίζεται όταν τα Δt και Δx τείνουν στο μηδέν και επομένως το σχήμα (5.20) είναι συνεπές. Όπως αναμένεται, η ακρίβεια του σχήματος είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο και δεύτερης τάξης ως προς το χώρο, δεδομένου ότι το δεξί μέρος πηγαίνει στο μηδέν ως τη πρώτη δύναμη του Δt και ως προς τη δεύτερη δύναμη του Δx. Εντούτοις εάν υπάρχει μία εξάρτηση μεταξύ του Δt και του Δx, όταν τείνουν και οι δύο σε μηδέν, τότε η γενική ακρίβεια του σχήματος θα είναι διαφορετική. Εάν ο λόγος $\Delta t/\Delta x$ κρατηθεί σταθερός, τότε το σχήμα έχει μια γενική πρώτης τάξης ακρίβεια, ενώ θα ήταν δεύτερης τάξης ακρίβειας, εάν η ποσότητα $\Delta t/\Delta x^2$ θα κρατιόταν σταθερή.
Η εξίσωση συνέπειας (5.24) μπορεί να ερμηνευθεί με δύο ισοδύναμους τρόπους:

Πρώτη ερμηνεία της εξίσωσης συνέπειας
Το ανάπτυγμα σειράς κατά Taylor εκτελείται γύρω από την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης, δηλ. γύρω από το $u\,(i\Delta x, n\Delta t) = u_i^n$, όπου το $u\,(x, t)$ είναι η αναλυτική λύση. Η εξίσωση (5.24) έπειτα γίνεται:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\alpha\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}=\varepsilon_T \qquad (5.26)$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι η ακριβής λύση u_i^n δεν ικανοποιεί ακριβώς την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών, αλλά είναι λύση ενός τροποποιημένου σχήματος, με το λάθος αποκοπής στη δεξιά πλευρά. Μπορούμε επίσης να δούμε την εξίσωση (5.26) σαν τον ορισμό του λάθους αποκοπής: το λάθος αποκοπής είναι ίσο με το υπόλοιπο της διακριτοποιημένης εξίσωσης για τις τιμές του u_i^n ίσες με την ακριβή, αναλυτική λύση.

Δεύτερη ερμηνεία της εξίσωσης συνέπειας

Το ανάπτυγμα σειράς κατά Taylor εκτελείται γύρω από την ακριβή λύση της διακριτοποιμένης εξίσωσης $\bar{u}_i^n$. Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση (5.24) γίνεται:

$$(\bar{u}_t+a\bar{u}_x)_i^n=-\frac{\Delta t}{2}(\bar{u}_{tt})_i^n+a\frac{\Delta x^2}{6}(\bar{u}_{xxx})_i^n+O(\Delta t^2,\Delta x^4)=-\bar{\varepsilon}_T \qquad (5.27)$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι η ακριβής λύση της διακριτοποιημένης εξίσωσης δεν ικανοποιεί ακριβώς τη διαφορική εξίσωση για πεπερασμένες τιμές των *Δt* και *Δx* (που είναι πάντα η περίπτωση σε πρακτικούς υπολογισμούς).

Εντούτοις, η λύση του αριθμητικού σχήματος ικανοποιεί μια **ισοδύναμη διαφορική εξίσωση (EDE)**, που μερικές φορές ονομάζεται **τροποποιημένη διαφορική εξίσωση**, η οποία διαφέρει από την αρχική μερική διαφορική εξίσωση λόγω του λάθους αποκοπής που αντιπροσωπεύεται από τους όρους στο δεξί μέρος.

Πραγματικά, η **ισοδύναμη διαφορική εξίσωση** δεν βγαίνει ακριβώς από την εξίσωση (5.27), δεδομένου ότι το δεξί μέρος περιέχει παραγώγους μεγαλύτερης τάξης ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο. Προκειμένου να αποκτηθεί μια καλύτερη επίγνωση των ιδιοτήτων αυτής της εξίσωσης, ο κανόνας είναι να απαλειφθούν οι χαμηλότερης τάξης χρονικές παράγωγοι στο λάθος αποκοπής, μέχρι τους όρους μεγαλύτερης τάξης, με την εφαρμογή της ίδιας ισοδύναμης διαφορικής εξίσωσης για να αντικατασταθούν από τις ισοδύναμες χωρικές παραγώγους. Εφαρμόζοντας αυτόν τον κανόνα στην εξίσωση (5.27), παίρνουμε:

$$(\bar{u}_t)_i^n=-\alpha(\bar{u}_x)_i^n+O(\Delta t,\Delta x^2) \qquad (5.28)$$

όπου όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι ανάλογοι προς Δt και Δx^2, στη χαμηλότερη τάξη.
Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την εξίσωση αυτή, παίρνουμε:

$$(\bar{u}_{tt})_i^n=-\alpha(\bar{u}_{xt})_i^n+O(\Delta t,\Delta x^2)=-a((\bar{u}_t)_x)_i^n+O(\Delta t,\Delta x^2) \qquad (5.29)$$

Για να αποβάλουμε τη χρονική παράγωγο στον όρο u_{xt} του δεξιού μέρους, εφαρμόζουμε ακόμα μια φορά την εξίσωση (5.28) και παίρνουμε:

$$(\bar{u}_{tt})_i^n=-a((\bar{u}_t)_x)_i^n+O(\Delta t,\Delta x^2)=+\alpha(\bar{u}_{xx})_i^n+O(\Delta t,\Delta x^2) \qquad (5.30)$$

Ως εκ τούτου, το λάθος αποκοπής μπορεί να γραφτεί:

$$\bar{\varepsilon}_T=a^2\frac{\Delta t}{2}(\bar{u}_{xx})_i^n+a\frac{\Delta x^2}{6}(\bar{u}_{xxx})_i^n+O(\Delta t^2,\Delta x^4) \qquad (5.31)$$

Μέχρι τη χαμηλότερη τάξη, **η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση** (5.27) γίνεται

$$\bar{u}_t+a\bar{u}_x=-\frac{\Delta t}{2}a^2\bar{u}_{xx}+O(\Delta t^2,\Delta x^2) \qquad (5.32)$$

Αυτό που βλέπουμε εδώ είναι ότι η εξίσωση που ικανοποιείται από το ακριβή αριθμητική λύση $\bar{u}$ δεν είναι η αρχική εξίσωση μεταφοράς (5.19), αλλά είναι αντ' αυτού μια εξίσωση μεταφοράς-διάχυσης (convection-diffusion), με έναν **αριθμητικό συντελεστή διάχυσης** (επίσης αποκαλούμενης **αριθμητικό ιξώδες**) ίσο με $(-a^2 \Delta t/2)$.

Αυτό συμβαίνει γιατί το αντίστοιχο σχήμα είναι **ασταθές**. Πράγματι, η δεξιά πλευρά αντιπροσωπεύει έναν όρο διάχυσης με έναν αρνητικό συντελεστή ιξώδους ίσο με $(-a^2 \Delta t/2)$. Ένα θετικό ιξώδες είναι γνωστό για να μετριάζει τις αριθμητικές ταλαντώσεις και τις ισχυρές κλίσεις: ένα αρνητικό ιξώδες αφ' ενός, θα ενισχύσει εκθετικά κάθε διαταραχή, περιγράφοντας τα φαινόμενα έκρηξης. Δεδομένου ότι η ακριβής αριθμητική λύση ικανοποιεί την ανωτέρω εξίσωση, σημαίνει ότι η συμπεριφορά της είναι ασταθής.

Ως εκ τούτου, ο προσδιορισμός της ισοδύναμης διαφορικής εξίσωσης και, το λάθος αποκοπής, παρέχει τις ουσιαστικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης.

Γενικοί κανόνες για τη ισοδύναμη διαφορική εξίσωση

Μπορούμε τώρα να συνοψίσουμε τους κανόνες για την παραγωγή της ισοδύναμης διαφορικής εξίσωσης ενός αριθμητικού σχήματος.

Ορίζοντας D(U) =0 το μαθηματικό μοντέλο που επιθυμούμε να λύσουμε αριθμητικά και με N(U_i^n)=0 το αριθμητικό σχήμα, συνεχίζουμε ως ακολούθως:

- Εκτελούμε την ανάλυση συνέπειας και λάβετε το λάθος αποκοπής ε_T, με τη γενίκευση της εξίσωσης (5.24) όπως

$$\mathrm{N}(U_i^n) - \mathrm{D}\,(U_i^n) = \varepsilon_T \qquad (5.33)$$

- Θεωρούμε $\overline{U}_i^n$ την ακριβή λύση του αριθμητικού σχήματος που ορίζεται σαν

$$\mathrm{N}(\overline{U}_i^n) = 0 \qquad (5.34)$$

- Οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί από την αριθμητική ακριβή λύση

$$\mathrm{D}(\overline{U}_i^n) = -\varepsilon_T \qquad (5.35)$$

- Αντικαθιστούμε τις χαμηλότερες χρονικές παραγώγους στο λάθος αποκοπής από τις χωρικές παραγώγους, που λαμβάνεται με την εφαρμογή της εξίσωσης (5.35) για να εκτελεσθεί αυτή η αντικατάσταση.

- Η **ισοδύναμη διαφορική εξίσωση** ορίζεται ως η εξίσωση που λαμβάνεται μετά από εκείνο το βήμα αντικατάστασης, που περιορίζει στη χαμηλότερη τάξη, τους όρους του τροποποιημένου λάθους αποκοπής, το οποίο περιέχει τώρα μόνο τις χωρικές παραγώγους.

- Εάν θα μπορούσαμε να λύσουμε αυτήν την ισοδύναμη διαφορική εξίσωση, θα μπορούσαμε να ξέρουμε τις πλήρεις ιδιότητες συμπεριφοράς και λάθους της αριθμητικής λύσης του σχήματος μας.

Τα παραπάνω επεξηγούνται με ένα δεύτερο παράδειγμα που αφορά τις προς τα πίσω (upwind) διαφορές πρώτης τάξης (First Order Upwind, FOU) για τη γραμμική εξίσωση μεταφοράς:

$$\frac{\mathrm{u_i^{n+1}} - \mathrm{u_i^n}}{\Delta \mathrm{t}} + \frac{a}{\Delta \mathrm{x}}\,(\mathrm{u_i^n} - \mathrm{u_{i-1}^n}) = 0 \qquad (5.36)$$

Εισάγοντας τα αναπτύγματα του Taylor (5.21) και (5.23) σε αυτό το σχήμα, λαμβάνουμε, μετά από τα ανωτέρω βήματα την ισοδύναμη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + a\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \frac{a\Delta x}{2}\left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} = u_{num}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} \qquad (5.37)$$

Εδώ πάλι παρατηρούμε ότι η αριθμητική λύση υπακούει μια εξίσωση μεταφοράς-διάχυσης, αντί της αναμενόμενης εξίσωσης μεταφοράς. Η διακριτοποιημένη εξίσωση (5.37) έχει εισαγάγει πράγματι μια **αριθμητική διάχυση ή ένα αριθμητικό ιξώδες** ίση με:

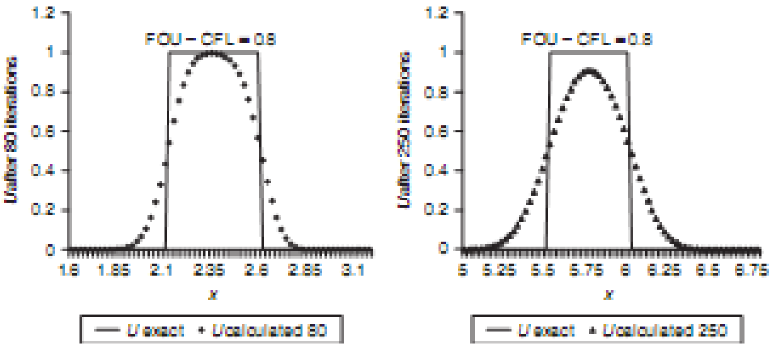
$$u_{num} = \frac{a\Delta x}{2}\left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) \tag{5.38}$$

Αυτό το αριθμητικό ιξώδες πρέπει να είναι θετικό για τη λύση αυτής της εξίσωσης. Διαφορετικά, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου το αριθμητικό ιξώδες είναι αρνητικό, η αριθμητική λύση θα αυξηθεί κατά τρόπο αόριστο με το χρόνο και το σχήμα θα είναι ασταθές. Ως εκ τούτου για την ευστάθεια του σχήματος πρώτης τάξης προς τα πίσω διαφορές, να έχουμε:

$$0 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{5.39}$$

Ο όρος ευστάθειας απαιτεί α > 0 και ο αριθμός **Courant ή CFL (Courant Friendricks Lewy)** $CFL = \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}$ πρέπει να είναι μικρότερος (ή ίσος) από το 1.
Αυτή η συνθήκη έχει μια πολύ βαθιά φυσική σημασία που θα αναλυθεί στη συνέχεια. Σημειώστε ότι το σχέδιο είναι ασταθές για τις αρνητικές ταχύτητες α<0.

Για σταθερή τιμή του αριθμού Courant, το σχήμα των προς τα πίσω (upwind) διαφορών πρώτης τάξης (FOU) περιέχει αριθμητικό ιξώδες τάξης Δx, που είναι ιδιαίτερα μεγάλο, δεδομένου ότι είναι μόνο πρώτης τάξης ως προς το χρόνο και ως προς στο χώρο. Επομένως το σχήμα FOU έχει μια μικρής τάξης ακρίβεια και η λύση που μας δίνει είναι που είναι πάρα πολύ ιξώδης (diffusive). Αυτό μπορεί επίσης να φανεί στο παράδειγμα του σχήματος 5.4 που παρουσιάζει αριθμητική λύση μιας κινούμενης ασυνέχειας μετά από 80 και 250 χρονικά βήματα, για έναν αριθμό CFL=0.8. Η προοδευτική αριθμητική διάχυση φαίνεται από τη μορφή της αριθμητικής λύσης, λόγω του αριθμητικού ιξώδους αυτού του σχήματος. Αυτή η διάχυση θα συνεχιστεί φυσικά καθώς αυξάνεται ο αριθμός επαναλήψεων των χρονικών βημάτων.



Σχήμα 5.4:Αριθμητική λύση της εξίσωσης 5.19 μιας κινούμενης ασυνέχειας που λαμβάνεται με το σχήμα FOU (πρώτης τάξης προς τα πίσω διαφορές ως προς το χρόνο) μετά από 80 και 250 χρονικά βήματα, με CFL=0.8

5.4 Η μέθοδος von Neumann για την ανάλυση ευστάθειας

Μόλις ελεγχθεί η συνέπεια, το επόμενο βήμα είναι να εξεταστεί η συμπεριφορά ευστάθειας του αριθμητικού σχήματος. Με το θεώρημα ισοδυναμίας, θα έχουμε έπειτα τη βεβαιότητα ότι ολόκληρη η προσομοίωση θα ικανοποιήσει τη σύγκλιση, στην περιοχή ευστάθειας του σχήματος.

Πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την ανάλυση της ευστάθειας, σχεδόν όλες τους, που περιορίζονται στα γραμμικά προβλήματα. Αλλά ακόμη και με αυτόν τον περιορισμό, η έρευνα για την ευστάθεια για τα προβλήματα αρχικών και οριακών τιμών, μπορεί να περιπλεχτεί εξαιρετικά, ιδιαίτερα στη περιοχή των οριακών συνθηκών και της αριθμητικής εξομοίωσης τους.

Για να χωρίσουμε την επιρροή των οριακών συνθηκών από την κύρια ανάλυση ευστάθειας, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ελαφρώς διαφορετικό πρόβλημα με τους περιοδικές οριακές συνθήκες. Αυτό είναι η βάση της ανάλυσης ευστάθειας κατά Von Neumann που έχει καθιερωθεί σαν η πιο έγκυρη και αξιόπιστη από τις μεθόδους ευστάθειας.

5.4.1 Αποσύνθεση (decomposition) της λύσης με σειρές Fourier

Εάν $\bar{u}_i^n$ είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών και u_i^n η αριθμητικά υπολογισμένη λύση, η διαφορά πρέπει να οφείλεται σε λάθη στρογγύλευσης και σε λάθη των αρχικών τιμών.

Ως εκ τούτου,

$$u_i^n = \bar{u}_i^n + \bar{\varepsilon}_i^n \qquad (5.40)$$

όπου $\bar{\varepsilon}_i^n$ δείχνει το λάθος στο χρονικό επίπεδο n στο σημείο πλέγματος i. Εξ ορισμού, η ακριβής λύση $\bar{u}_i^n$ ικανοποιεί ακριβώς την αριθμητική εξίσωση σχεδίου και επομένως, τα λάθη $\bar{\varepsilon}_i^n$ είναι επίσης λύσεις των ίδιων διακριτοποιημένων εξισώσεων.

Αυτό μπορεί εύκολα να δειχθεί: εάν $N(u_i^n) = 0$ αντιπροσωπεύει το γραμμικό αριθμητικό σχήμα, η ακριβής λύση του αριθμητικού σχήματος $\bar{u}_i^n$ ικανοποιεί $N(\bar{u}_i^n) = 0$ και εισάγοντας την εξίσωση (5.40), λαμβάνουμε:

$$N(u_i^n) = N(\bar{u}_i^n + \bar{\varepsilon}_i^n) = N(\bar{u}_i^n) + N(\bar{\varepsilon}_i^n) = N(\bar{\varepsilon}_i^n) = 0 \qquad (5.41)$$

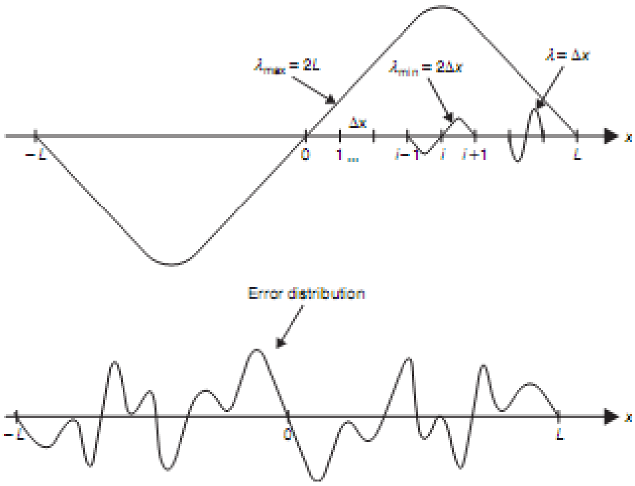
Ως εκ τούτου, τα λάθη $\bar{\varepsilon}_i^n$ ικανοποιούν την ίδια εξίσωση με την αριθμητική λύση u_i^n.
Επομένως, υποθέτοντας ότι η ακριβής αριθμητική λύση περιορίζεται ομοιόμορφα, οποιαδήποτε μη-περιορισμένη συμπεριφορά του λάθους θα απεικονιστεί σχετικά με την αριθμητική λύση.
Έτσι μπορούμε να αναλύσουμε την ευστάθεια με τη μελέτη της συμπεριφοράς των λαθών, ή η ίδια την αριθμητική λύση. Θα επιλέξουμε εδώ τη δεύτερη επιλογή.
Εάν θεωρήσουμε περιοδικές οριακές συνθήκες, μπορούμε να επεκτείνουμε τη λύση u_i^n σε μια σειρά Fourier ως προς το χώρο, για κάθε χρονικό επίπεδο n. Δεδομένου ότι το χωρικό πεδίο είναι πεπερασμένου μήκους, θα χρειαστούμε μια ανάλυση Fourier, με πεπερασμένο αριθμό όρων σε όλους τους αριθμούς κυμάτων που μπορούν να αντιπροσωπευθούν στο διακριτοποιμένο χώρο, που είναι το σύνολο των σημείων του πλέγματος.
Δεδομένου ότι ο αριθμός κυμάτων αντιπροσωπεύει τον αριθμό μηκών κύματος μέσα σε μια σειρά 2π, πρέπει να αναρωτηθούμε ποια είναι τα μήκη κύματος μιας ιδιαίτερης λειτουργίας που μπορεί «να δει» ή να αντιπροσωπευθεί, στο υπάρχον πλέγμα.

Σε μια μονοδιάστατη περιοχή του μήκους L, απεικονίζουμε την περιοχή (0, L) επάνω στο αρνητικό μέρος (- L, 0) ως τρόπο να δημιουργήσει μια περιοδικότητα 2L.

Ποιο είναι το πιό σύντομο μήκος κύματος που εμείς μπορούμε να αντιπροσωπεύσουμε στο ομοιόμορφο πλέγμα με το διάστημα Δx;

Αναφερόμενοι στο σχήμα 5.5, βλέπουμε ότι το πιο μικρό μήκος κύματος είναι ίσο με $\lambda_{min} = 2\Delta x$. Πράγματι, εάν φανταστείτε ένα πιο μικρό μήκος κύματος μεταξύ δύο μόνο σημείων του πλέγματος, για παράδειγμα $\lambda = \Delta x$, θα απαιτήσει ένα σημείο στο ενδιάμεσο του διαστήματος μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του πλέγματος, και ως εκ τούτου δεν μπορεί να αναγνωριστεί στο πλέγμα, δεδομένου ότι δεν υπάρχει κανένα ένα τέτοιο σημείο του πλέγματος.

Ο αριθμός $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ κυμάτων φθάνει στο μέγιστο αριθμό κυμάτων του $k_{max} = \frac{\pi}{\Delta x}$. Το μεγαλύτερο μήκος κύματος αφ' ενός αντιστοιχεί $\lambda_{max} = 2L$ στην κάλυψη ολόκληρου του μήκους. Ο αριθμός κυμάτων παίρνει την ελάχιστη τιμή του $k_{min} = \frac{\pi}{L}$. Όλες οι άλλες αρμονικές πρέπει να είναι πολλαπλάσια αυτής της μικρότερης τιμής και έχουμε τόσο πολλές αρμονικές όσα και τα σημεία του πλέγματος.



Σχήμα 5.5: Φάσμα συχνότητας στο πεπερασμένο διάστημα (- L, L).

Με το δείκτη i πλέγματος, που κυμαίνεται από το 0 ως το N, με $x_i = i \cdot \Delta x$ και

$$\Delta x = L/N \tag{5.42}$$

όλες οι αρμονικές N που αντιπροσωπεύονται σε ένα πεπερασμένο πλέγμα δίνονται από:

$$k_j = jk_{min} = j\frac{\pi}{L} = j\frac{N\Delta\pi}{x} \qquad j = 0, \dots, N \tag{5.43}$$

με το j που κυμαίνεται από 1 ως το N. Προσθέτουμε τη τιμή $j=0$ για να λάβουμε υπόψη μια πιθανή σταθερή αξία της λύσης. Το γινόμενο $k_j \Delta x$ ονομάζεται γωνία φάσης

$$\varphi = k_j \Delta x = \frac{j\pi}{N} \tag{5.44}$$

και καλύπτει την περιοχή (-π, π), στα βήματα π/N, όταν είναι συμπεριλαμβανομένης της απεικονισμένης περιοχής (- L, 0).

Το σχήμα 5.5 παρουσιάζει αντιπροσωπευτική συμπεριφορά του λάθους, το οποίο περιέχει ολόκληρο το φάσμα των συχνοτήτων. Ανάλογα με το ιδιαίτερο αριθμητικό σχήμα, το περιεχόμενο συχνότητας να ποικίλει και κυμαίνεται από χαμηλές συχνότητες μέχρι υψηλές συχνότητες. Για παράδειγμα, εάν το λάθος ποικίλει έντονα μεταξύ δύο σημείων πλέγματος, θα δει όπως εξουσιάζεται από τα σύντομα μήκη κύματος του μεγέθους 2Δx και ως εκ τούτου κατοχή ενός, εξουσιάζοντας υψηλής συχνότητας περιεχομένου.

Η περιοχή γύρω από φ=0 αντιστοιχεί στις χαμηλές συχνότητες ενώ η στενή περιοχή φ=π συνδέεται με την υψηλής συχνότητας σειρά του φάσματος. Συγκεκριμένα η τιμή φ=π αντιστοιχεί στην υψηλότερη συχνότητα επίλυσης στο πλέγμα, δηλαδή η συχνότητα που συνδέεται στο πιό σύντομο μήκος κύματος 2 Δx.

Οποιαδήποτε λειτουργία στο πεπερασμένο πλέγμα, όπως η πλήρης λύση u_i^n, θα αποσυντεθεί σε μια πεπερασμένη σειρά Fourier όπως

$$u_i^n = \sum_{j=-N}^{N} V_j^n \, e^{jk_j x} = \sum_{j=-N}^{N} V_j^n \, e^{jk_j \Delta x} = \sum_{j=-N}^{N} V_j^n \, e^{jk_j \pi/N} \tag{5.45}$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ και V_j^n είναι το εύρος της j-αρμονικής. Η αρμονική που συνδέεται στο j=0, αντιπροσωπεύει μια σταθερή λειτουργία στο διάστημα.

Σημειώστε ότι αυτή η αποσύνθεση χωρίζει την εξάρτηση χρόνου και χώρου της λύσης. Η χρονική συμπεριφορά αντιπροσωπεύεται από τα εύρη V^n, τα οποία περιέχουν την πλήρους απασχόλησης εξάρτηση, ενώ οι τρόποι Fourier περιέχουν την πλήρη διαστημική εξάρτηση.

Η μέθοδος Von Neumann στηρίζεται στην παρατήρηση που για τα γραμμικά σχήματα η διακριτοποιημένη εξίσωση (5.41), που ικανοποιείται από τη λύση και από το λάθος, πρέπει επίσης να ικανοποιείται από κάθε μεμονωμένη αρμονική.

Ως εκ τούτου, εισάγοντας μια αυθαίρετη αρμονική στο αριθμητικό σχήμα, η συνθήκη ευστάθειας κατά Von Neumann θα εκφραστεί από τον ακόλουθο όρο: **το εύρος κάθε αρμονικής μπορεί να μην αυξηθεί κατά τρόπο αόριστο ως προς το χρόνο, δηλ. όταν τείνει το n στο άπειρ0.**

5.4.2 Παράγοντας Ενίσχυσης (Amplification Factor)

Δεδομένου ότι ο όρος ευστάθειας Von Neumann απαιτεί να μην αυξάνονται τα εύρη V^n κατά τρόπο αόριστο, για οποιαδήποτε τιμή j, καθορίζουμε έναν **παράγοντα ενίσχυσης**.

$$G \triangleq \frac{V^{n+1}}{V^n} \qquad (5.46)$$

αυτός πρέπει να ικανοποιήσει την ακόλουθη **συνθήκη ευστάθειας Von Neumann:**

$$|G| \leq 1 \qquad \text{για όλες τις τιμές} \quad \varphi_j = k_j \Delta x = j\frac{\pi}{N} \qquad j = -N, \dots, +N \qquad (5.47)$$

Σημειώστε ότι αυτός ο παράγοντας ενίσχυσης είναι συνάρτηση των παραμέτρων του σχήματος και της γωνίας φάσης φ και είναι ανεξάρτητος από το n.

Η μεθοδολογία για την εφαρμογή του Von Neumann όρου σταθερότητας μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

Μεθοδολογία

- Αντικαθιστούμε στο αριθμητικό σχήμα όλους τους όρους της μορφής u_{i+m}^{n+k} με

$$u_{i+m}^{n+k} \to V^{n+k} e^{j(i+m)\varphi} \qquad (5.48)$$

Για ένα σχήμα δύο επιπέδων χρόνου, που περιλαμβάνει τα χρονικά βήματα *n* και (*n+1*), το *k* θα περιοριστεί σε *k=1*. Για ένα σχήμα τριών επιπέδων χρόνου, το k θα πάρει τις τιμές *k=-1, k=0 και k=1.*

- Δεδομένου ότι όλοι οι όροι περιέχουν τον παράγοντα $e^{\bar{n}\varphi}$, το επόμενο βήμα είναι να απλοποιηθούν όλοι οι όροι από αυτόν τον παράγοντα.
- Από την αποκτηθείσα σχέση, παράγεται η ρητή μορφή του παράγοντα G ενίσχυσης.
- Οι συνθήκες ευστάθειας, που είναι συνθήκες στις παραμέτρους του σχήματος, πρόκειται να ληφθούν από τη συνθήκη (5.47). Δεδομένου ότι έχουμε αφαιρέσει το δείκτη j από τη γωνία φάσης, μπορεί να εξεταστεί από τώρα και στο εξής ότι παίρνοντας οποιαδήποτε αξία μεταξύ *(-π, +π).* Ως εκ τούτου αναδιατυπώνουμε το Von Neumann όρο σταθερότητας ως εξής:

$$|G| \leq 1 \quad \text{για όλες τις τιμές του} \quad \varphi \quad \text{στο διάστημα } (-\pi, +\pi) \qquad (5.49)$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα τη παραπάνω μεθοδολογία σε μερικά από τα σχήματα που εφαρμόζονται στη γραμμική εξίσωση μεταφοράς:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{ή} \qquad u_t + a u_x = 0$$

Πρώτο παράδειγμα: Δεύτερης τάξης κεντρικές διαφορές ως προς το χώρο με ρητές πρώτης τάξης διαφορές ως προς το χρόνο.

Αυτό το σχήμα δίνεται από την εξίσωση (5.20), την οποία γράφουμε εδώ σε μια ρητή μορφή:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \qquad (5.50)$$

όπου η παράμετρος σ είναι η μοναδική παράμετρος του σχήματος και έχει οριστεί ήδη ως ο αριθμός Courant ή ο αριθμός CFL:

$$`CFL \equiv \sigma = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} \tag{5.51}$$

Παρατηρήστε εδώ ότι η αριθμητική λύση δεν θα εξαρτηθεί από Δx ή από Δt χωριστά, αλλά μόνο από τη τιμή του αριθμού CFL. Επομένως στην πράξη, όλοι οι υπολογισμοί θα εκτελεσθούν στις σταθερές τιμές του σ, δηλαδή τιμές του Δt ανάλογες προς τα διαστήματα Δx του πλέγματος.

Εφαρμόζουμε τώρα τη γενική μεθοδολογία σε βήματα:
Το πρώτο βήμα συνίσταται στην εφαρμογή της αντικατάστασης (5.48):

$$V^{n+1}e^{\bar{n}\varphi} = V^n e^{\bar{n}\varphi} - \frac{\sigma}{2}\left[V^n e^{j(j+1)\varphi} - V^n e^{j(j-1)\varphi}\right] \tag{5.52}$$

Το δεύτερο βήμα είναι η απλοποίηση από $e^{\bar{n}\varphi}$, που οδηγεί σε:

$$` \quad V^{n+1} = V^n \frac{\sigma}{2}\left[e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right] \tag{5.53}$$

Το τρίτο βήμα, είναι το να υπολογίσουμε τον παράγοντα ενίσχυσης:

$$\mathrm{G} = \frac{V^{n+1}}{V^n} = 1 - \frac{\sigma}{2} \cdot 2l \cdot \sin\varphi = 1 - l \cdot \sigma \cdot \sin\varphi \tag{5.54}$$

Η συνθήκη ευστάθειας απαιτεί το μέτρο του G για να είναι μικρότερο ή ίσο με τη μονάδα. Για το παρόν παράδειγμα έχουμε ότι:

$$|G|^2 = G \cdot G^* = 1 + \sigma^2 sin^2\,\varphi \geq 1 \tag{5.54}$$

που είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο από τη μονάδα και η συνθήκη ευστάθειας ποτέ δεν ικανοποιείται. Ως εκ τούτου, το σχήμα κεντρικών διαφορών (5.50) για την εξίσωση μεταφοράς με τις προς τα εμπρός διαφορές είναι άνευ όρων ασταθές.

Δεύτερο παράδειγμα: Δεύτερης τάξης κεντρικές διαφορές ως προς το χώρο με έμμεσες (implicit) πρώτης τάξης διαφορές ως προς το χρόνο.
Αυτό το σχήμα καθορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\sigma}{2}\left(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right) \tag{5.55}$$

Συνδυάζοντας τώρα τα πρώτα και δεύτερα βήματα, λαμβάνουμε

$$V^{n+1} = V^n - V^{n+1}\frac{\sigma}{2}\left[e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right] \tag{5.56}$$

Το τρίτο βήμα μας οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση για τον παράγοντα ενίσχυσης:

$$G = 1 - \frac{\sigma}{2}G\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \quad ή \quad G = \frac{1}{1 + l\sigma\sin\varphi} \tag{5.57}$$

Το μέτρο του G είναι πάντα μικρότερο από το ένα, για όλες τις τιμές σ, διότι

$$|G|^2 = G \cdot G^* = \frac{1}{1 + \sigma^2 sin^2\,\varphi} \leq 1 \qquad για\ κάθε\ \ \varphi \tag{5.58}$$

και επομένως το ανωτέρω σχήμα (5.55) είναι **άνευ όρων ευσταθές.**

Τρίτο παράδειγμα: Σχήμα FOU – προς τα πίσω διαφορές (backward) ως προς το χώρο και ρητό (explicit) πρώτης τάξης ως προς το χρόνο.

Αυτό είναι το σχήμα πρώτης τάξης προς τα πίσω διαφορών (FOU) που δίνεται από τη παρακάτω εξίσωση:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma(u_i^n - u_{i-1}^n) \qquad (5.59)$$

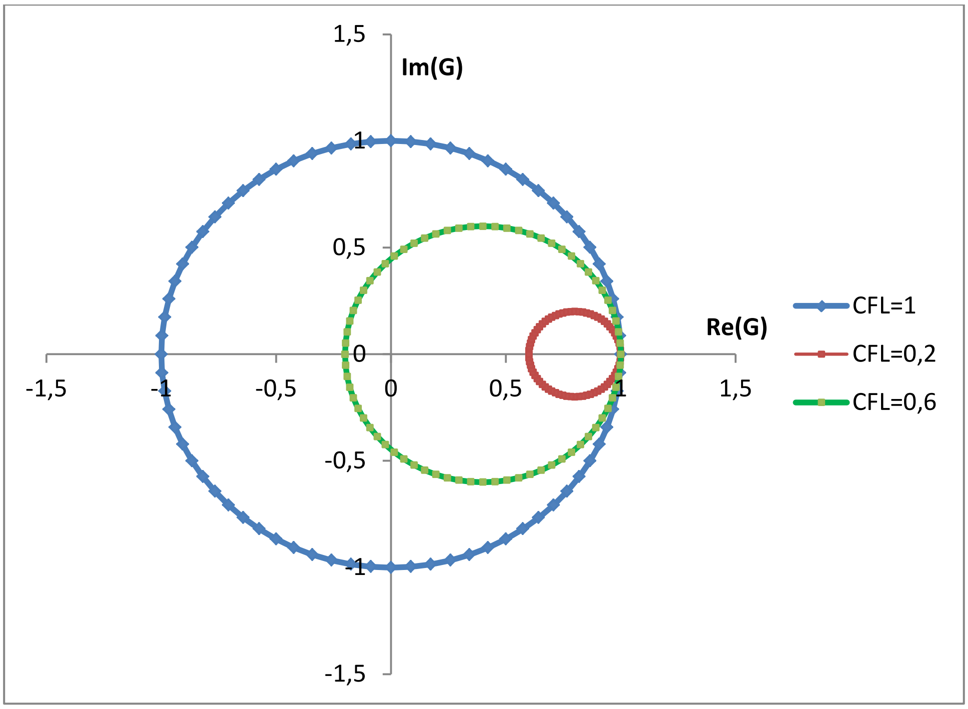
Συνδυάζοντας εδώ το πρώτο, δεύτερο και τρίτο βήμα, λαμβάνουμε

$$G = 1 - \sigma\left(1 - e^{-j\varphi}\right) = 1 - \sigma + \sigma\cos\varphi - l\sigma\sin\varphi = 1 - 2\sigma sin^2\left(\varphi/_2\right) - l\sigma\sin\varphi \qquad (5.60)$$

Προκειμένου να αναλυθεί η ευστάθεια του σχήματος (5.47), δηλ. να βρεθούν οι περιοχές όπου το μέτρο του παράγοντα ενίσχυσης G είναι μικρότερο ή ίσο από τη μονάδα, μια γραφική παράσταση του G στο μιγαδικό επίπεδο είναι μια κατάλληλη προσέγγιση. Γράφοντας ξ και η, αντίστοιχα για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του G, έχουμε:

$$\xi = Real(G) = 1 - 2\sigma sin^2\left(\varphi/_2\right) = (1-\sigma) + \sigma\cdot\cos\varphi$$
$$\eta = Imaginary(G) = -\sigma\cdot\sin\varphi \qquad (5.61)$$

που μπορούν να θεωρηθούν ως παραμετρικές εξισώσεις για το G με παράμετρο το φ. Αναγνωρίζουμε τις παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου του οποίου το κέντρο τοποθετείται στον πραγματικό άξονα ξ στο $(1-\sigma)$ με την ακτίνα σ.



Σχήμα 5.6: Σύνθετη επίπεδη αναπαράσταση του παράγοντα ενίσχυσης G για το σχήμα προς τα πίσω διαφορών πρώτης τάξης ακρίβειας, με τον κύκλο μονάδων που καθορίζει την περιοχή ευστάθειας.

Στο μιγαδικό G-επίπεδο, η συνθήκη ευστάθειας (5.49) λέει ότι η καμπύλη που αναπαριστά το G για όλες τις τιμές $\varphi = k\Delta x$, πρέπει να παραμείνει μέσα στον μοναδιαίο κύκλο (δηλ. στον κύκλο που έχει ακτίνα το 1), σχήμα 5.6. Φαίνεται καθαρά από αυτόν τον αριθμό ότι το σχήμα είναι ευσταθές για

$$0 \le \sigma \le 1 \qquad (5.62)$$

Ως εκ τούτου, το παραπάνω σχήμα FOU (5.59) είναι **υπό όρους ευσταθές** και ανακτούμε τη συνθήκη Courant, Friedrichs, Lewy, ή σε συντομία τη «συνθήκη-CFL» που λήφθηκε ήδη από την ανάλυση της ισοδύναμης διαφορικής εξίσωσης.

Αυτή η συνθήκη ευστάθειας εισήχθη για πρώτη φορά το 1928 σε ένα άρθρο από τον Courant. Αυτό το άρθρο μπορεί να θεωρηθεί ως τοποθέτηση των θεμελίων των εννοιών της σύγκλισης και της ευστάθειας για σχήματα πεπερασμένων διαφορών.

Τέταρτο παράδειγμα: Έμμεσο (implicit) σχήμα ως προς το χρόνο (σχήμα FOU) πρώτης τάξης ακρίβειας με προς τα πίσω διαφορές ως προς το χώρο.

Αυτό το σχήμα καθορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \qquad (5.63)$$

Εφαρμόζοντας τα τώρα γνωστά βήματα, λαμβάνουμε

$$\mathrm{G} = \frac{1}{1+\sigma(1-e^{-j\varphi})} \qquad (5.64)$$

και η ποσότητα:

$$G \cdot G^* = \frac{1}{(1-\sigma+\sigma\cos\varphi)^2+\sigma^2 sin^2\,\varphi} \leq 1 \;\; \textit{για όλες τις τιμές του } \varphi \qquad (5.65)$$

Ως εκ τούτου, αυτό το αριθμητικό σχήμα **είναι άνευ όρων ευσταθές.**

Ο θεμελιώδης όρος ευστάθειας των περισσότερων άμεσων (explicit) σχημάτων για τις εξισώσεις κύματος και μεταφοράς εκφράζει ότι η απόσταση που διανύεται κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος *Δt*, από τις διαταραχές που διαδίδονται με ταχύτητα α, πρέπει να είναι μικρότερη από την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων πλέγματος.

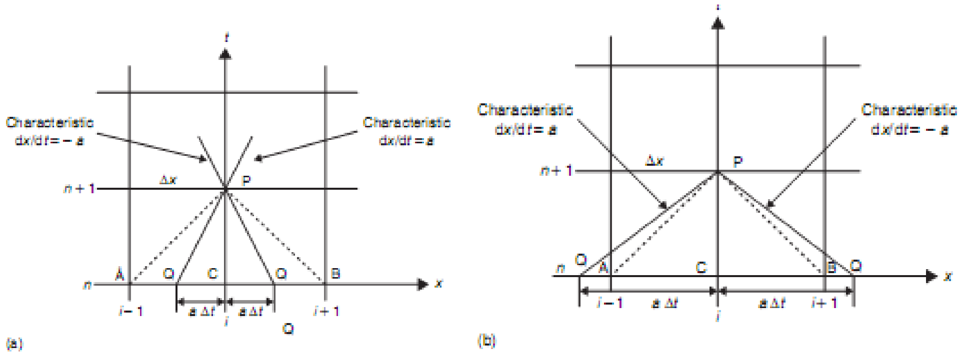
Αναφερόμενοι στο σχήμα 5.7, αναγνωρίζουμε τη γραμμή PQ ως χαρακτηριστική με κλίση $\frac{dx}{dt} = a$ της υπερβολικής γραμμικής εξίσωσης μεταφοράς μέσω του P. Με την προσθήκη της περίπτωσης διάδοσης για τις αρνητικές τιμές του α, καθορίζουμε την περιοχή εξάρτησης της διαφορικής εξίσωσης στο σημείο P, για τις ταχύτητες μεταφοράς καθενός σημείου από την περιοχή PQOQP. Αφ' ενός, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αριθμητικό σχήμα καθορίζει επίσης μια αριθμητική περιοχή της εξάρτησης του P που είναι η περιοχή μεταξύ των σημείων P-A-G, δεδομένου ότι η λύση στο χρονικό επίπεδο (*n+1*) εξαρτάται από τα σημεία *i* και (*i-1*).

Η συνθήκη ευστάθειας CFL<1 εκφράζει ότι η αναλογία πλέγματος $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ πρέπει να επιλεχτεί κατά τέτοιο τρόπο **ώστε η περιοχή της εξάρτησης της διαφορικής εξίσωσης πρέπει να περιληφθεί εξ ολοκλήρου στην αριθμητική περιοχή της εξάρτησης των διακριτοιημένων εξισώσεων**.

Με άλλα λόγια, το αριθμητικό σχήμα που καθορίζει την προσέγγιση u_i^{n+1} στο σημείο *i* πλέγματος πρέπει να είναι σε θέση να περιλαμβάνει όλες τις φυσικές πληροφορίες που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του συστήματος σε αυτό το σημείο. Εάν αυτό δεν ισχύει, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7β έπειτα μια αλλαγή στις φυσικές καταστάσεις στις περιοχές AQ και BQ δεν θα φαινόταν από το αριθμητικό σχήμα και επομένως η διαφορά μεταξύ της ακριβούς λύσης και της αριθμητικής λύσης θα μπορούσε να γίνει αυθαίρετα μεγάλη. Ως εκ τούτου, το σχήμα δεν θα είναι σε θέση να συγκλίνει. Αυτή η ερμηνεία εφαρμόζεται γενικά για δυσδιάστατα και τα τρισδιάστατα προβλήματα όταν εμφανίζεται δυσκολία να εκφραστούν αναλυτικά οι όροι ευστάθειας από τον παράγοντα ή το μητρώο ενίσχυσης. Θα οδηγήσει το σχήμα τουλάχιστον σε μια απαραίτητη προϋπόθεση σύγκλισης.

Επίσης καταλαβαίνουμε, γιατί το ρητό σχήμα με τις προς τα πίσω διαφορές πρώτης τάξης ακρίβειας ως προς το χώρο (FOU) (εξίσωση (5.59)) είναι ασταθές όταν το α είναι αρνητικό. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση η μεταβλητή u μεταδίδεται από τα δεξιά στα αριστερά και η λύση σε ένα σημείο *i* μπορεί μόνο να εξαρτηθεί από τα προς τα πίσω σημεία όπως (*i+1*), και η φυσική περιοχή της εξάρτησης είναι στη δεξιά πλευρά του σημείου P. Ως εκ τούτου, το σχήμα (5.59) που περιλαμβάνει μόνο το σημείο (*i-1*) είναι έξω από την περιοχή της εξάρτησης. Με άλλα λόγια, αυτό το σχήμα είναι αντίθετο προς τη φυσική που στοχεύει να περιγράψει, όταν α<0.

Σε αυτήν την περίπτωση η χωρική παράγωγος πρέπει διακριτοποιηθεί με προς τα εμπρός (forward) διαφορές.



Σχήμα 5.7: Γεωμετρική, χαρακτηριστική ερμηνεία της συνθήκης CFL (α) σ<1 (συνθήκη ευστάθειας) και (β) σ>1 (συνθήκη αστάθειας)

Πέμπτο παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένη εξίσωση διάχυσης με ρητές (explicit) πρώτη τάξης ακρίβειας διαφορές ως προς το χρόνο και κεντρικές διαφορές ως προς το χώρο.

Θεωρήστε για επόμενο παράδειγμα την εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ή \qquad u_i = au_{xx} \tag{5.66}$$

Επιλέγουμε ρητές πρώτη τάξης προς τα εμπρός διαφορές ως προς το χρόνο και κεντρικές διαφορές, δεύτερης τάξης ακρίβειας ως προς το χώρο, που οδηγούν σε:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{5.67}$$

Ο παράγοντας ενίσχυσης λαμβάνεται, μετά από τα βήματα που περιγράφονται στη μεθοδολογία, όπως

$$G = 1 - 4\beta sin^2(\varphi/_2) \tag{5.68}$$

με

$$\beta = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \tag{5.69}$$

Η συνθήκη ευστάθειας είναι

$$|1 - 4\beta sin^2(\varphi/_2)| \leq 1$$

που ικανοποιείται για

$$-1 \leq 1 - 4\beta sin^2(\varphi/_2) \leq 1$$

που οδηγεί σε

$$0 \leq \beta \leq \frac{1}{2} \qquad (5.70)$$

Ως εκ τούτου, το ανωτέρω σχήμα είναι ευσταθές για

$$\alpha \geq 0 \quad \textit{και} \quad \beta = \alpha \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \qquad (5.71)$$

Ο πρώτος όρος εκφράζει την ευστάθεια του φυσικού προβλήματος, δεδομένου ότι για α<0, δηλ. για έναν αρνητικό συντελεστή διάχυσης, η αναλυτική λύση αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο. Ο δεύτερος όρος παρέχει την **υπό όρους ευστάθεια** αυτού του ρητού σχήματος.

Έκτο παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένη εξίσωση διάχυσης με έμμεση (implicit) πρώτης τάξης διαφορές ως προς το χρόνο και κεντρικές διαφορές ως προς το χώρο.

Εάν επιλέξουμε ένα έμμεσο (implicit) σχήμα, δηλ., παίρνοντας τη χρονική διαφορά σε χρονικό επίπεδο (*n+1*) αντί του *n*, όπως στην εξίσωση (5.67), λαμβάνουμε το σχήμα

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) \qquad (5.72)$$

Ο παράγοντας ενίσχυσης είναι:

$$G = \frac{1}{1+4\beta sin^2\left({}^{\varphi}/_{2}\right)} \qquad (5.73)$$

Ως εκ τούτου, αυτό το έμμεσο σχήμα, είναι **άνευ όρων ευσταθές** για α>0.

5.4.3 Γενικά σχόλια για τη συνθήκη CFL

Τα ρητά (explicit) σχήματα μπορούν να έχουν στη καλύτερη περίπτωση την υπό όρους ευστάθεια, ενώ τα έμμεσα (implicit) σχήματα είναι γενικά άνευ όρων ευσταθή.

Η υπό όρους ευστάθεια περιορίζει το χρονικό βήμα, εκφράζοντας ότι κάποιος δεν μπορεί να προχωρήσει πάρα πολύ γρήγορα στο χρόνο προκειμένου να διατηρηθεί η ευστάθεια του σχήματος. Αυτό είναι γενικά μια αυστηρή απαίτηση, και ιδιαίτερα για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις όπου σημαντικό ρόλο παίζει η μεταφορά, καθώς η ταχύτητα α μεταφοράς μπορεί να είναι πολύ μεγάλη. Για τις συμπιεστές ροές είναι της τάξης μεγέθους της ταχύτητας του ήχου και το επιτρεπόμενο χρονικό βήμα γίνεται πολύ μικρό. Για παράδειγμα με 101 σημεία πλέγματος, *Δx=0.01* και για *α=350m/s* λαμβάνουμε ένα όριο χρονικού βήματος $\Delta t < 3 \cdot 10^{-5} sec$.

Οι έμμεσες (implicit) μέθοδοι δεν έχουν αφ' ενός κανέναν περιορισμό χρονικών βημάτων και επιτρέπουν να προχωρήσουν στο χρόνο γρηγορότερα, αλλά το κόστος ανά επανάληψη είναι πολύ υψηλότερο, δεδομένου ότι τα αλγεβρικά συστήματα πρέπει να λυθούν σε κάθε επανάληψη.

Η επιλογή μεταξύ των ρητών ή έμμεσων σχημάτων είναι ακόμα μια πηγή έντονης συζήτησης σήμερα και θα βρείτε στη βιβλιογραφία και στην πρακτική των κωδίκων CFD, τους συνηγόρους και των δύο επιλογών. Πραγματικά, δεδομένου ότι τα έμμεσα σχήματα απαιτούν περισσότερο CPU ανά χρονικό βήμα και απαιτούν επίσης περισσότερη μνήμη, η ισορροπία θα εξαρτηθεί πραγματικά από τη βέλτιστη τιμή του γινομένου [(κόστος/επανάληψη) x (αριθμός επαναλήψεων)], για να αντιπαρέλθουν τις απαιτήσεις μνήμης.

Για τις εξισώσεις διάχυσης, ο ρητός περιορισμός $\Delta t < \Delta x^2/2a$ χρονικών βημάτων δεν είναι γενικά τόσο αυστηρός και εξαρτάται φυσικά από τις τιμές του συντελεστή διάχυσης. Για μια τιμή α= $10^{-3} m^2/s$ και Δx= 0.01, θα είχαμε $\Delta t < 5 \cdot 10^{-2} s$.

Η μέθοδος von Neumann προσφέρει έναν εύκολο και απλό τρόπο εκτίμησης των ιδιοτήτων ευστάθειας του γραμμικού σχήματος με τους σταθερούς συντελεστές, όταν οι οριακές συνθήκες υποτεθούν ότι είναι περιοδικές.

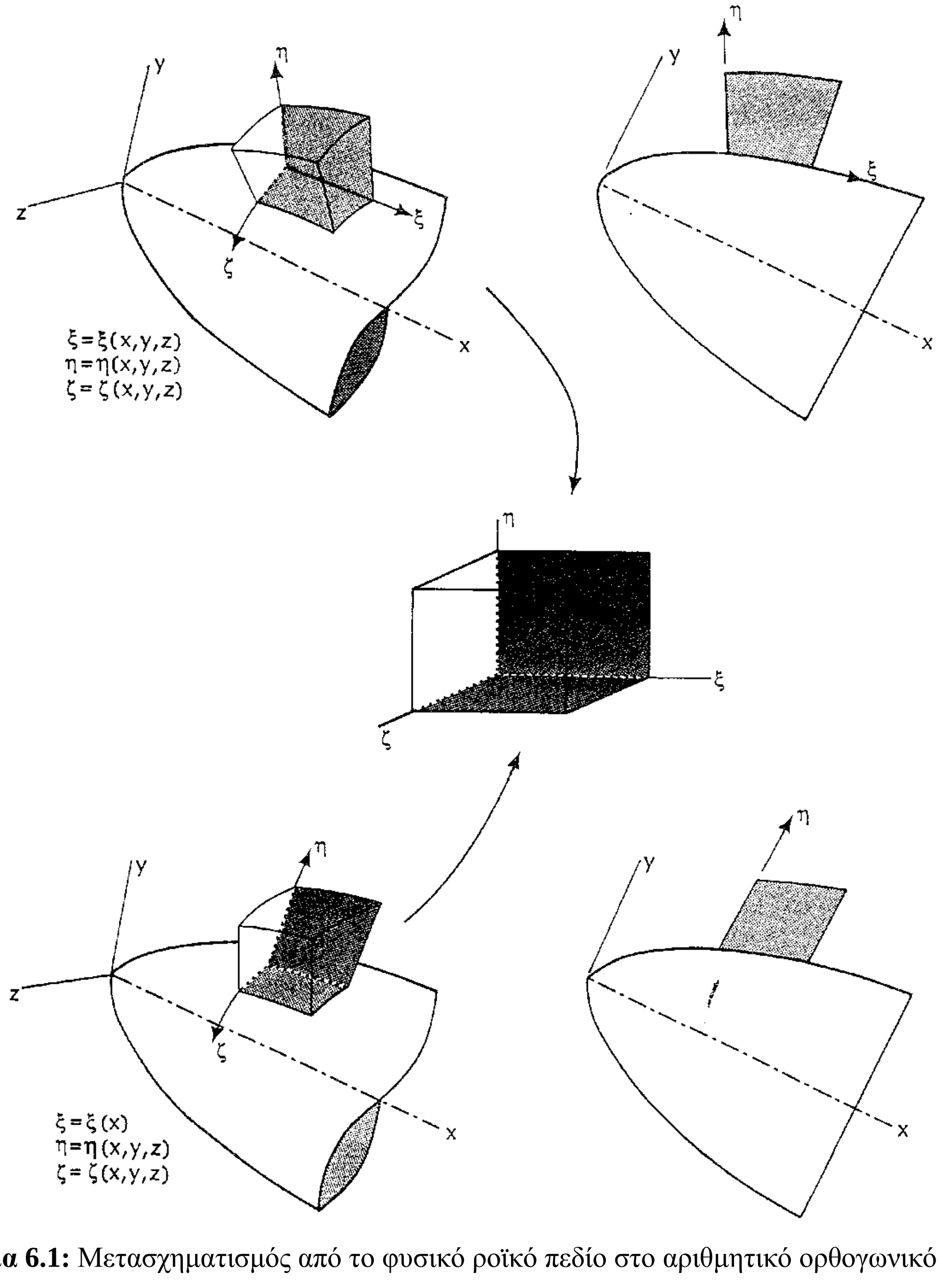
Το πρόβλημα της ευστάθειας για ένα γραμμικό πρόβλημα με τους σταθερούς συντελεστές γίνεται κατανοητό όταν μπορεί να αμεληθεί ή να αφαιρεθεί η επιρροή των ορίων. Αυτό συμβαίνει είτε για ένα πεδίο που εκτείνεται στο άπειρο είτε για περιοδικές οριακές συνθήκες.

Εντούτοις, μόλις πρέπει να εξετάσουμε τους μη-σταθερούς συντελεστές ή / και τους μη γραμμικούς όρους στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι πληροφορίες για την ευστάθεια περιορίζονται. Ως εκ τούτου, πρέπει να προσφύγουμε σε μια τοπική ανάλυση ευστάθειας, με τις παγωμένες τιμές των μη γραμμικών και μη-σταθερών συντελεστών, για να καταστήσουμε τη διατύπωση γραμμική. Εν πάση περιπτώσει, η γραμμική ευστάθεια είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση για τα μη γραμμικά προβλήματα, αλλά δεν είναι βεβαίως ικανή.

6. ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

6.1 Γενικά

Για την αριθμητική επίλυση των Μ.Δ.Ε. των εξισώσεων κίνησης της Ρευστομηχανικής, οι Μ.Δ.Ε. προσεγγίζονται με συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων. Με τις εξισώσεις αυτές, μετατρέπονται οι Μ.Δ.Ε. σε εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών (Ε.Π.Δ) οι οποίες λύνονται για συγκεκριμένα και διακριτά σημεία στο ροϊκό πεδίο στο οποίο οι Μ.Δ.Ε. είναι σε ισχύ. Αυτό σημαίνει ότι ο συνεχής χώρος στον οποίο οι Μ.Δ.Ε. ισχύουν προσεγγίζεται από ένα σετ διακριτών σημείων στα οποία επιλύονται οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών. Η δημιουργία αυτής της ομάδας των σημείων ονομάζεται δημιουργία πλέγματος.



Σχήμα 6.1: Μετασχηματισμός από το φυσικό ροϊκό πεδίο στο αριθμητικό ορθογωνικό πεδίο

Στην περίπτωση ενός ορθογωνικού πεδίου εφαρμογής μιας Μ.Δ.Ε. η δημιουργία πλέγματος που αποτελείται από ισαπέχοντα σημεία είναι μια απλή υπόθεση. Τα σημεία του πλέγματος συμπίπτουν με τα σημεία των τριών του φυσικού προβλήματος , κάνοντας έτσι τον καθορισμό των οριακών συνθηκών

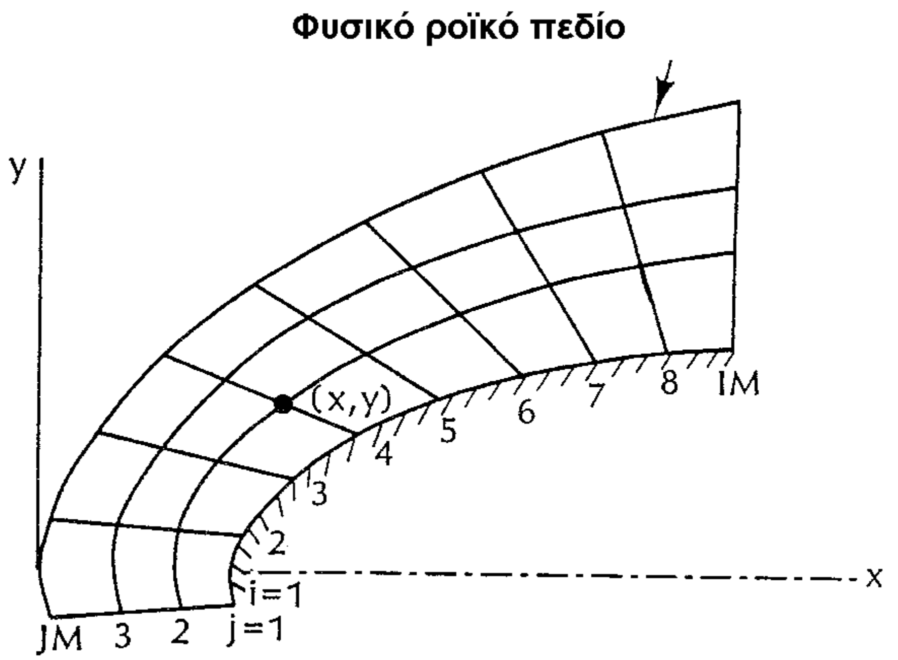
σχετικά απλό. Η πλειοψηφία όμως των προβλημάτων που απασχολούν την Υπολογιστική Ρευστομηχανική, αναφέρονται σε μη-ορθωγονικά σώματα (όπως πτέρυγες, αγωγούς, τρισδιάστατα σώματα). Έτσι ο καθορισμός ενός <u>ορθογωνικού υπολογιστικού</u> πεδίου απαιτεί <u>μετασχηματισμό</u> από το <u>πραγματικό (φυσικό) ροϊκό πεδίο</u>, το οποίο είναι σε γενική περίπτωση καμπυλόγραμμο στο αριθμητικό πεδίο που εξυπηρετεί να είναι ορθογωνικό.
Ο μετασχηματισμός αυτός πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας ένα γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων με το οποίο το μη-ορθογωνικό πλέγμα γύρω από το πραγματικό (ή φυσικό) σώμα μετασχηματίζεται σε ένα ορθογωνικό πλέγμα που αποτελείται από ισαπέχοντα σημεία στο υπολογιστικό πεδίο.

Το γενικευμένο σύστημα μπορεί να εκφραστεί με πολλούς τρόπους. Δύο παραδείγματα φαίνονται στο σχήμα 1.

Το πρώτο παράδειγμα του σχήματος 6.1 φαίνεται το επονομαζόμενο "body-fitted" σύστημα συντεταγμένων όπου οι διευθύνσεις ξ και J των συντεταγμένων ευθυγραμμίζονται με την επιφάνεια κατά μήκος και περιφερειακά στο σώμα , ενώ η τρίτη γραμμή συντεταγμένων, είναι κάθετη στην επιφάνεια του σώματος

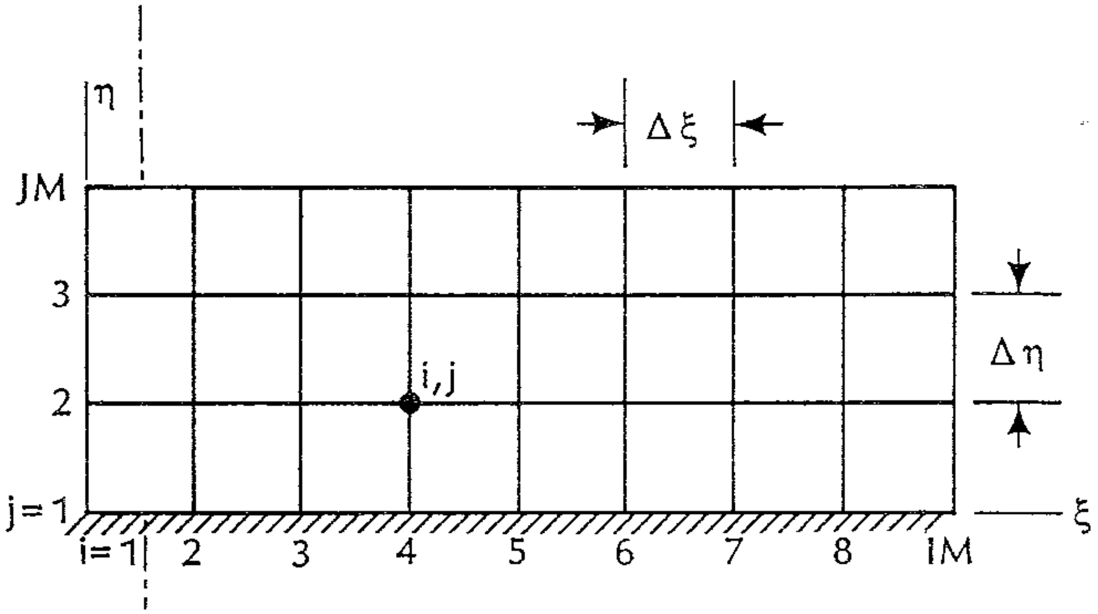
Στο δεύτερο διάγραμμα, ξ είναι η συντεταγμένη που ευθυγραμμίζεται με τον άξονα x του σώματος, J είναι η περιφερειακή διεύθυνση και n είναι η κάθετη στον άξονα x που διαπερνά το σώμα.

Ένα τυπικό δισδιάστατο πεδίο φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα 6.2:



Σχήμα 6.2: Φυσικό ροϊκό πεδίο

Για να αποφύγουμε δυσκολία που συνδέεται με τις άνισες αποστάσεις μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων του πλέγματος στις διευθύνσεις (x,y), μετασχηματίζουμε το παραπάνω φυσικό πεδίο σε υπολογιστικό πεδίο που είναι πλήρως ορθογωνικό με ισαπέχοντα σημεία, όπως δείχνει το επόμενο σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Μετασχηματισμένο αριθμητικό πεδίο με σταθερά $\Delta\xi$ και Δn

Γενικά , στη δημιουργία πλέγματος , οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται μπορούν να χωριστούν σε τρείς κατηγορίες :
(α) Αλγεβρικές μέθοδοι
(β) Μέθοδοι που χρησιμοποιούν Μ.Δ.Ε.
(γ) Μέθοδοι μετασχηματισμού που χρησιμοποιούν μιγαδικούς αριθμούς (conformal mapping).

5.2Μετασχηματισμός των Μ.Δ.Ε.

Έστω ότι οι παρακάτω εξισώσεις συνδέουν τις φυσικές συντεταγμένες (x,y) με τις υπολογιστικές συντεταγμένες *(ξ,η)* για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\xi = \xi\,(x,y)$$
$$\eta = \eta(x,y)$$

Τότε η μερική παράγωγος :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & = & \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial y} & = & \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial n}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial n} \end{bmatrix}$$

Ορίζοντας:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\xi_x, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y}=\xi_y, \qquad \frac{\partial n}{\partial x}=n_x, \qquad \frac{\partial n}{\partial y}=n_y$$

Παίρνουμε ότι:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\theta x}=\xi_x\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}+\,n_x\cdot\frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial y}=\xi_y\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}+\,n_y\cdot\frac{\partial}{\partial n} \end{Bmatrix}$$

Θεωρούμε την Μ.Δ.Ε.:

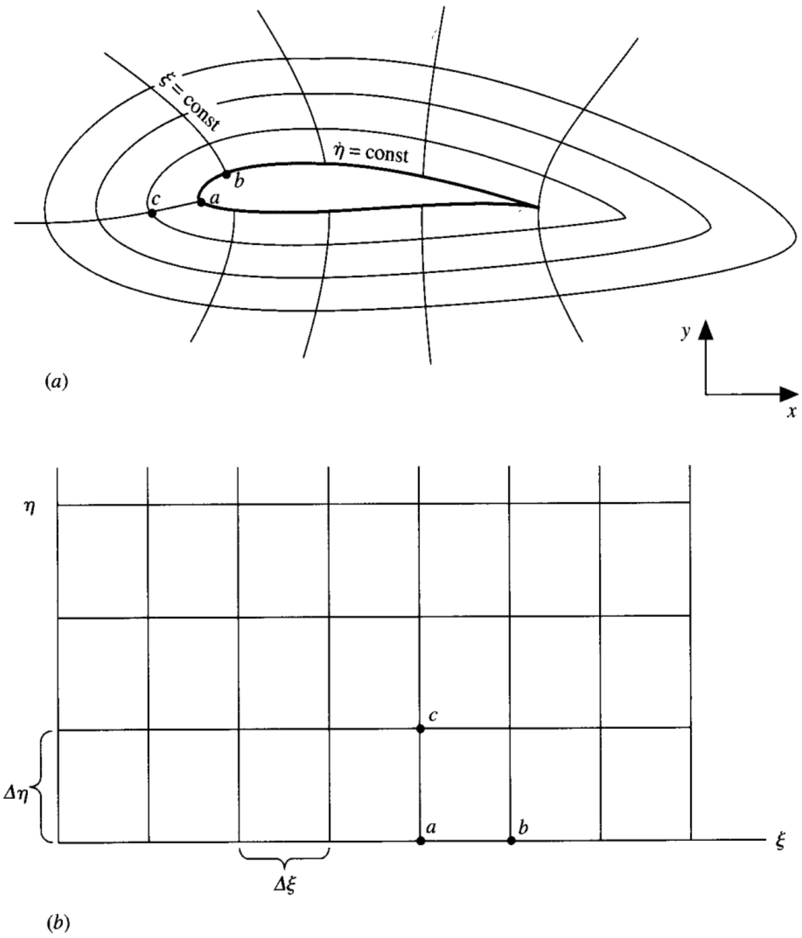
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\,a\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Η Μ.Δ.Ε. αυτή μετασχηματίζεται από το φυσικό πεδίο (x,y) στο υπολογιστικό ως εξής:

$$\xi_{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + n_x \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + a \cdot \left(\xi_y \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + n_y \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0$$

$$=> \ (\xi_x + \alpha\, \xi_y) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(n_x + a\, n_y\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

Αυτή είναι η Μ.Δ.Ε. που θα επιλυθεί στο υπολογιστικό πεδίο. Οι παράγωγοι ξ_x, ξ_y, n_x, n_y προσδιορίζονται από τις εξισώσεις *ξ=ξ (x,y)* και *n=n(x,y)*.



Σχήμα 6.4: Μετασχηματισμός πλέγματος γύρω από αεροτομή.
α) Φυσικό ροϊκό πεδίο, b)Αριθμητικό πεδίο

6.3 Ιακωβιανός πίνακας μετασχηματισμού

Είχαμε ορίσει προηγουμένως ότι :

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cong \frac{\Delta \xi}{\Delta x}$$

Έτσι οι εξισώσεις *ξ=ξ (x,y)* , *n=n(x,y)*, γίνονται

$$d\xi = \xi_x \cdot dx + \xi_y \cdot dy$$

$$=> \begin{bmatrix} d\xi \\ dn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$dn = n_x \cdot dx + n_y \cdot dy$$

Αντιστρέφοντας το ρόλο εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών

x=x *(ξ,n)
y=y* (ξ,n)

=> $dx = x_\xi * d\xi + x_n * dn$

$$=> \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ y_\xi & y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\xi \\ dn \end{bmatrix}$$

$dy = y_\xi * d\xi + y_n * dn$

$$=> \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ n_x & n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ y_\xi & y_n \end{bmatrix}^{-1}$$

=>$\xi_x = J * y_n$
=> $\xi_y = - J * x_n$
=>$n_x = -J \cdot y_\xi$
=>$n_y = J \cdot x_\xi$

όπου

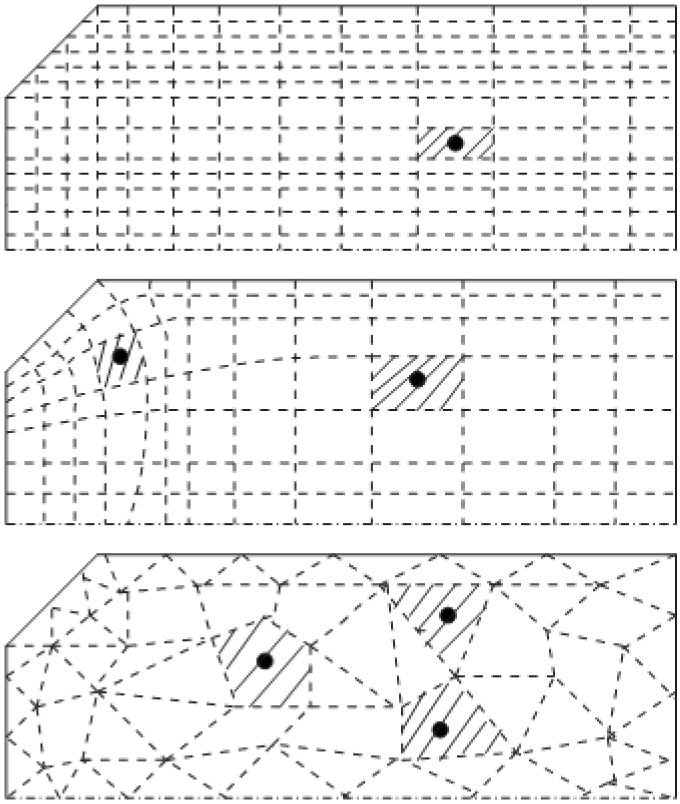
$$J = \frac{1}{x_\xi \cdot y_n - y_\xi \cdot x_n}$$

που ορίζεται σαν η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού

6.4 Τεχνικές δημιουργίας πλέγματος

Ένα υπολογιστικό πλέγμα πρέπει να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) Μονοσήμαντο ορισμό του κάθε σημείου του πλέγματος
(β) Προοδευτική κατανομή σημείων του πλέγματος (smoothness)
(γ) Ορθογωνικότητα των γραμμών του πλέγματος (orthogonality)
(δ) Δυνατότητα συμπύκνωσης σημείων του πλέγματος (grid clustering)

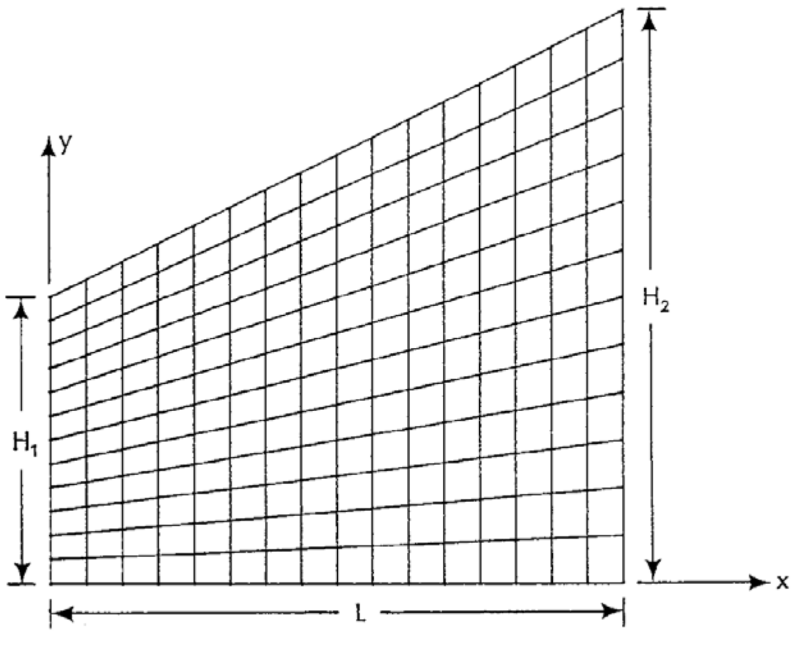


Σχήμα 6.5: Καρτεσιανό Δομημένο πλέγμα (άνω), Καμπύλο δομημένο πλέγμα (μέση), Μη δομημένο πλέγμα (κάτω)

6.4.1 Τεχνικές δημιουργίας Αλγεβρικού πλέγματος

Η πιο απλή μέθοδος δημιουργίας πλέγματος είναι η αλγεβρική μέθοδος. Αυτό σημαίνει ότι μια αλγεβρική εξίσωση χρησιμοποιείται για να συσχετίσει τα σημεία του πλέγματος στο φυσικό και στο υπολογιστικό επίπεδο

Έστω το ακόλουθο παράδειγμα :



Σχήμα 6.6: Αλγεβρικό πλέγμα σε φυσικό ροϊκό πεδίο

Εισάγοντας τις ακόλουθες εξισώσεις για να μετασχηματίσουμε το φυσικό σε ορθογωνικό υπολογιστικό πεδίο:

$\xi = x$

$n = \frac{y}{y_t}$ $\quad$ *όπου* $\quad y_t = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot x$ $\quad$ και για $x=0, n=0$ και $x=L, n=1$

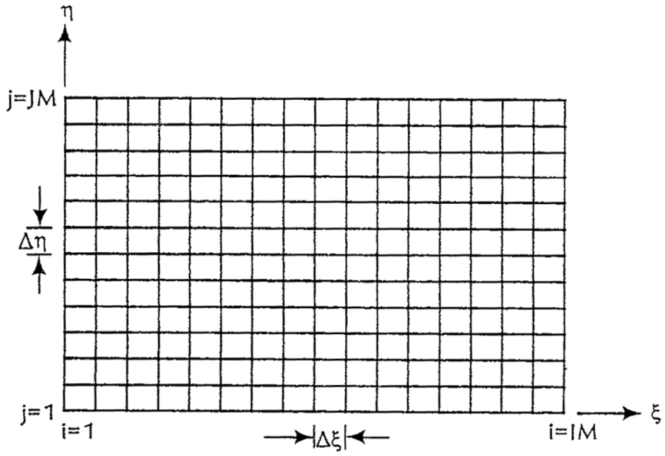
Τότε:

$$\begin{Bmatrix} \xi = x \\ n = \frac{y}{H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot x} \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{Bmatrix} x = \xi \\ y = \left(H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot \xi \right) \cdot n \end{Bmatrix}$$

Το πλέγμα δημιουργείται ως εξής :
Έστω $\Delta\xi$ και Δn οι αποστάσεις των ισαπέχοντων σημείων στη ξ και n διεύθυνση. Διαλέγοντας *IM* και *JM* το μέγιστο επιθυμητό αριθμό σημείων στη ξ και n διεύθυνση αντίστοιχα, έχουμε:

$$\Delta\xi = \frac{L}{IM - 1} \quad \kappa\alpha\iota \quad \Delta n = \frac{1}{JM - 1}$$

(Θυμίζουμε ότι στον ορισμό του n υποτέθηκε ότι το n μεταβάλλεται από 0 έως 1



Σχήμα 6.7: Μετασχηματισμένο ορθογωνικό αριθμητικό πεδίο με ομοιόμορφη κατανομή σημείων

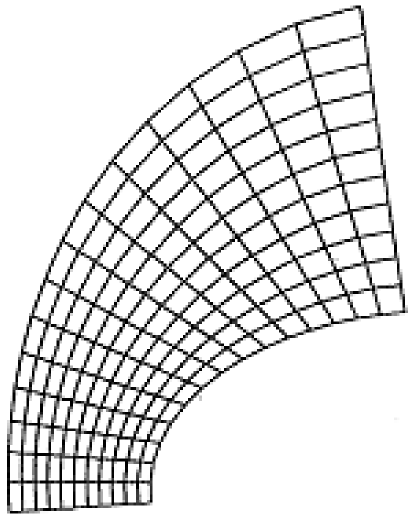
Οι παράγωγοι:

$\xi_x = 1$ $\qquad\qquad$ $\xi_x = 0$

$$n_x = \frac{-\left(\frac{H2 - H1}{L} \cdot y\right)}{\left[H1 + \frac{H2 - H1}{L} \cdot x\right]^2} \quad \text{ή} \quad n_x = -\left(\frac{H2 - H1}{L}\right) \frac{n}{H1 + \frac{H2 - H1}{L} \cdot \xi}$$

$$n_y = \frac{1}{H1 + \frac{H2 - H1}{L} \cdot x} \quad \text{ή} \quad n_y = \frac{1}{H1 + \frac{H2 - H1}{L} \cdot \xi}$$

και $J = \frac{1}{x_\xi \cdot y_n - y_\xi \cdot x_n}$ η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού.



Σχήμα 6.8: Πλέγμα που δημιουργήθηκε με αλγεβρικό τρόπο

6.4.2 Τεχνικές δημιουργίας πλέγματος με τη λύση Μ.Δ.Ε.

Με τις μεθόδους αυτές, ένα σύστημα Μ.Δ.Ε. επιλύεται με σκοπό τον καθορισμό των σημείων που αποτελούν το πλέγμα στο φυσικό πεδίο , ενώ το υπολογιστικό πεδίο είναι ορθογωνικού σχήματος με ισαπέχοντα σημεία. Οι μέθοδοι αυτές χωρίζονται σε ελλειπτικές παραβολικές και υπερβολικές, ανάλογα με τις Μ.Δ.Ε. που επιλύονται.

Δημιουργία ελλειπτικού πλέγματος

Το είδος αυτό χρησιμοποιείται για την δημιουργία πλέγματος όπου τα φυσικά όρια του πεδίου είναι γνωστά και καθορισμένα . Τα σημεία του πλέγματος στο φυσικό πεδίο , καθορίζονται σαν την λύση της εξίσωσης του Laplace ή του Poisson που είναι ελλειπτικές. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα σύστημα ελλειπτικών Μ.Δ.Ε. της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \\ n_{xx} + n_{yy} = 0 \end{bmatrix}$$

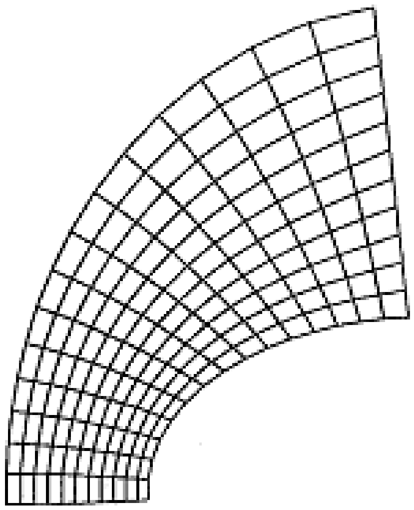
Όπου ξ και η είναι οι συντεταγμένες στο υπολογιστικό πεδίο. Οι παραπάνω εξισώσεις επιλύονται με επαναληπτικές τεχνικές , όπως το σχήμα Gauss – Seidel η το PSOR (Point Successive Over-Relaxation).

Ορίζοντας $a = x_n^2 + y_n^2, \quad b = x_\xi \cdot x_n + y_\xi \cdot y_n, \quad c = x_\xi^2 + y_\xi^2$

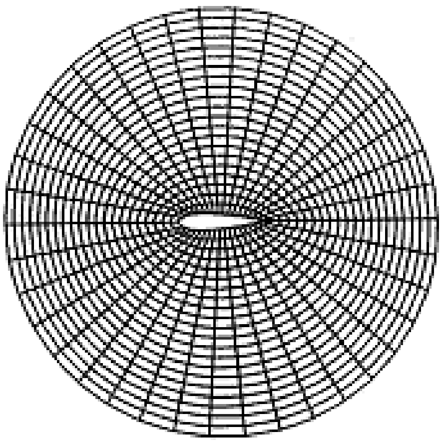
Το αρχικό σύστημα Μ.Δ.Ε. γίνεται :

$$\begin{bmatrix} a \cdot x_{\xi\xi} - 2b \cdot x_{\xi n} + c \cdot x_{nn} = 0 \\ a \cdot y_{\xi\xi} - 2b \cdot y_{\xi n} + c \cdot y_{nn} = 0 \end{bmatrix}$$

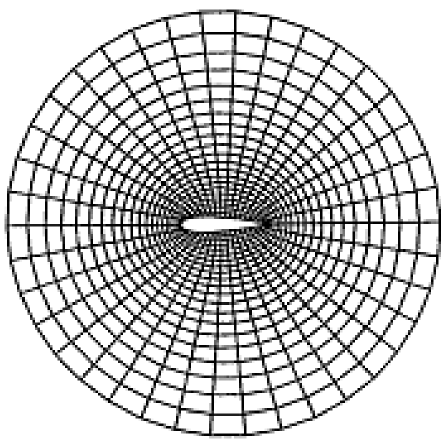
Το σύστημα των 2 τελευταίων Μ.Δ.Ε. επιλύεται στο υπολογιστικό πεδίο *(ξ,n)* για να προσδιορίσει τη κατανομή σημείων στο φυσικό πεδίο



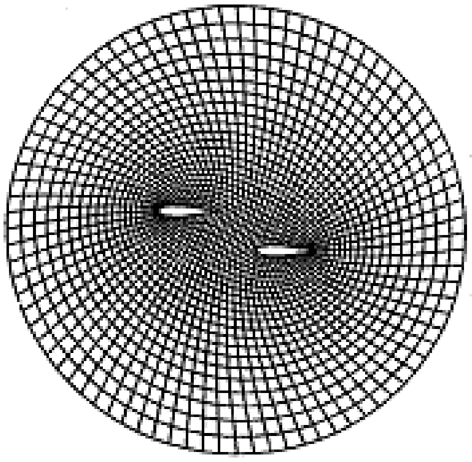
Σχήμα 6.9: Πλέγμα που δημιουργήθηκε με την επίλυση ελλειπτικής Μ.Δ.Ε.



Σχήμα 6.10: Αλγεβρικό πλέγμα που χρησιμοποιείται σαν αρχική λύση ελλειπτικού πλέγματος



Σχήμα 6.11: Πλέγμα που δημιουργήθηκε από την επίλυση ελλειπτικής Μ.Δ.Ε.

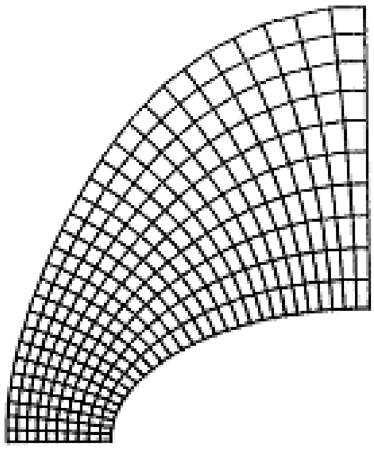


Σχήμα 6.12: Πλέγμα για τον υπολογισμό του ροϊκού πεδίου γύρω από σύνθετες αεροτομές (τύπου tandem)που δημιουργήθηκε από την επίλυση ελλειπτικής Μ.Δ.Ε.

Δημιουργία υπερβολικού πλέγματος

Σε αντίθεση με τα ελλειπτικά πλέγματα που χρησιμοποιούνται για την δημιουργία πλέγματος σε κλειστά πεδία ,τα υπερβολικά πλέγματα χρησιμοποιούνται όταν τα φυσικά πεδία είναι ανοικτά σε κάποιο από τα όριά τους , όταν π.χ. το όριο εξόδου δεν καθορίζεται.

Η μαθηματική ανάπτυξη αυτού του είδους πλέγματος βασίζεται σε 2 περιορισμούς :
(α) η καθετότητα των γραμμών του πλέγματος και
(β) Γεωμετρικοί προσδιορισμοί



Σχήμα 6.13: Πλέγμα που δημιουργήθηκε από την επίλυση υπερβολικής Μ.Δ.Ε.

6.5 Έλεγχος του συστήματος συντεταγμένων σε πλέγματα

Οι ελλειπτικές Μ.Δ.Ε. που επιλύονται για τη κατασκευή πλέγματος:

$$\begin{pmatrix} \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \\ n_{xx} + n_{yy} = 0 \end{pmatrix}$$

δεν περιλαμβάνουν καμία συνθήκη (option) για τον έλεγχο της κατανομής των σημείων του πλέγματος (πύκνωση ή αραίωση). Η θέση των σημείων γύρω από το σώμα καθώς και στο όριο εισόδου και εξόδου της ροής, είναι δεδομένα, άρα η πύκνωση του πλέγματος εξαρτάται από τον χρήστη. Για τον έλεγχο των σημείων του πλέγματος, πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά η εξίσωση Poisson, που ουσιαστικά εισάγει έναν όρο που δεν είναι μηδέν στο δεξί μέρος των παραπάνω Μ.Δ. Εξισώσεων:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = \mathrm{P}(\xi, n)$$

$$\mathrm{n}_{xx} + \mathrm{n}_{\mathrm{yy}} = \mathrm{Q}(\xi, n)$$

Τη στιγμή που η επίλυση των παραπάνω εξισώσεων γίνεται σε ένα ορθογωνικό πεδίο ισαπέχοντων σημείων, απαιτείται μετασχηματισμός των εξισώσεων και των οριακών συνθηκών.

Οι μετασχηματισμένες εξισώσεις είναι οι :

$$\alpha * X_{\xi\xi} - 2\mathrm{b} * X_{\xi n} + \mathrm{C} * \mathrm{X}_{\mathrm{nn}} = -\frac{1}{\mathrm{J}^2}(\mathrm{P} * \mathrm{X}_{\xi} + \mathrm{Q} * \mathrm{X}_{\mathrm{n}})$$

$$\alpha * Y_{\xi\xi} - 2\mathrm{b} * Y_{\xi n} + \mathrm{C} * \mathrm{Y}_{\mathrm{nn}} = -\frac{1}{\mathrm{J}^2}(\mathrm{P} * \mathrm{Y}_{\xi} + \mathrm{Q} * Y_{n})$$

Οι παραπάνω είναι ελλειπτικές εξισώσεις που μπορούν να επιλυθούν με επαναληπτική διαδικασία, αρκεί να είναι γνωστά τα P και Q. Οι συναρτήσεις P και Q επιλέγονται ανάλογα με τις ανάγκες. Αυτές μπορεί να είναι η πύκνωση σημείων σε κάποια περιοχή ή η ορθογωνικότητα του πλέγματος. Στα παρακάτω παρουσιάζονται αυτές οι δύο ιδιότητες.

6.6 Πύκνωση σημείων πλέγματος

Η πύκνωση σημείων πλέγματος μπορεί να επιτευχθεί με την κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων P και Q. Η πύκνωση μπορεί να είναι επιθυμητή κοντά σε μία γραμμή πλέγματος ή κοντά σε σημείο πλέγματος ή συνδυασμός των παραπάνω απαιτήσεων. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι επιθυμητή η πύκνωση πλέγματος κοντά στη γραμμή πλέγματος n_i ή κοντά στο σημείο με συντεταγμένες (ξ_i , n_j). Οι εξισώσεις για το P και Q στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\mathrm{P} = -\sum_{\mathrm{IS}=1}^{\mathrm{NI}} \alpha\,(\mathrm{IS}) \frac{\mathrm{I} - \mathrm{IAL}\,(\mathrm{IS})}{|\mathrm{I} - \mathrm{IAL}\,(\mathrm{IS})|}\, e^{(-\mathrm{c}(\mathrm{IS})*|\mathrm{I}-\mathrm{IAL}(\mathrm{IS})|)} - \sum_{\mathrm{JS}=1}^{\mathrm{NJ}} \mathrm{b}\,(\mathrm{IS}) \frac{\mathrm{I} - \mathrm{IAL}\,(\mathrm{JS})}{|\mathrm{I} - \mathrm{IAL}\,(\mathrm{JS})|}\, e^{\left\{-\mathrm{d}(\mathrm{JS})*\left[(\mathrm{I}-\mathrm{IAL}(\mathrm{JS}))^2+(\mathrm{J}-\mathrm{JAL}(\mathrm{JS}))^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}}$$

$$\mathbf{Q} = -\sum_{\mathrm{IS}=1}^{\mathrm{NI}} \alpha\,(\mathrm{IS}) \frac{\mathrm{J} - \mathrm{JAL}\,(\mathrm{IS})}{|\mathrm{J} - \mathrm{JAL}\,(\mathrm{IS})|}\, e^{(-\mathrm{c(IS)}*|\mathrm{J-JAL(IS)}|)}$$
$$-\sum_{\mathrm{JS}=1}^{\mathrm{NJ}} \mathrm{b}\,(\mathrm{IS}) \frac{\mathrm{J} - \mathrm{JAL}\,(\mathrm{JS})}{|\mathrm{J} - \mathrm{JAL}\,(\mathrm{JS})|}\, e^{\left\{-\mathrm{d(JS)}*\left[(\mathrm{I-IAL(JS)})^2+(\mathrm{J-JAL(JS)})^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}}$$

Όταν *Δn = Δξ = 1*

Σε διαφορετική περίπτωση ισχύει ότι:

$$\mathrm{P} = -\sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{M}} \alpha_m \frac{\xi - \xi_{\mathrm{m}}}{|\xi - \xi_{\mathrm{m}}|} e^{-c|\xi-\xi_m|} - \sum_{n=1}^{M} b_n \frac{\xi-\xi_n}{|\xi-\xi_n|} e^{-d_n\left[(\xi-\xi_n)^2+(n-n_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathrm{Q} = -\sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{M}} \alpha_m \frac{\mathrm{n} - \mathrm{n}}{|\mathrm{n} - \mathrm{n_m}|} e^{-c_m|n-n_m|} - \sum_{n=1}^{M} b_n \frac{n-n_n}{|n-n_n|} e^{-d_n\left[(\xi-\xi_n)^2+(n-n_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

όπου οι σταθερές *α* και *b, c* και *d* είναι δεδομένα. Οι τιμές *NI* ή *M* είναι οι αριθμοί των γραμμών του πλέγματος ξ ή /και η γύρω από τις οποίες απαιτείται η πύκνωση του πλέγματος, ενώ οι ποσότητες *IAL (IS)* και *JAL (IS)* δηλώνουν τις γραμμές. Όμοια οι τιμές των *NJ* ή *N* δηλώνουν τον αριθμό των γραμμών του πλέγματος γύρω από τις οποίες ζητείται η πύκνωση με *IAL (JS)* και *JAL (JS)* δηλώνουν τα σημεία.

Κάθε όρος των παραπάνω εξισώσεων παίζει ένα ρόλο. Ο πρώτος εκθετικός όρος στην εξίσωση που δίνει το P, έλκει τις γραμμές με σταθερό *ξ* κοντά στις γραμμές ξ_i, όπου σαν ξ_i μπορεί να είναι μία γραμμή ή μία σειρά γραμμών.

Για παράδειγμα μπορεί να είναι θεμιτό να πλησιάζουν γραμμές πλέγματος σε μία γραμμή που να αντιστοιχεί στο i = 16 όπου NI = 1 και IAL (1) = 16. Για πύκνωση γραμμών πλέγματος σε μία περιοχή γραμμών πλέγματος (τέτοιες με *i = 15, 16, 17), NI = 3* και *IAL (1) = 15, IAL (2) = 16, IAL (3) = 17.*

Παρόμοια ισχύουν και για τις εξισώσεις που δίνουν το *Q* για γραμμές πλέγματος με σταθερό *n*.

Ο όρος $\frac{I-IAL(IS)}{|I-IAL(JS)|}$ δίνει τη δυνατότητα της πύκνωσης και στις δύο πλευρές των γραμμών ξ_i , n_i. Απαλοιφή του όρου αυτού θα έδινε πύκνωση από τη μία μεριά και αραίωση από την άλλη μεριά των γραμμών πλέγματος.

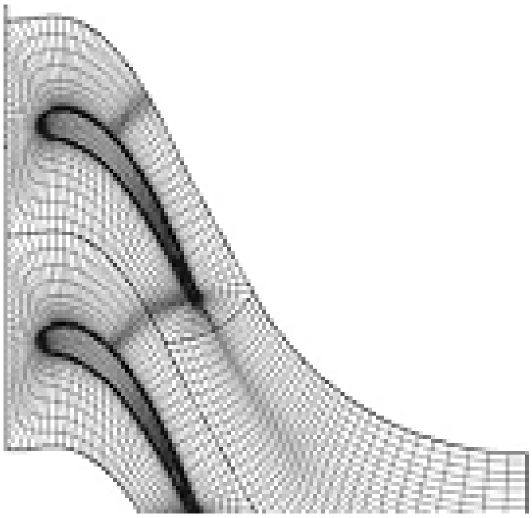
Ο δεύτερος όρος των εξισώσεων που δίνουν το P πυκνώνει τις γραμμές με σταθερό *ξ* γύρω από το σημείο (ξ_i , n_i). Παρόμοιο ρόλο παίζει ο δεύτερος όρος των εξισώσεων που δίνουν το Q, όπου οι γραμμές με σταθερό n πυκνώνουν κοντά στο σημείο με συντεταγμένες (ξ_i , n_j).

Για παράδειγμα θεωρείστε τη συμμετρική αεροτομή που δίνεται από την εξίσωση:

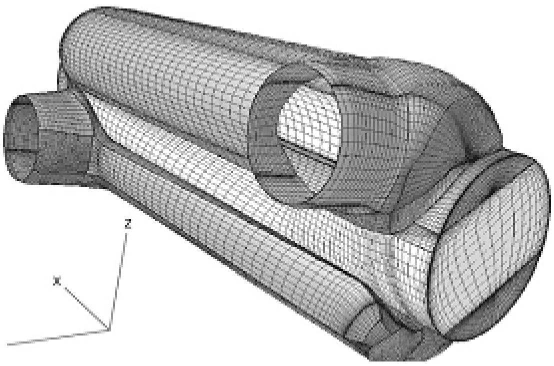
$$y = \frac{t}{0{,}2}\left(0{,}2969x^{\frac{1}{2}} - 0{,}126x - 0{,}3516x^2 + 0{,}2843x^3 - 0{,}1015x^4\right)$$

και θεωρείστε *t = 0,25.* όταν τα P και Q είναι μηδέν, το πλέγμα που προκύπτει είναι αυτό του παρακάτω σχήματος (α), όπου τα *IM* και *JM* είναι *21* και *18* αντίστοιχα.

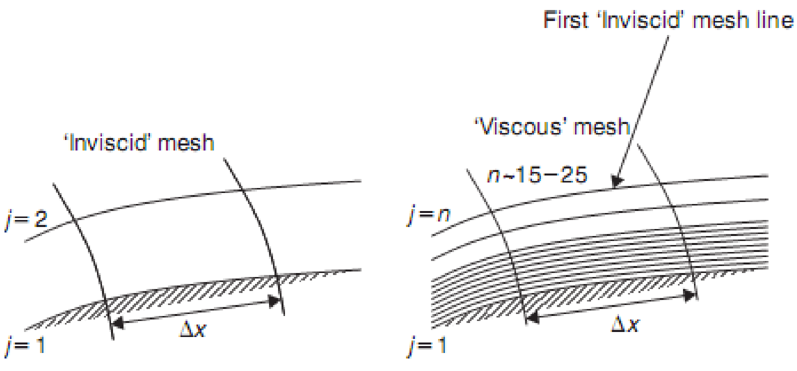
Όταν χρησιμοποιείται ο πρώτος όρος της εξίσωσης που δίνει το Q, πυκνώνει το πλέγμα σε σταθερές n – γραμμές. Στο σχήμα (β) έγινε, πύκνωση στη γραμμή του πλέγματος που αντιστοιχεί στο j = 14. Χρησιμοποιήθηκαν για τις σταθερές οι τιμές α = 40 και c = 2. Παρόμοια είναι τα αποτελέσματα όταν χρησιμοποιείται η εξίσωση που δίνει το P, στο σχήμα c, όπου έγινε πύκνωση κοντά στη γραμμή όπου i = 16 με σταθερές α = 10 και c = 1,2. στο σχήμα d έγινε πύκνωση των γραμμών πλέγματος κοντά στο σημείο i = 16, j = 14 και οι τιμές των α = 200 και c = 1.5.



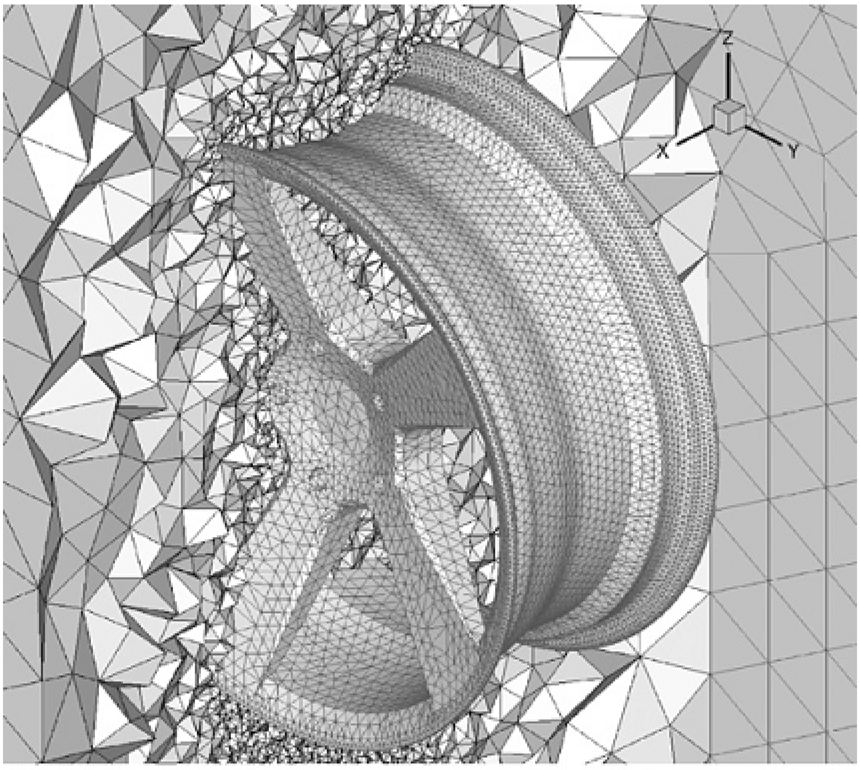
Σχήμα 6.14:Δομημένο πλέγμα τύπου O-H γύρω από αεροτομές στροφείου αξονικού στροβίλου



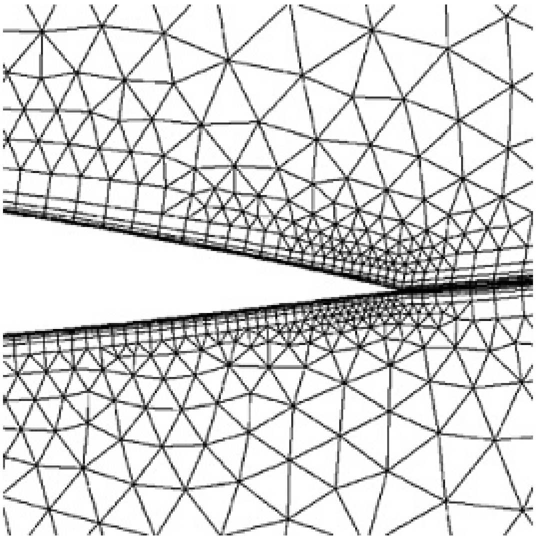
Σχήμα 6.15: Δομημένο πλέγμα πολλαπλών τεμαχίων (multiblock) για τον υπολογισμό εναλλάκτη θερμότητας



Σχήμα 6.16: Σύγκριση πλέγματος που χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων Euler (αριστερά) και πλέγματος χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes (δεξιά)



Σχήμα 6.17: Μη-δομημένο πλέγμα που αποτελείται από τετράεδρα για τη μελέτη ηλεκτροχημικής επίστρωσης σε ζάντες χρωμίου.



Σχήμα 6.18: Λεπτομέρεια μη-δομημένου πλέγματος κοντά σε στερεό σώμα

7. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ PANEL

7.1 Ασυμπίεστες και Άτριβες ροές

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων και η μέθοδος Panel. Οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιήθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1960 για υπολογισμούς σαν εργαλεία αεροδυναμικής στην αεροδυναμική βιομηχανία.
Ασυμπίεστη είναι η ροή για την οποία πυκνότητα του ρευστού διατηρείται σταθερή, δηλαδή ρ=σταθερή. Αφού η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή, ο όγκος που περιέχει μια ποσότητα ρευστού είναι σταθερός άρα η χρονική μεταβολή του όγκου του ρευστού ανά μονάδα όγκου είναι μηδέν.

$$\vec{\nabla} * \vec{V} = 0 \qquad (7.1)$$

Επιπλέον το κάθε στοιχείο ρευστού δεν περιστρέφεται αλλά κινείται πάνω σε μια ροϊκη γραμμή, άρα πρόκειται για ροή δίχως περιδινήσεις. Για τέτοιου είδους ροές, η ταχύτητα του ρευστού εκφράζεται σαν την βαθμίδα ενός μονόμετρου μεγέθους που ονομάζεται δυναμικό ταχύτητας της ροής και συμβολίζεται με το Φ.

$$\vec{V} = \nabla * \Phi \qquad (7.2)$$

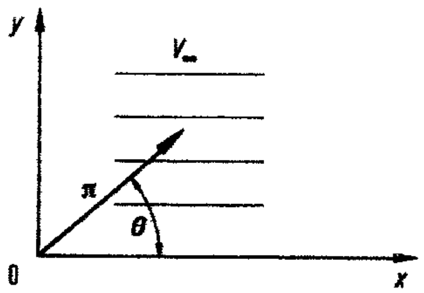
Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (7.1) και (7.2) προκύπτει ότι:

$$\nabla^2 * \Phi = 0 \qquad (7.3)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι άτριβη, ασυμπίεστη ροή δίχως περιδυνήσεις διέπεται από την εξίσωση του Laplace. Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική, πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί μία σύνθετη άτριβη, συμπίεση και δίχως περιστροφή ροή να συνθέτει από ένα άθροισμα απλών ροών.

7.1.1 Ομοιόμορφη ροή (uniform flow)

Ας θεωρήσουμε ότι μία ομοιόμορφη ροή με ταχύτητα V κινείται προς την x-διεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Ομοιόμορφη ροή

Η ροή αυτή δεν περιέχει περιστροφή ροϊκών γραμμών. Μία λύση που ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace είναι:

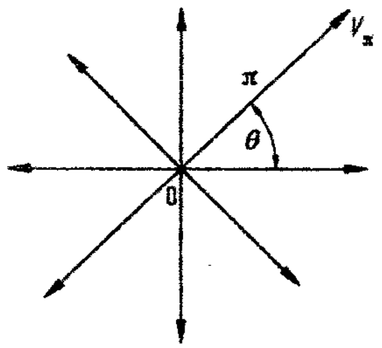
$$\Phi = V_{\infty *} \cdot x \qquad (7.4)$$

Σε πολικές συντεταγμένες *(r,θ),* η (7.4) γίνεται:

$$\Phi = V_{\infty *} \cdot r \cdot cos\theta \qquad (7.5)$$

7.1.2 Ροή από σημειακή πηγή ή καταβόθρα (source/sink flow)

Ας θεωρήσουμε τη ροή που αποτελείται από ευθείες ροϊκές γραμμές που πηγάζουν από ένα σημείο, η ταχύτητα κατά μήκος των ροϊκών αυτών γραμμών είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από την σημειακή πηγή. Αυτή η ροή που φαίνεται στο σχήμα 7.2, ονομάζεται ροή από σημειακή πηγή.



Σχήμα 7.2: Ροή από σημειακή πηγή

Η ροή αυτή είναι επίσης δίχως περιστροφή ροϊκών γραμμών και η ακόλουθη εξίσωση αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης του Laplace:

$$\Phi = \frac{\Lambda}{2\pi} lnr \qquad (7.6)$$

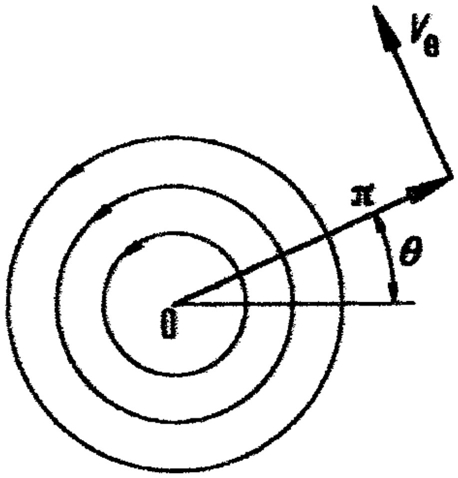
Όπου Λ είναι η ένταση της πηγής. Η φυσική σημασία του Λ είναι η ογκομετρική παροχή από την πηγή ανά μονάδα μήκους κάθετη στο επίπεδο της σελίδας. Αν το Λ είναι αρνητικό, τότε έχουμε ροή καταβόθρας, που είναι αντίθετη από τη ροή πηγής. Στο σχήμα 7.2, το σημείο Ο είναι η αρχή των ακτινικών ροϊκών γραμμών, και η φυσική του σημασία είναι ότι το σημείο αυτό είναι ιδιόμορφο διότι η ταχύτητα της ροής στο σημείο Ο απειρίζεται. Η γραμμή που είναι κάθετη στο επίπεδο του χαρτιού ονομάζεται γραμμή πηγών με ένταση *Λ* ανά μονάδα μήκους.

7.1.3 Ροή δίνης (vortex flow)

Ας θεωρήσουμε μία ροή όπου όλες οι ροϊκές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι γύρω από ένα σημείο. Η ταχύτητα κατά μήκους κάθε ροϊκής γραμμής είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από το κέντρο, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.3. Η ροή αυτή που δεν έχει περιστροφή, ονομάζεται ροή δίνης (vortex flow) και αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης του Laplace.

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} * \theta \qquad (7.7)$$

όπου το *Γ* είναι η ένταση της δίνης



Σχήμα 7.3: Ροή Δίνης

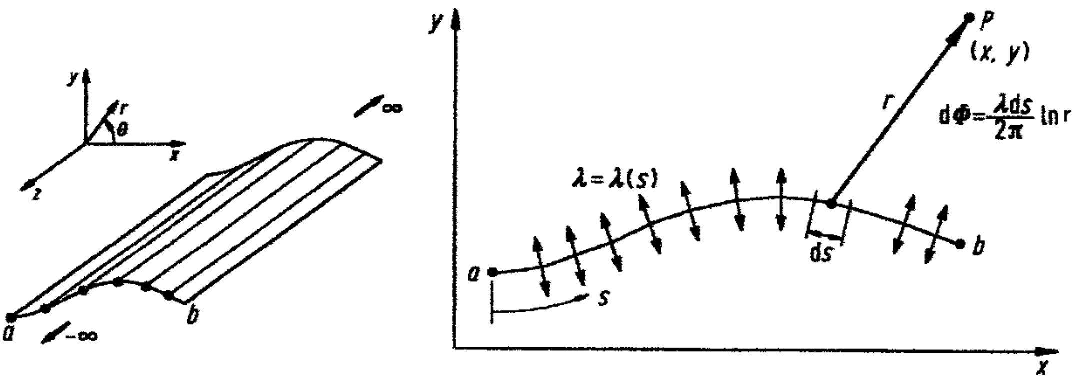
Στο σχήμα 7.3, το σημείο O είναι το κέντρο της δίνης που προκαλεί κυκλική ροή γύρω του και είναι επίσης ιδιόμορφο σημείο διότι σε αυτό η ταχύτητα V_θ απειρίζεται. Η ένταση της δίνης ονομάζεται κυκλοφορία και ορίζεται ως:

$$\Gamma = -\oint \vec{V} d\vec{s}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εφαπτόμενης ταχύτητας που είναι κάθετη σε στοιχείο μήκους *ds*, λαμβάνεται σε μία κλειστή καμπύλη.

7.2 Διδιαστατα σώματα δίχως ανωστικές δυνάμεις. Η μέθοδος Panel με κατανομή πηγών

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε έναν άπειρο αριθμό γραμμών από πηγές η μία δίπλα στην άλλη, όπου η ένταση της κάθε μια γραμμής από τις γραμμές πηγών είναι πολύ μικρό. Η συστοιχία αυτή των γραμμών με τις πηγές αποτελούν ένα φύλλο από πηγές, καθώς φαίνεται στο σχήμα 7.4. Αν κοιτάξουμε κατά μήκος του άξονα *z*, τότε το φύλλο που αποτελείται από γραμμές πηγών, θα φανεί σαν μια γραμμή, όπως στο σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.4: Φύλλο πηγών

Στο σχήμα αυτό κοιτάμε έτσι ώστε οι γραμμές πηγών είναι κάθετες στο επίπεδο της σελίδας.
Υποθέτουμε ότι η απόσταση κατά μήκος της επιφάνειας του σώματος είναι *s* και ότι $\lambda=\lambda(s)$ είναι η ένταση των πηγών ανά μονάδα μήκους κατά μήκος του *s*. Έτσι η ένταση ενός στοιχειώδους τμήματος μήκους *ds* της επιφάνειας *s* θα είναι $\lambda \cdot ds$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο P με καρτεσιανές

συντεταγμένες *(x,y)*. Το σημείο απέχει απόσταση ν από το τμήμα *ds*. Το απειροστό τμήμα μήκους *ds* του φύλλου δυναμικού έντασης $\lambda \cdot ds$ παράγει ένα απειροστό μικρό δυναμικό $d\Phi$ στο σημείο P δίνεται από :

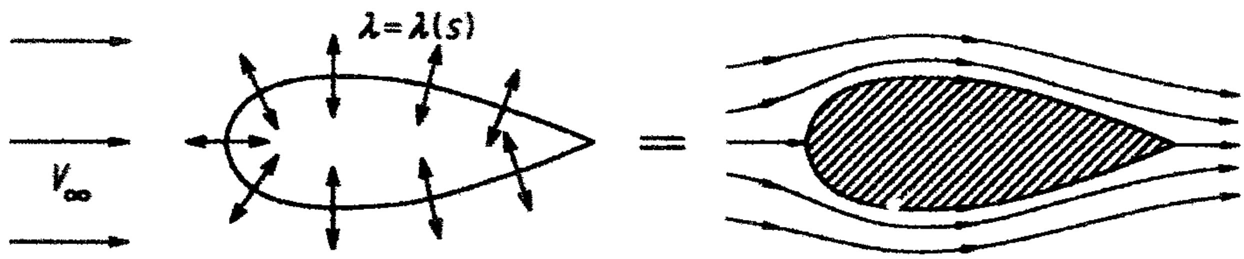
$$d\Phi = \frac{(\lambda * ds)}{(2 * \pi)} lnr \qquad (7.8)$$

Το δυναμικό ταχύτητας στο σημείο P που παράγεται από το συνολικό φύλλο πηγών από το α στο b, απαντάται με την ολοκλήρωση της εξίσωσης (7.8):

$$\Phi(x,y) = \int_a^b \frac{\lambda ds}{2\pi} lnr \qquad (7.9)$$

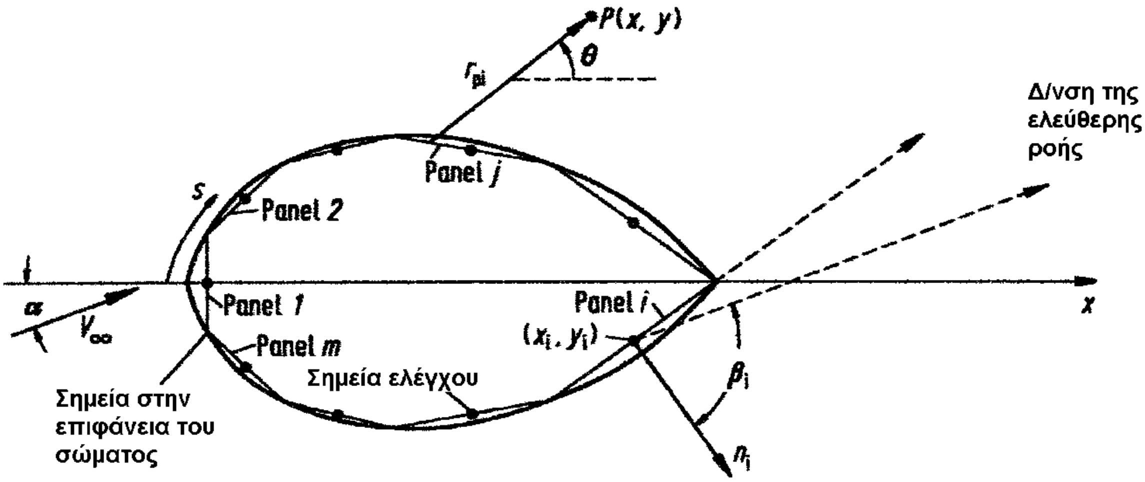
Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι γενικά, το πρόσημο του *λ(s)* μπορεί να αλλάζει από θετικό σε αρνητικό κατά μήκος του φύλλου πηγών το οποίο μπορεί να αποτελείται από πηγές και καταβόθρες.

Στη συνέχεια μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σώμα τυχαίων διαστάσεων σε μια ελεύθερη ροή ταχύτητας *V* όπως στο σχήμα 7.5. Ας θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια του σώματος αποτελείται από ένα φύλλο πηγών έντασης λ(s) που μεταβάλλεται σε τρόπο ώστε ο συνδυασμός της ελεύθερης ομοιόμορφης ροής V_∞ και του φύλλου πηγών, να σχηματίσουμε την επιφάνεια του σώματος σαν μία ροϊκή γραμμή της ροής. Τότε το πρόβλημα μας ανάγεται στον υπολογισμό των εντάσεων *λ(s)*. Η επίλυση του προβλήματος αυτού γίνεται αριθμητικά, όπως περιγράφεται παρακάτω:



Σχήμα 7.5: Υπέρθεση ομοιόμορφης ροής και φύλλου πηγών σε σώμα δεδομένου σχήματος, έτσι ώστε να παράγει την ροή γύρω από το σώμα.

Μπορούμε να εξιδανικεύσουμε (προσεγγίσουμε) το σώμα από μια σειρά ευθυγράμμων τμημάτων (panels), όπως φαίνεται στο σχήμα 7.6. Επιπλέον υποθέτουμε ότι η ένταση ανά μονάδα μήκους είναι σταθερή για κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα αλλά διαφέρει από το ένα ευθύγραμμο τμήμα στο άλλο. Έτσι, υποθέτουμε ότι έχουμε κατανείμει *η*-ευθύγραμμα τμήματα (panels).



Σχήμα 7.6: Κατανομή πηγών panel στην επιφάνεια σώματος

Αυτά τα *λ* είναι οι άγνωστοι. Η κύρια ιδιότητα της μεθόδου panel είναι ότι λύνοντας για να βρεθούν τα λ_i των i panels, αποκτάμε ταυτόχρονα την οριακή ροϊκή γραμμή της ροής. Αυτή η οριακά συνθήκη τίθεται αριθμητικά ορίζονται το μέσο του κάθε ευθυγράμμου τμήματος (panel) ως το σημείο ελέγχου του κάθε panel προσδιορίζοντας τα λ_i έτσι ώστε η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας να είναι μηδέν σε καθένα σημείο έλεγχου. Ας δούμε αναλυτικά πως γίνεται αυτό.
Έστω P*(x,y)* να είναι ένα σημείο του ροϊκού πεδίου και r_{pj} να είναι η απόσταση μεταξύ του P*(x,y)* και του σημείου έλεγχου του j-panel,όπως φαίνεται στο σχήμα 7.6.
Το δυναμικό ταχύτητας στο P έννοια του j-panel, είναι

$$\Delta\Phi_j = \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \ ln r_{pj} ds_j \tag{7.10}$$

Στην εξίσωση (7.10), η ένταση λ είναι σταθερή κατά μήκος όλου του ευθύγραμμου τμήματος του j-panel. Έτσι, το δυναμικό ταχύτητας στο P από όλα τα panels που έχουν κατανεμηθεί στην επιφάνεια του σώματος, είναι:

$$\Phi(P) = \sum_{j=1}^{n} \Delta\Phi_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \ ln r_{p_j} ds_j \tag{7.11}$$

όπου η απόσταση r_{pj} δίνεται από:

$$r_{\rho_j} = \sqrt{\left(x - x_j\right)^2 + (y - y_j)^2} \tag{7.12}$$

όπου *(x,y)* οι συντεταγμένες του σημείου έλεγχου του j-panel. Αφού το P είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του ροϊκού πεδίου, ας υποθέσουμε ότι είναι το σημείο έλεγχου του i-panel, με συντεταγμένες *(x,y)* όπως στο σχήμα 7.6. Τότε οι εξισώσεις (7.11) και (7.12) γίνονται:

$$\Phi(x_{i,y_i}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \ ln r_{i_j} ds_j \tag{7.13}$$

$$r_{i_j} = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + (y_i - y_j)^2} \tag{7.14}$$

Η εξίσωση (7.13) αναπαριστά τη συνεισφορά όλων των panel στο δυναμικό ταχύτητας του i-panel. Για τον καθορισμό των οριακών συνθηκών, θεωρούμε ότι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο σημείο έλεγχου του i-panel.
Επίσης, θεωρούμε ότι η ταχύτητα V_∞ της ελεύθερης ροής έχει γωνία πρόσπτωσης α με τον x- άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.6. Έτσι, η συνιστώσα της $V_{\infty,n}$ που είναι κάθετη στο i-panel,είναι η:

$$V_{\infty,n} = \overrightarrow{V_\infty} \cdot \overrightarrow{n_i} = V_\infty \cdot \cos\beta_i \qquad (7.15)$$

όπου η γωνία είναι η γωνία β_i μεταξύ των διανυσμάτων V_∞ και n_i. Παρατηρουμε ότι η $V_{\infty,n}$ είναι θετική όταν έχει διεύθυνση να απομακρύνεται από το σώμα και αρνητική όταν η διεύθυνση της είναι προς το εσωτερικό του σώματος.
Η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο σημείο $(x_{i,}, y_i)$ από όλα τα panels είναι:

$$V_n = \frac{\lambda}{\lambda_n}[\Phi(x_{i,}, y_i)] \qquad (7.16)$$

Μια ιδιόμορφη κατάσταση συμβαίνει όταν $i=j$ διότι εκεί $V_{i,j} = 0$. Τοτε η συνεισφορά είναι μόνο *λ/2*.
Συνδυάζοντας τις εξισώσεις(7.15) και (7.16) παίρνουμε:

$$V_n = \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \frac{\lambda}{\lambda n_i}(ln r_{i_j})ds_j \qquad (j \neq 1) \qquad (7.17)$$

Στην εξίσωση αυτή, ο όρος $\lambda_i/2$ είναι η κάθετη ταχύτητα στο σημείο έλεγχου του i-panel από τον εαυτό του, ενώ ο δεύτερος όρος είναι η συνεισφορά όλων των υπολοίπων panel στο σημείο έλεγχου του i-panel.
Η οριακή συνθήκη επιβάλει το άθροισμα

$$V_n = \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \frac{\lambda}{\lambda n_i}(ln r_{ij})ds_j + V_{\infty\cos\beta_i}=0 \qquad (7.18)$$

Στην εξίσωση (7.18) ο όρος που βρίσκεται στο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από την γεωμετρία του σώματος και όχι από την ροη. Έστω $I_{i,j}$ είναι η τιμή του ολοκληρώματος. Όταν το σημείο ελέγχου βρίσκεται στο i-panel και το ολοκλήρωμα είναι j-panel. Τότε η εξίσωση (7.18) γράφεται:

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{2\pi}I_{i,j} + V_{\infty\cos\beta_i} = 0 \qquad (7.19)$$

Η εξίσωση (7.19) είναι γραμμική αλγεβρική εξίσωση με άγνωστους *n*-τον αριθμό, που είναι τα $\lambda_1,\lambda_2,......,\lambda_n$. Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε τα $\lambda_1,\lambda_2,......,\lambda_n$ και έχουμε κατανομή των εντάσεων των πηγών. Αυξάνοντας τον αριθμό των panel με τα οποία εξιδανικεύουμε το σώμα, αυξάνουμε την ακρίβεια των υπολογισμών. Στη πράξη 50-100 panel είναι αρκετά για τον υπολογισμό των περισσότερων αεροτομών.
Όταν υπολογίσουμε τα $\lambda_1,\lambda_2,......,\lambda_n$ και υποθέτοντας ότι η απόσταση κατά μήκος του σώματος συμβολίζεται με *s* η συνιστώσα της ελεύθερης ροής που είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια του σώματος είναι:

$$V_{\infty,s}=V_\infty \sin\beta_i \qquad (7.20)$$

Η εφαπτόμενη ταχύτητα V_s στο σημείο έλεγχου του i-panel λόγω της συνεισφοράς όλων των panel, είναι:

$$V_s = \frac{\lambda\Phi}{\lambda S} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \frac{\lambda}{\lambda s}(\ln r_{ij})ds_j \qquad (7.21)$$

Η συνολική ταχύτητα στο σημείο έλεγχου του i-panel είναι το άθροισμα των συνεισφορών της ελεύθερης ροής συν τη συνεισφορά όλων των panel.

$$V_i = \ V_{\infty,s} + V_s = V_\infty \sin\beta_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \frac{\lambda}{\lambda s}(\ln r_{ij})ds_j \qquad (7.22)$$

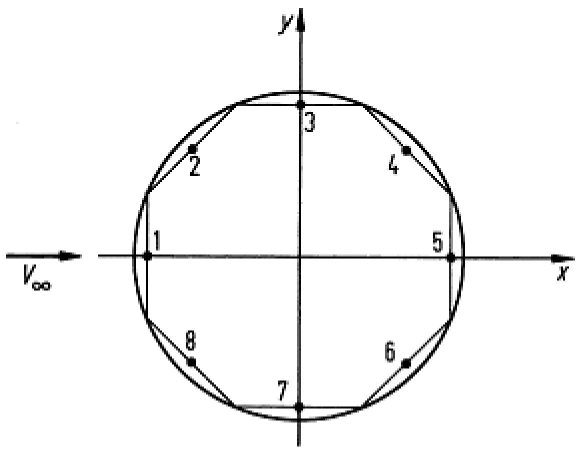
Ο συντελεστής πίεσης στο σημείο έλεγχου του i-panel προκύπτει από την εξίσωση του Bernoulli

$$C_{Pi} = 1 - \left(\frac{V_i}{V_\infty}\right)^2 \qquad (7.23)$$

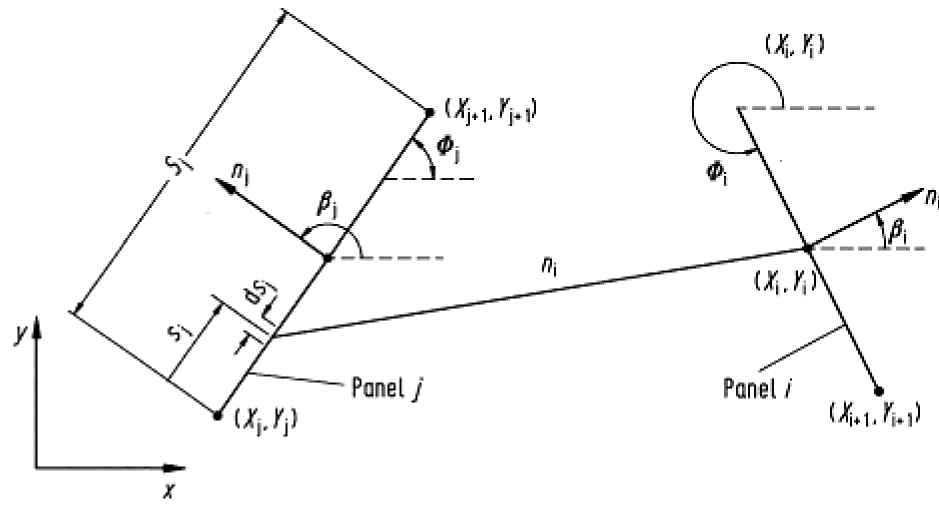
Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατός ο υπολογισμός της κατανομής πίεσης στην επιφάνεια σώματος οποιασδήποτε γεωμετρίας.
Για ένα κλειστό σώμα το άθροισμα των εντάσεων των πηγών και των καταβόθρων που έχουν κατανεμηθεί στην επιφάνεια του, πρέπει να υπακούει την εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j S_j = 0 \qquad (7.24)$$

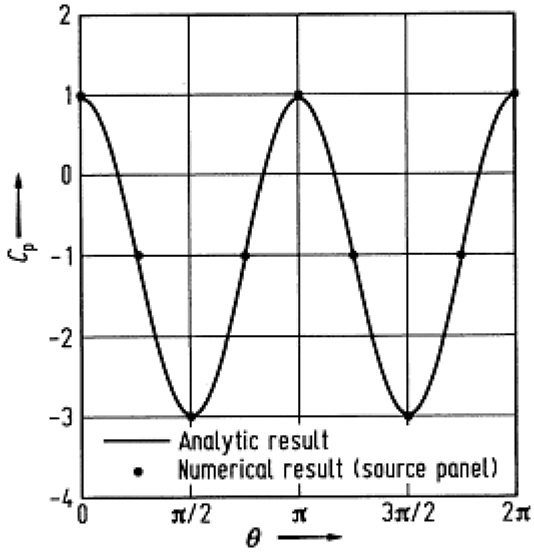
Η εξίσωση (7.24) είναι ένας επιπλέον έλεγχος ότι οι υπολογισμοί των εντάσεων λ είναι ακριβείς.



Σχήμα 7.7: Κατανομή panels σε κύλινδρος σε ομοιόμορφη ροή



Σχήμα 7.8: Γεωμετρικά στοιχεία για τον υπολογισμό του μητρώου $I_{i,j}$



Σχήμα 7.9: Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_P γύρω από κύλινδρο και σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τη θεωρία.

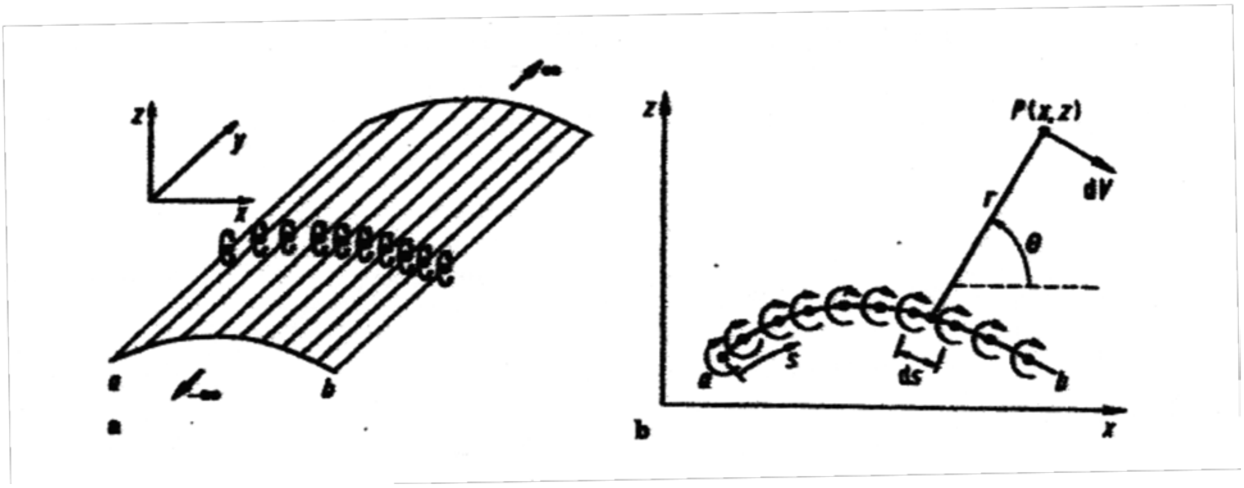
7.3 Ροές γύρω από σώματα που παρουσιάζουν ανωστικές δυνάμεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την εφαρμογή της μεθόδου Panel με κατανομή φύλλου πηγών (source sheet). Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την εφαρμογή την εφαρμογή της μεθόδου με κατανομή φύλλου δυνών (vortex sheet). Αυτά τα φύλλα δυνών που φαίνονται στο σχήμα 7.10, αποτελούνται από άπειρο αριθμό γραμμών δινών (vortex filaments), που τοποθετούνται η μια δίπλα στην άλλη. Προβάλλοντας κάθετα στον άξονα που είναι κατά μήκος των γραμμών δινών (άξονας y στο σχήμα 7.10α), παίρνει κανείς τη δυσδιάστατη προβολή του σχήματος 7.10β.
Υποθέτουμε ότι S είναι η απόσταση κατά μήκος του σώματος και ότι $\gamma = \gamma(s)$ είναι η ένταση του φύλλου δίνης ανά μονάδα μήκους κατά μήκος του σώματος S. Έτσι, η ένταση ενός απειροστά μικρού τμήματος *ds* θα είναι *γds*. Ας θεωρήσουμε τώρα το σημείο P που βρίσκεται εντός του σώματος και απέχει απόσταση *r* από το τμήμα *ds*. Το μικρό αυτό τμήμα ds προσδίδει ένα δυναμικό ταχύτητας που είναι:

$$\Delta\Phi = -\frac{\gamma\, ds}{2\pi}\theta \tag{7.25}$$

Το δυναμικό ταχύτητας από όλο το φύλλο δινών, στο σημείο P είναι:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_a^b \gamma\,\theta\, ds \tag{7.26}$$



Σχήμα 7.10: Σχηματισμός φύλλου δινών

Επιπρόσθετα, η κυκλοφορία Γ γύρω από φύλλο δινών είναι το άθροισμα των εντάσεων των στοιχειωδών στροβίλων, δηλαδή:

$$\Gamma = \int_a^b \gamma \, ds \qquad (7.27)$$

Μία ακόμη ιδιότητα φύλλου δίνης είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας κατά πλάτος του φύλλου δίνης (δηλαδή ακριβώς επάνω και ακριβώς κάτω από το φύλλο δίνης) παρουσιάζει μια συνεχή μεταβολή, που είναι:

$$\gamma = u_1 - u_2 \qquad (7.28)$$

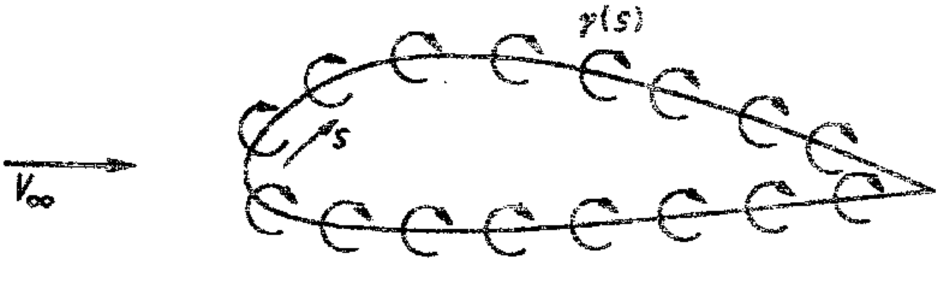
Η παραπάνω χρησιμοποιείται για να δείχνει ότι για τον υπολογισμό ροϊκού πεδίου γύρο από την αεροτομή, η τιμή γ είναι μηδέν για το χείλος εκφυγής της αεροτομής, δηλαδή:

$$\Gamma_{TE} = 0 \qquad (7.29)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια μορφή της συνθήκης Kutta που καθορίζει την ακριβή τιμή της κυκλοφορίας γύρω από αεροτομή με σφηνοειδές χείλος εκφυγής. Η κυκλοφορία γύρω από το φύλλο δίνης σχετίζεται με τη δύναμη άνωσης στο φύλλο δίνης από το θεώρημα Kutta-Joukowski

$$L = \rho_\infty \cdot V_\infty \cdot \Gamma \qquad (7.30)$$

Από την εξίσωση μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι μη μηδενική τιμή της κυκλοφορίας Γ για να υπάρχει ανωστική δύναμη σε μια αεροτομή. Αυτό σημαίνει ότι ο τελικός στόχος της μεθόδου Panel είναι ο υπολογισμός της κυκλοφορίας γύρω από το σώμα με στόχο των υπολογισμό της άνωσης L.
Ας θεωρήσουμε δισδιάστατο σώμα που φαίνεται στο σχήμα 7.11 το οποίο αποτελείται από ένα φύλλο δινών γύρω από το σώμα.



Σχήμα 7.11: Εξιδανίκευση αεροτομής τυχαίας γεωμετρίας κατανέμοντας ένα φύλλο δίνης γύρο από την αεροτομή.

Το ζητούμενο είναι η ένταση *γ(s)* έτσι ώστε η επιφάνεια του σώματος να γίνει ροϊκή γραμμή. Ας προσεγγίσουμε το φύλο δινών με μια σειρά ευθύγραμμων panel, που είναι n του αριθμού και το καθένα από αυτά έχει μια σταθερή τιμή έντασης δίνης $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n$. Οι εντάσεις αυτές γ_j, $j=1,\ldots, n$ είναι οι άγνωστοι του προβλήματος. Το μέσο του κάθε ευθύγραμμου τμήματος (panel) είναι το σημείο ελέγχου του κάθε panel, για το οποίο εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες, δηλαδή σε κάθε σημείο ελέγχου η κάθετη συνιστώσα της ροής είναι ίση με το μηδέν.

Έστω P*(x,y)* ένα σημείο του ροϊκού πεδίου και r_{pj} είναι η απόσταση του P από το σημείο ελέγχου του *j*-panel. Η απόσταση r_{pj} σχηματίζει γωνία θ_{pj} με τον x-άξονα. Το δυναμικό ταχύτητας στο P ένεκα του *j*-panel είναι:

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{2\pi}\int_j \theta_{pj}\gamma_j ds_j \tag{7.31}$$

όπου η ένταση της δύνης γ_j είναι σταθερή κατά μήκος του j-panel. Η γωνία θ_{pj} , είναι:

$$\Theta_{pj} = \tan^{-1}\left(\frac{y-y_j}{x-x_j}\right) \tag{7.32}$$

Το δυναμικό ταχύτητας στο *P* από όλα τα panel βρίσκεται αν προσθέσουμε την επίδραση στο *P* από όλα τα panel:

$$\Phi(P) = \sum_{j=1}^{n}\Phi_j = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_i}{2\pi}\int_j \theta_{pj}\, ds_j \tag{7.33}$$

Τη στιγμή που το P είναι οποιοδήποτε σημείο του ροϊκού πεδίου, ας είναι το P το σημείο ελέγχου του *i*-panel. Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι (x_i,y_i). Τότε οι εξισώσεις (7.32) και (7.33) γίνονται:

$$\Theta_{i,j} = \tan^{-1}\left(\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\right) \tag{7.34}$$

$$\Phi(x_i,y_i) = -\sum_{j=1}^{n}\frac{y_i}{2\pi}\int_j \Theta_{ij} ds_{ij}$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει την συνεισφορά όλων των panel στο δυναμικό ταχύτητας του *j*-panel.

Σε όλα τα σημεία ελέγχου η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδέν. Η ταχύτητα αυτή προκύπτει από την υπέρθεση της ομοιόμορφης ροϊκής ταχύτητας V_∞ και την ταχύτητα στο i-panel από όλα τα panels.Η ταχύτητα V_∞ κάθετη στο i-panel είναι:

$$V_{\infty,n} = V_\infty \cdot \cos\beta_i \tag{7.35}$$

Η κάθετη στο panel ταχύτητα στο σημείο ελέγχου (x_i,y_i), είναι:

$$V_n = \frac{\partial\Phi(x_i,y_i)}{\partial n_i} \tag{7.36}$$

Συνδυάζοντας της εξισώσεις (7.34) και (7.36) παίρνουμε:

$$V_n = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_i}{2\pi}\int_j \frac{\partial\theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j \tag{7.37}$$

Όπου η πρόσθεση γίνεται σε όλα τα panels. Η οριακή συνθήκη ότι η κάθετη ταχύτητα στα panels (στα σημεία ελέγχου) είναι μηδέν, είναι:

$$V_{\infty,n} + V_n = 0 \tag{7.38}$$

Αντικαθιστώντας της (7.35) και (7.37) στην (7.38), παίρνουμε:

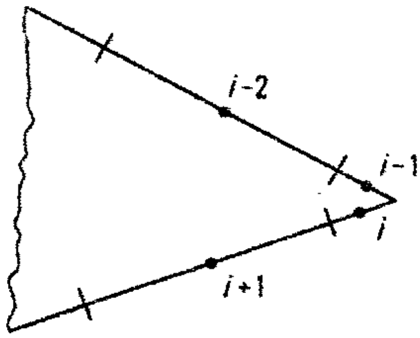
$$V_\infty \cos\beta_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\pi} \int_j \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j = 0 \tag{7.39}$$

Οι τιμές των ολοκληρωμάτων στη παραπάνω εξίσωση εξαρτώνται απ' τη γεωμετρία των panels και μόνο. Ας συμβολίσουμε J_{ij} την τιμή του ολοκληρώματος όταν το σημείο ελέγχου αναφέρεται στο i-panel. Τότε η εξίσωση (7.39) γράφεται σαν:

$$V_\infty \cos\beta_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_i}{2\pi} J_{i.j} = 0 \tag{7.40}$$

Η εξίσωση (7.40) είναι γραμμική αλγεβρική εξίσωση με n-αγνώστους, τα $\gamma_1,\gamma_2,....,\gamma_n$. Η εξίσωση αυτή αναπαριστά την οριακή συνθήκη στο σημείο ελέγχου του κάθε panel. Αν η (7.40) εφαρμοστεί για τα σημεία ελέγχου όλων των panel παίρνουμε ένα σύστημα n-γραμμικών εξισώσεων με n-αγνώστους.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αντιπαραβάλουμε την μέθοδο panel με κατανομή φύλλων πηγών με τη κατανομή φύλλων δινών. Οι ομοιότητες είναι πολλές, η κυριότερη διαφορά είναι ότι η δεύτερη μέθοδος πρέπει να ικανοποιήσει τη συνθήκη Kutta στο χείλος εκφυγής. Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους.



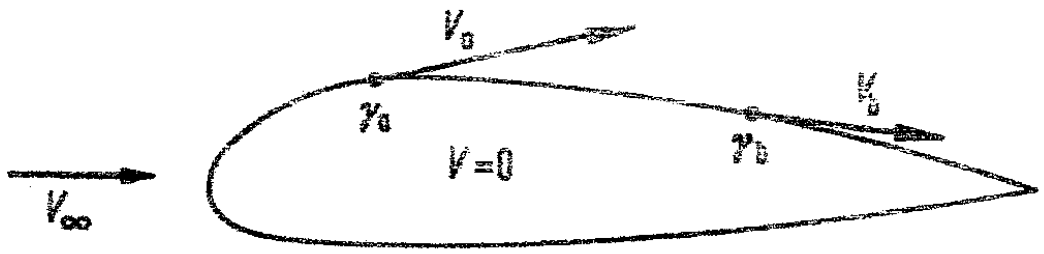
Σχήμα 7.12: Διαμόρφωση panel στο χείλος εκφυγής

Τα σχήμα 7.12 περιγράφει μια λεπτομέρεια κατανομής panel δινών στο χείλος εκφυγής. Ας θεωρήσουμε ότι τα panel $i-1$ και i που βρίσκονται στο χείλος εκφυγής είναι μικρά. Η συνθήκη Kutta εφαρμοζόμενη ακριβώς στο χείλος εκφυγής δίνει ότι $\gamma_{(TE)} = 0$. Η αριθμητική προσέγγιση αυτής της συνθήκης, δεδομένου ότι τα σημεία i και $i-1$ είναι αρκετά κοντά στο χείλος εκφυγής, είναι:

$$\gamma_i = -\gamma_{i-1} \tag{7.41}$$

Έτσι για την εφαρμογή της συνθήκης Kutta πρέπει να εφαρμοστεί η συνθήκη (7.41), ή κάποια ισοδύναμη. Με την εφαρμογή της (7.41) το σύστημα των εξισώσεων είναι υπερπροσδιορισμένο, δηλαδή έχουμε n-αγνώστους με $n+1$-εξισώσεις. Για να έχουμε λοιπόν ένα καλώς προσδιορισμένο σύστημα, αγνοούμε μια από τις εξισώσεις του συστήματος (7.40) και δεν υπολογίζουμε την ένταση της δίνης για ένα από τα σημεία ελέγχου. Συνδυάζοντας την (7.41), παίρνουμε ένα σύστημα με n-εξισώσεις και n-αγνώστους.
Έχοντας προσδιορίσει τις εντάσεις $\gamma_1,\gamma_2,....,\gamma_n$ ώστε η επιφάνεια του σώματος να γίνει οριακά ροϊκή γραμμή και να ικανοποιούν παράλληλα την συνθήκη Kutta, μένει να προσδιοριστεί η εφαπτομενική

ταχύτητα σε κάθε σημείο ελέγχου από το γ. Αυτό προκύπτει θεωρώντας την αεροτομή του σχήματος 7.13.



Σχήμα 7.13: Αεροτομή σαν στερεό σώμα με μηδενική ταχύτητα στο εσωτερικό τους

Συγκεντρώνεται το ενδιαφέρον μας στο εξωτερικό της αεροτομής, διότι στο εσωτερικό της αεροτομής η ταχύτητα είναι μηδέν. Αν με u_1 συμβολίσουμε τη ταχύτητα στην μια πλευρά (εξωτερικό) του σώματος και με u_2 στην άλλη πλευρά του σώματος, τότε σύμφωνα με την εξίσωση (7.28).

$$\gamma = u_1 - u_2 = u_1 - 0 = u_1$$

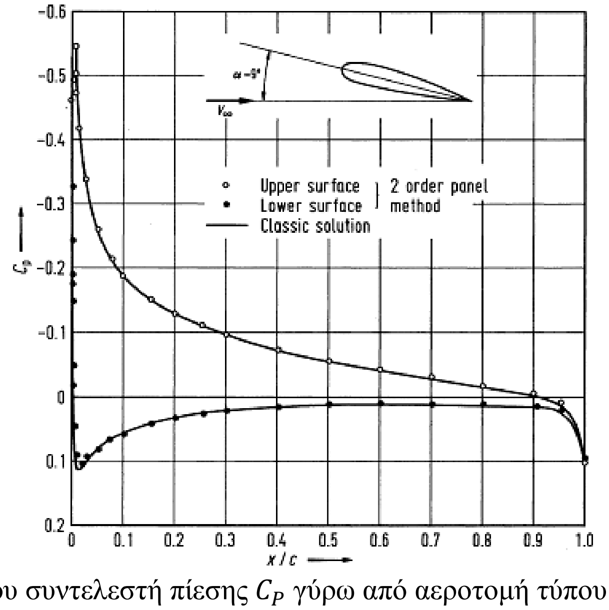
Στη συγκεκριμένη περίπτωση η ταχύτητα u_1 συμβολίζει την εφαπτόμενη ταχύτητα V_a που αντιστοιχεί στη ένταση δίνης γ_a στο σημείο a και V_b είναι η ταχύτητα που αντιστοιχεί στο σημείο b κλπ. Άρα οι ταχύτητες σε κάθε σημείο ελέγχου είναι ίσες με τις εντάσεις δίνης στο αντίστοιχο σημείο.
Η συνολική κυκλοφορία γύρω από το σώμα είναι:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j s_j \qquad (7.42)$$

Έτσι η άνωση ανά μονάδα μήκους κάθετα στο επίπεδο , είναι:

$$L' = \rho_\infty \cdot V_\infty \cdot \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \cdot s_j \qquad (7.43)$$

Η μέθοδος που μόλις περιγράψαμε ονομάζεται μέθοδος Panel πρώτης τάξης διότι υποθέτει σταθερή τιμή έντασης δίνης ανά panel.

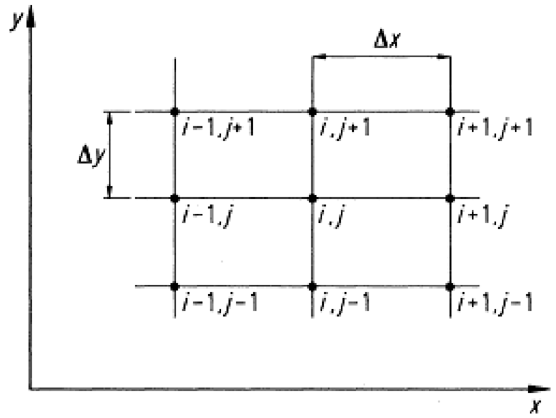


Σχήμα 7.14: Κατανομή του συντελεστή πίεσης C_P γύρω από αεροτομή τύπου NACA0012 και σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με θεωρητικά αποτελέσματα

8. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ

8.1 Γενικά

Οι αναλυτικές λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων εμπλέκουν μαθηματικές εκφράσεις κλειστής μορφής οι οποίες δίνουν την συνεχόμενη διακύμανση των εξαρτώμενων μεταβλητών σε όλο το πεδίο. Σε αντίθεση, οι υπολογιστικές μέθοδοι μπορούν να δώσουν λύσεις μόνο για διακριτά σημεία του πεδίου που ονομάζονται σημεία πλέγματος. Για παράδειγμα θεωρήστε το σχήμα 8.1 το οποίο δείχνει ένα τμήμα του διακριτού πλέγματος στο επίπεδο *x-y*. Για διευκόλυνση ας θεωρήσουμε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων που αποτελούν το πλέγμα τόσο στη *x* όσο και στην *y* διεύθυνση είναι ομοιόμορφα, με ένα βήμα Δx και Δy αντίστοιχα. Συνήθως τα Δx και Δy είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Πράγματι δεν είναι απαραίτητο τα Δx και Δy να είναι ομοιόμορφα, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν τελείως διαφορετικά βήματα και στις δύο διευθύνσεις όπου το Δx να έχει διαφορετική τιμή για κάθε επόμενο βήμα του πλέγματος και το ίδιο για το Δy. Παρόλα αυτά η πλειονότητα των υπολογιστικών μεθόδων χρησιμοποιούν πλέγματα με ομοιόμορφα βήματα σε κάθε διεύθυνση γιατί αυτό απλοποιεί πολύ το προγραμματισμό της λύσης, εξοικονομεί αποθηκευτικό χώρο στη μνήμη του υπολογιστή και έχει μεγαλύτερη ακρίβεια. Αυτή η ομοιομορφία στα βήματα δεν απαιτείται να συμβαίνει το φυσικό χώρο *(x,y),* καθώς συνηθίζεται συχνά στις υπολογιστικές μεθόδους να εκτελούνται σε τροποποιημένο υπολογιστικό πεδίο που να έχει ομοιόμορφο βηματισμό στις ανεξάρτητες μεταβλητές που όμως να ανταποκρίνονται στο μη- ομοιόμορφο βηματισμό του φυσικού πεδίου.



Σχήμα 8.1: Διακριτά σημεία πλέγματος στις δύο διαστάσεις

Επιστρέφοντας στο σχήμα 8.1 τα σημεία του πλέγματος είναι προσδιορισμένα με έναν δείκτη *i* ο οποίος διατρέχει τη διεύθυνση *x* και ένας δείκτης *j* που διατρέχει τη διεύθυνση *y*. Άρα, αν *(i,j)* είναι οι δείκτες για το σημείο P τότε το σημείο ακριβώς στα δεξιά του θα είναι το *(i+1,j)* , το σημείο ακριβώς αριστερά του θα είναι το *(i-1,j),* το σημείο ακριβώς από πάνω το *(i,j+1)* και το σημείο ακριβώς από κάτω το *(i,j-1).* Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών είναι ευρέως διαδεδομένη υπολογιστικά. Η φιλοσοφία της μεθόδου αυτής είναι να αντικαταστήσει τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται στις εξισώσεις της Ρευστομηχανικής με αλγεβρικούς όρους διαφοράς δίνοντας ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που μπορούν να λυθούν για μεταβλητές του πεδίου ροής στα συγκεκριμένα σημεία του πλέγματος.
Ας προχωρήσουμε να εξάγουμε μερικούς από τους πιο συνηθισμένους αλγεβρικούς όρους διαφοράς που χρησιμοποιούνται για να καταστήσουμε διακριτές τις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

8.2 Προσέγγιση της πρώτης παραγώγου με σειρά Taylor

Τα διαφορικά που εμφανίζονται στις μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη Μηχανικής των Ρευστών πρέπει να εκφραστούν σαν προσέγγιση έτσι ώστε να επιλυθούν αριθμητικά με τη βοήθεια υπολογιστή. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η προσέγγιση των διαφορικών μιας συνάρτησης f με ανάπτυγμα σειράς Taylor.

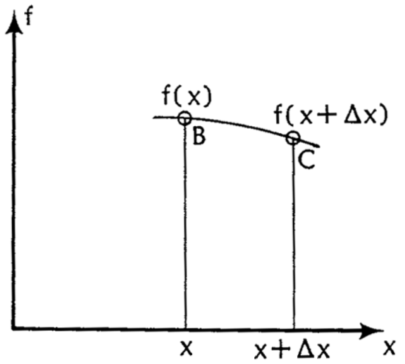
Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ δίνεται, δηλαδή είναι γνωστή, τότε η συνάρτηση $f(x+\Delta x)$ μπορεί να εκφραστεί σε σειρά σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + ... = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Delta x)^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

Λύνοντας ως προς $\frac{\partial f}{\partial x}$ τότε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + ... \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \ ,$$

όπου $O(\Delta x)$ οι όροι τάξης μεγέθους Δx .
Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί προσέγγιση για τη $1^{ης}$ τάξης παράγωγο της συνάρτησης f .
Γραφικά, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.2, η προσέγγιση αυτή αναπαρίσταται ως η κλίση της $f(x)$ στο σημείο *B* χρησιμοποιώντας τις τιμές της συνάρτησης στα *B* και *C*.



Σχήμα 8.2: Προσέγγιση της παραγώγου $\partial f/_{\partial x}$ χρησιμοποιώντας τα σημεία $x,\ x+\Delta x$

Αν ο δείκτης i χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει ένα διακριτό σημείο x , τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Χρησιμοποιώντας τα σημεία $x - \Delta x$ για τη προσέγγιση της παραγώγου $\frac{\partial f}{\partial x}$ γύρω από το σημείο x τότε:

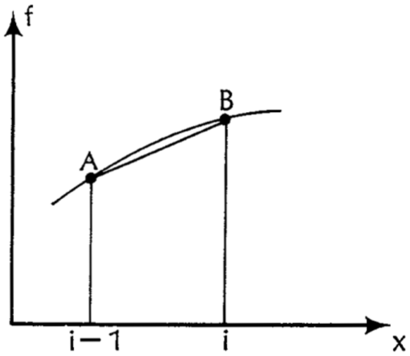
$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + ... = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\pm\frac{(\Delta x)^n}{n!}\right]\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\begin{cases} n,\ \alpha\rho\tau\iota o\varsigma(+) \\ n,\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma(-)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

ή

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 8.3, γραφικά η παράγωγος $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i$ είναι η κλίση της συνάρτησης $f(x)$ στο *B* χρησιμοποιώντας τις τιμές της συνάρτησης f στα σημεία *A* και *B*.



Σχήμα 8.3: Προσέγγιση της παραγώγου $\partial f/_{\partial x}$ χρησιμοποιώντας τα σημεία $x,\ x-\Delta x$

Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις $f(x+\Delta x)$, $f(x-\Delta x)$ γύρω από το σημείο x χρησιμοποιώντας σειρές Taylor, έχουμε:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\dots$$

$$f(x-\Delta x)=f(x)-(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\dots$$

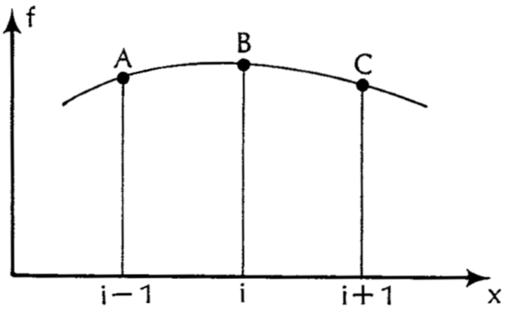
Αφαιρώντας τη 2η από τη 1η εξίσωση, έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\cdot\Delta x}+O(\Delta x)^2$$

ή

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\cdot\Delta x}+O(\Delta x)^2$$

Η πιο πάνω παράγωγος $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i$ εκφράζει τη κλίση μιας συνάρτησης f στο σημείο *B* χρησιμοποιώντας τιμές της συνάρτησης στα σημεία *A* και *C*, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.4..



Σχήμα 8.4: Προσέγγιση της παραγώγου $\partial f/_{\partial x}$ χρησιμοποιώντας τα σημεία $x-\Delta x,\ x+\Delta x$

Οι παραπάνω έκφραση της $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i$ ονομάζεται προσέγγιση κεντρικών διαφορών και είναι τάξης $(\Delta x)^2$.

Προσεγγιστικός υπολογισμός της παραγώγου $\frac{\partial f}{\partial x}$ με ακρίβεια 3ης τάξης χρησιμοποιούνται προς τα πίσω διαφορές (σημείο $x, x-\Delta x, x-2\Delta x$ κ.τ.λ.)

Αναπτύσσοντας σε ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x-\Delta x)= f(x)-(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}O(\Delta x)^4$$

$$\Rightarrow (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}= f(x)- f(x-\Delta x)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{6}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+O(\Delta x)^4$$

Διαλέγοντας $2^{ης}$ τάξης ακρίβειας για το $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ και $1^{ης}$ τάξης ακρίβειας για το $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, τότε:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-f_{i-3}+4f_{i-2}-5f_{i-1}+2f_i}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{-f_{i-3}+3f_{i-2}-3f_{i-1}+f_i}{(\Delta x)^3}+O(\Delta x)$$

Η εξίσωση $(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}$ δίνει:

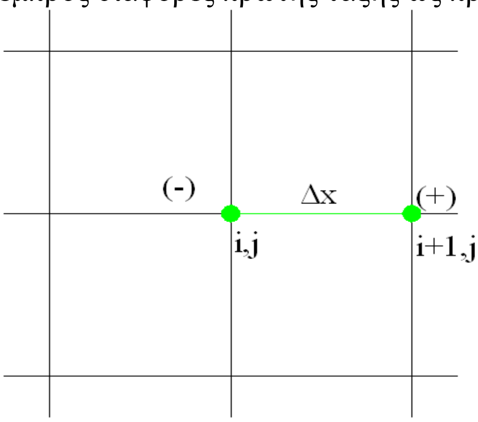
$$(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}= f_i - f_{i-1}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left[\frac{-f_{i-3}+4f_{i-2}-5f_{i-1}+2f_i}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)\right]-\frac{(\Delta x)^3}{6}\cdot\left[\frac{-f_{i-3}+3f_{i-2}-3f_{i-1}+f_i}{(\Delta x)^3}+0(\Delta x)\right]+O(\Delta x)$$

$$\Rightarrow 6(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}=-2f_{i-3}+9f_{i-2}-18f_{i-1}+11f_i+O(\Delta x)^4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-2f_{i-3}+9f_{i-2}-18f_{i-1}+11f_i}{6(\Delta x)}+O(\Delta x)^3$$

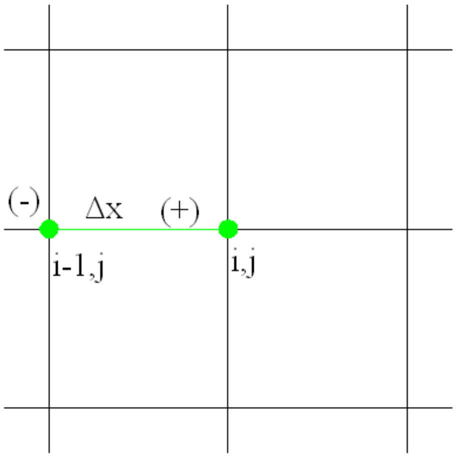
Σχηματικά, τα σημεία που χρησιμοποιούνται για να παράγουν τις προς τα εμπρός διαφορές, τις προς τα πίσω διαφορές και τις κεντρικές διαφορές , φαίνονται στα πιο κάτω σχήματα:

(α) Πρώτης τάξης προς τα εμπρός διαφορές πρώτης τάξης ως προς το x



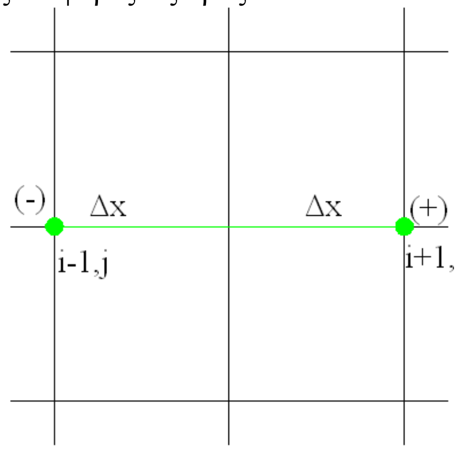
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}$$

(β) Πρώτης τάξης προς τα πίσω διαφορές ως προς το x



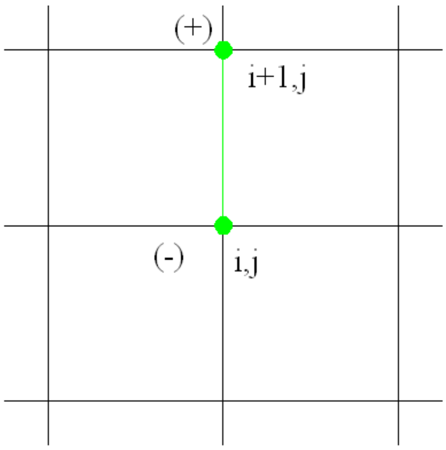
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}$$

(γ) Δεύτερης τάξης κεντρικές διαφορές ως προς το x



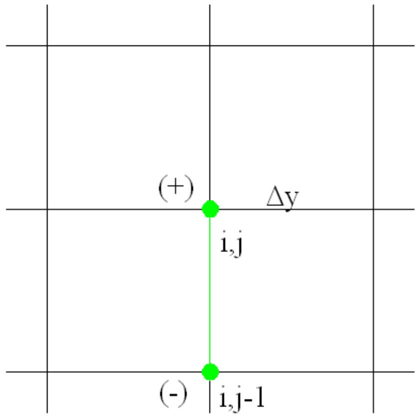
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

(δ) Πρώτης τάξης προς τα εμπρός διαφορές πρώτης τάξης ως προς το y



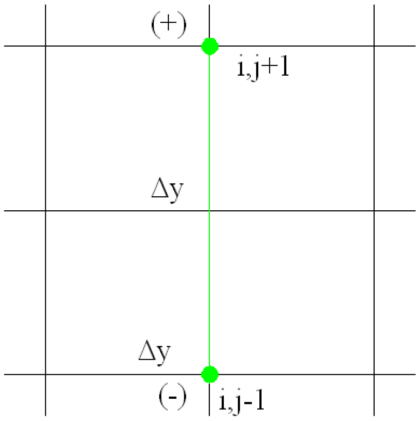
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}$$

(ε) Πρώτης τάξης προς τα πίσω διαφορές πρώτης τάξης ως προς το y



$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta y}$$

(στ) Δεύτερης τάξης κεντρικές διαφορές ως προς το y



$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

8.3 Προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου

Ας θεωρήσουμε τώρα το ανάπτυγμα της $f(x+\Delta x)$ γύρω από το x.

$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

Αν θέσω όπου Δx το $2\Delta x$, η προηγούμενη έκφραση γίνεται:

$$f(x+2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $f(x+\Delta x)$, επί 2 και αφαιρώντας από την εξίσωση $f(x+2\Delta x)$, έχω:

$$-2f(x+\Delta x) + f(x+2\Delta x) = -f(x) + (\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

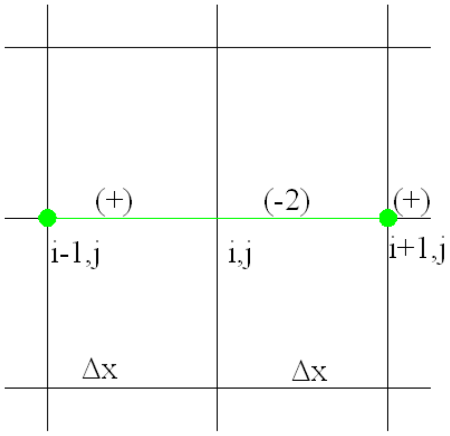
Όμοια παίρνω ότι:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

Χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές, τότε:

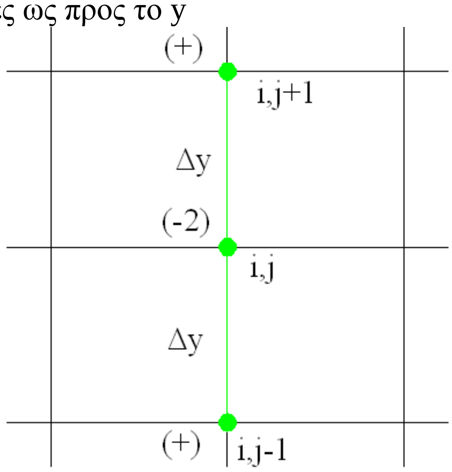
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O\left(\Delta x\right)^2$$

(α) Δεύτερης τάξης κεντρικές διαφορές ως προς το x



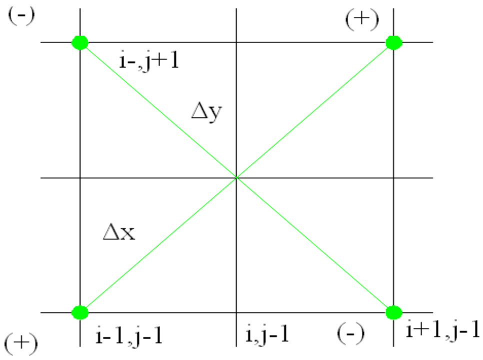
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

(β) Δεύτερης τάξης κεντρικές διαφορές ως προς το y



$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

(γ) Δεύτερης τάξης κεντρικές διαφορές ως προς τα x και y



$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j-1}-u_{i-1,j+1}-u_{i+1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

8.4 Προσέγγιση της τρίτης παραγώγου

Προσεγγιστικός υπολογισμός της παραγώγου $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ με τάξη ακρίβειας (Δx) χρησιμοποιώντας τα σημεία $x, x+\Delta x, x+2\Delta x, x+3\Delta x$.

$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(\Delta x)^4$$

$$f(x+2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(2\Delta x)^4$$

$$f(x+3\Delta x) = f(x) + (3\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(3\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(3\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(3\Delta x)^4$$

$$\Rightarrow 3f_{i+1} - f_{i+3} = 2f_i - 3(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4(\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(\Delta x)^4$$

$$\Rightarrow f_{i+2} - 2f_{i+1} = -f_i + (\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(\Delta x)^4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i}{(\Delta x)^3} + O(\Delta x)$$

Έτσι, προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες πεπερασμένων διαφορών:

Πίνακας 1: Κεντρικές διαφορές τάξης $O\left(\Delta x\right)^2$

	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{1+2}
$2\left(\Delta x\right)\dfrac{\partial f}{\partial x}$		-1	0	1	
$\left(\Delta x\right)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$		1	-2	1	
$2\left(\Delta x\right)^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-1	2	0	-2	1
$\left(\Delta x\right)^4\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

- Με βάση τον παραπάνω πίνακα κεντρικών διαφορών, η 2η παράγωγος $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα σημεία *i, i+1, i-1*

$$f\left(x+\Delta x\right)= f\left(x\right)+\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(\Delta x\right)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\left(\Delta x\right)^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+......$$

Άρα,
$$f\left(x-\Delta x\right)= f\left(x\right)-\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(\Delta x\right)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\left(\Delta x\right)^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+......$$

Συνεπώς ,
$$f\left(x+\Delta x\right)+ f\left(x-\Delta x\right)=2 f\left(x\right)+\left(\Delta x\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\cdot\frac{\left(\Delta x\right)^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+.....$$

ή αλλιώς ,
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i=\frac{f_{i+1}-2 f_i+f_{i-1}}{\left(\Delta x\right)^2}+O\left(\Delta x\right)^2$$

Πίνακας 2: Προς τα εμπρός διαφορές τάξης $O\left(\Delta x\right)^2$

	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}	f_{i+4}	f_{i+5}
$2\left(\Delta x\right)\dfrac{\partial f}{\partial x}$	-3	4	-1			
$\left(\Delta x\right)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	2	-5	4	-1		
$2\left(\Delta x\right)^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-5	18	-24	14	-3	
$\left(\Delta x\right)^4\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	3	-14	26	-24	11	-2

- Με βάση τον παραπάνω πίνακα των προς τα εμπρός διαφορών, η 1η παράγωγος $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα σημεία *i, i+1, i+2*

$$f\left(x+\Delta x\right)= f\left(x\right)+\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(\Delta x\right)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+......$$

Άρα, $$f\left(x+2\Delta x\right)= f\left(x\right)+\frac{2\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(2\Delta x\right)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\left(2\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+......$$

Συνεπώς , $$4\left(f+\Delta x\right)-f\left(x+2\Delta x\right)=3f\left(x\right)+2\Delta x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{4\left(\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

ή αλλιώς , $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i=\frac{-3f_i+4f_{i+1}+f_{i+2}}{2\cdot\Delta x}+O\left(\Delta x\right)^2$$

- Με βάση τον παραπάνω πίνακα των προς τα εμπρός διαφορών, η 2η παράγωγος $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα σημεία *i, i+1, i+2, i+3*

$$f\left(x+3\Delta x\right)= f\left(x\right)+\frac{3\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(3\Delta x\right)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\left(3\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\left(3\Delta x\right)^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+....$$

Άρα , $$f\left(x+2\Delta x\right)= f\left(x\right)-\frac{2\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(2\Delta x\right)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\left(2\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\left(2\Delta x\right)^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+......$$

$$f\left(x+\Delta x\right)= f\left(x\right)+\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(\Delta x\right)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\left(\Delta x\right)^4}{4!}\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+......$$

Συνεπώς, $$4f\left(x+2\Delta x\right)-5f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x+3\Delta x\right)=-2f\left(x\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\Delta x\right)^2+....$$

ή αλλιώς, $$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i=\frac{2f_i-5f_{i+1}+4f_{i+2}-f_{i+3}}{\left(\Delta x\right)^2}+O\left(\Delta x\right)^2$$

Πίνακας 3: Προς τα εμπρός διαφορές τάξης $O(\Delta x)$

	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}	f_{i+3}	f_{i+4}
$(\Delta x)\dfrac{\partial f}{\partial x}$	-1	1			
$(\Delta x)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	1	-2	1		
$(\Delta x)^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-1	3	-3	1	
$(\Delta x)^4\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

- Με βάση τον παραπάνω πίνακα των προς τα εμπρός διαφορών, η 2η παράγωγος $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα σημεία *i, i+1, i+2*

$$f(x+2\Delta x)= f(x)+\frac{2\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(2\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{(2\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\ldots\ldots$$

Άρα , $$f(x+\Delta x)= f(x)+\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\ldots\ldots$$

Συνεπώς, $$f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)=-f(x)+(\Delta x)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(\Delta x)^3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\ldots..$$

ή αλλιώς, $$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i=\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)$$

Πίνακας 4: Προς τα πίσω διαφορές τάξης $O(\Delta x)$

	f_{i-4}	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i
$(\Delta x)\dfrac{\partial f}{\partial x}$				-1	1
$(\Delta x)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$			1	-2	1
$(\Delta x)^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$		-1	3	-3	1
$(\Delta x)^4\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	4	6	-4	1

- Με βάση τον παραπάνω πίνακα των προς τα πίσω διαφορών, η 2η παράγωγος $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα σημεία *i, i-1, i-2*

$$f\left(x-2\Delta x\right)=f\left(x\right)-\frac{2\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(2\Delta x\right)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\left(2\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+.....$$

Άρα , $$f\left(x-\Delta x\right)=f\left(x\right)-\frac{\Delta x}{1!}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\left(\Delta x\right)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3!}\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+......$$

Συνεπώς, $$f\left(x+2\Delta x\right)-2f\left(x-\Delta x\right)=-f\left(x\right)+\left(\Delta x\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\left(\Delta x\right)^3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+.....$$

ή αλλιώς, $$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i=\frac{f_i-2f_{i-1}+f_{i-2}}{\left(\Delta x\right)^2}+O\left(\Delta x\right)$$

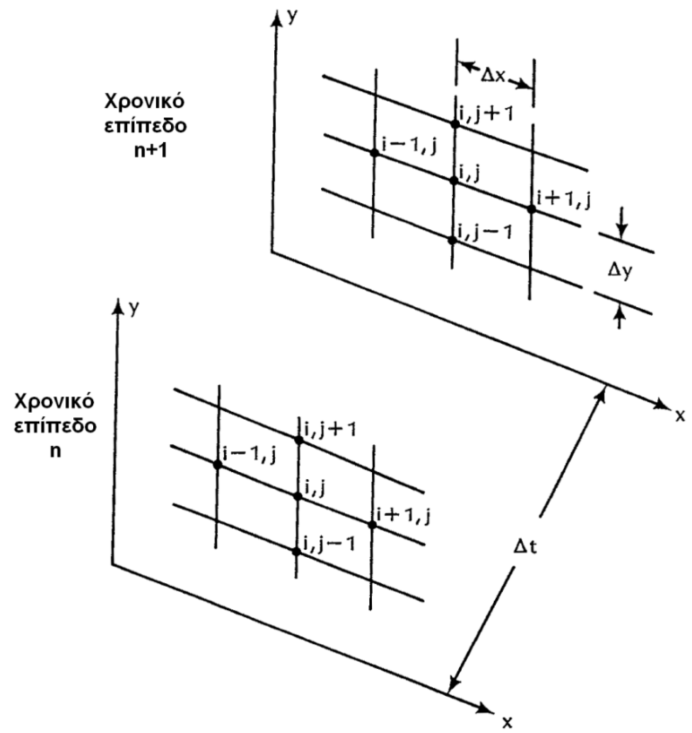
Πίνακας 5: Προς τα πίσω διαφορές τάξης $O\left(\Delta x\right)^2$

	f_{i-5}	f_{i-4}	f_{i-3}	f_{i-2}	f_{i-1}	f_i
$2\left(\Delta x\right)\dfrac{\partial f}{\partial x}$				1	-4	3
$\left(\Delta x\right)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$			-1	4	-5	2
$2\left(\Delta x\right)^3\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$		3	-14	24	-18	5
$\left(\Delta x\right)^4\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	-2	11	-24	26	-14	3

8.5 Εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών σε δύο διαστάσεις

Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών που μόλις παρουσιάστηκαν χρησιμοποιούνται για να αντικαταστήσουν τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ). Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση $f=f\left(t,x,y\right)$ και τη ΜΔΕ $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\alpha\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$.

Έστω ότι ζητείται να προσεγγιστεί η παραπάνω ΜΔΕ με μία εξίσωση πεπερασμένων διαφορών σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, στο οποίο τα σημεία $i,\ j$ που θα προσεγγίσουν τη συνάρτηση θα έχουν ίσες αποστάσεις $\Delta x,\Delta y$. Το υπολογιστικό πλέγμα θα έχει τη πιο κάτω μορφή:



Σχήμα 8.5: Υπολογιστικό πλέγμα για την επίλυση της εξίσωσης $\frac{\partial f}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

<u>1ος Τρόπος: Υπολογίζοντας τις συναρτήσεις f</u>

Τότε, για τη χρονική παράγωγο με 1ης τάξης προσέγγιση:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}+O\left(\Delta t\right)$$

Για τις χωρικές παραγώγους:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_{i+1,j}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i-1,j}^{n}}{\left(\Delta x\right)^2}+O\left(\Delta x\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{f_{i,j+1}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i,j-1}^{n}}{\left(\Delta y\right)^2}+O\left(\Delta y\right)^2$$

Έτσι: $$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\alpha\left[\frac{f_{i+1,j}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i-1,j}^{n}}{\left(\Delta x\right)^2}+\frac{f_{i,j+1}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i,j-1}^{n}}{\left(\Delta y\right)^2}\right]+O\left[\Delta t,\left(\Delta x\right)^2,\left(\Delta y\right)^2\right]$$

<u>2ος Τρόπος: Υπολογίζοντας τις συναρτήσεις f σε χρονικό επίπεδο n+1</u>

Έχουμε:

$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\alpha\left[\frac{f_{i+1,j}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i-1,j}^{n+1}}{\left(\Delta x\right)^2}+\frac{f_{i,j+1}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i,j-1}^{n+1}}{\left(\Delta y\right)^2}\right]+O\left[\Delta t,\left(\Delta x\right)^2,\left(\Delta y\right)^2\right]$$

Οι 2 τρόποι οδηγούν σε explicit και implicit εκφράσεις. Με τον explicit τρόπο, στο χρονικό επίπεδο $n+1$ μπορεί το κάθε σημείο i, j να επιλύεται, δηλαδή να προσδιορίζεται η συνάρτηση $f_{i,j}^{n+1}$. Με τον implicit τρόπο, πρέπει να γραφούν για όλα τα σημεία του υπολογιστικού πλέγματος και να επιλυθούν ταυτόχρονα. Προφανώς η λύση explicit είναι ευκολότερη απ' ότι η implicit, όμως όπως θα δούμε αργότερα ο 2[ος] τρόπος είναι πιο σταθερός από τον 1[ο]. Η explicit μορφή των πεπερασμένων διαφορών μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}-\alpha\left[\frac{f_{i+1,j}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2}+\frac{f_{i,j+1}^{n}-2f_{i,j}^{n}+2f_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2}\right]=O\left[\Delta t,(\Delta x)^2,(\Delta y)^2\right]$$

όπου η έκφραση $O\left[\Delta t,(\Delta x)^2,(\Delta y)^2\right]$ εκφράζει το λάθος της προσέγγισης. Έτσι η παραπάνω προσέγγιση είναι 1[ης] τάξης ακρίβειας ως προς το χρόνο και 2[ης] τάξης ακρίβειας ως προς το χώρο.

8.6 Ασκήσεις στις πεπερασμένες διαφορές

1. Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ να υπολογίσετε τη **πρώτη παράγωγο** της $f(x)$ στο σημείο $x=2$, χρησιμοποιώντας εμπρός και πίσω διαφορές τάξης ακρίβειας (Δx). Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με κεντρικές διαφορές ακρίβειας $(\Delta x)^2$ και με αναλυτική λύση. Χρησιμοποιείστε βήμα $\Delta x=0,1$ και βήμα $\Delta x=0,4$.

- Για βήμα $\Delta x=0,1$

A.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}+O(\Delta x)=\frac{f(2,1)-f(2)}{0,1}+O(0,1)=\frac{\frac{1}{4}\cdot(2,1)^2-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2\right)}{0,1}+O(0,1)=1,025+O(0,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(1,9)}{0,1}+O(0,1)=0,975+O(0,1)$$

B.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x}+O(\Delta x)^2=\frac{\frac{(2,1)^2}{4}-\frac{(1,9)^2}{4}}{2\cdot(0,1)}+O(0,1)^2=1+O(0,01)$$

Η ακριβής λύση $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{4}\cdot 2x=\frac{x}{2}$. Για $x=2\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=1$

- Για βήμα $\Delta x=0,4$

A.
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}+O\left(\Delta x\right)=\frac{f(2,4)-f(2)}{0,4}+O\left(0,4\right)=1,1+O\left(0,4\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x}+O\left(\Delta x\right)=\frac{f(2)-f(1,6)}{0,4}+O\left(0,4\right)=0,9+O\left(0,4\right)$$

B. $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x}+O\left(\Delta x\right)^2=1+O\left(0,4\right)^2$$

2. Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{6}x^3$ να υπολογίσετε προσεγγιστικά τη **δεύτερη παράγωγο** της $f(x)$ στο σημείο $x=1$, χρησιμοποιώντας εμπρός και πίσω διαφορές τάξης ακρίβειας $\left(\Delta x\right)$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με κεντρικές διαφορές ακρίβειας $\left(\Delta x\right)^2$ και με αναλυτική λύση. Χρησιμοποιείστε βήμα (α) $\Delta x=0,1$ και βήμα (β) $\Delta x=0,5$.

Υπόδειξη: Δίνεται ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=x$

- Για βήμα $\Delta x=0,1$

A. Για τις προς τα εμπρός διαφορές έχουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}{\left(\Delta x\right)^2}+O\left(\Delta x\right)=\frac{f(1,2)-2f(1,1)+f(1)}{0,01}+O\left(0,1\right)=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\cdot\left(1,2\right)^3\right)-2\left(\frac{1}{6}\cdot\left(1,1\right)^3\right)+\left(\frac{1}{6}\cdot1^3\right)}{0,01}+O\left(0,1\right)=\frac{0,288-0,443667+0,16667}{0,01}+O\left(0,1\right)=1,1+O\left(0,1\right)$$

Για τις προς τα πίσω διαφορές έχουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_i-2f_{i-1}+f_{i-2}}{\left(\Delta x\right)^2}+O\left(\Delta x\right)=\frac{f(1)-2f(0,9)+f(0,8)}{0,01}+O\left(0,1\right)=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\cdot\left(1\right)^3\right)-2\left(\frac{1}{6}\cdot\left(0,9\right)^3\right)+\left(\frac{1}{6}\cdot\left(0,8\right)^3\right)}{0,1}+O\left(0,1\right)=\frac{0,16667-0,243+0,085333}{0,01}+O\left(0,1\right)=0,9+O\left(0,1\right)$$

Οι κεντρικές διαφορές μας δίνουν ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}}{\left(\Delta x\right)^2}+O\left(\Delta x\right)^2=\frac{f(0,9)-2f(1)+f(1,1)}{\left(0,1\right)^2}+O\left(0,1\right)^2=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\cdot(0,9)^3\right)-2\left(\frac{1}{6}\cdot(1)^3\right)+\left(\frac{1}{6}\cdot(1,1)^3\right)}{0,01}+O(0,01)=\frac{0,1215-0,3333+0,2218333}{0,01}+O(0,01)=1+O(0,01)$$

Η ακριβής λύση είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=x \text{ . Για } x=1\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=1$$

Άρα βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα των κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας για βήμα $\Delta x=0,1$ συμπίπτει με την αναλυτική λύση του προβλήματος.

- Για βήμα $\Delta x=0,5$

Α. Για τις προς τα εμπρός διαφορές έχουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)=\frac{f(2)-2f(1,5)+f(1)}{(0,5)^2}+O(0,5)=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\cdot(2)^3\right)-2\left(\frac{1}{6}\cdot(1,5)^3\right)+\left(\frac{1}{6}\cdot 1^3\right)}{0,25}+O(0,5)=\frac{1,3333-1,125+0,16667}{0,25}+O(0,5)=1,5+O(0,5)$$

Για τις προς τα πίσω διαφορές έχουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_i-2f_{i-1}+f_{i-2}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)=\frac{f(1)-2f(0,5)+f(0)}{(0,5)^2}+O(0,5)=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\cdot(1)^3\right)-2\left(\frac{1}{6}\cdot(0,5)^3\right)+\left(\frac{1}{6}\cdot(0)^3\right)}{0,25}+O(0,5)=\frac{0,16667-0,041667+0}{0,25}+O(0,5)=0,5+O(0,5)$$

Οι κεντρικές διαφορές μας δίνουν ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_{i-1}-2f_i+f_{i+1}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2=\frac{f(0,5)-2f(1)+f(1,5)}{(0,5)^2}+O(0,5)^2=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{6}\cdot(0,5)^3\right)-2\left(\frac{1}{6}\cdot(1)^3\right)+\left(\frac{1}{6}\cdot(1,5)^3\right)}{(0,5)^2}+O(0,5)^2=\frac{0,0208333-0,3333+0,5625}{0,25}+O(0,25)=1+O(0,25)$$

Βλέπουμε ότι και πάλι το αποτέλεσμα των κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας για βήμα $\Delta x=0,5$ συμπίπτει με την αναλυτική λύση του προβλήματος.

3. Για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^4}{12}$ να υπολογίσετε προσεγγιστικά τη **δεύτερη παράγωγο** της $f(x)$ στο σημείο $x=2$, χρησιμοποιώντας εμπρός και πίσω διαφορές τάξης ακρίβειας (Δx). Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με κεντρικές διαφορές ακρίβειας $(\Delta x)^2$ και με αναλυτική λύση. Χρησιμοποιείστε βήμα $\Delta x=0,2$

Υπόδειξη: Δίνεται ότι η αναλυτική τιμή της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης είναι: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=x^2$

- Για βήμα $\Delta x=0,2$

Α. Για τις προς τα εμπρός διαφορές έχουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)=\frac{f(3,4)-2f(3,2)+f(3)}{0,04}+O(0,2)=$$

$$=\frac{\left(\frac{(3,4)^4}{12}\right)-2\left(\frac{(3,2)^4}{12}\right)+\left(\frac{(3)^4}{12}\right)}{0,04}+O(0,2)=\frac{11,136-17,476+6,75}{0,04}+O(0,4)=10,25+O(0,2)$$

Β. Για τις προς τα πίσω διαφορές έχουμε ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_{i}-2f_{i-1}+f_{i-2}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)=\frac{f(3)-2f(2,8)+f(2,6)}{0,04}+O(0,2)=$$

$$=\frac{\left(\frac{(3)^4}{12}\right)-2\left(\frac{(2,8)^4}{12}\right)+\left(\frac{(2,6)^4}{12}\right)}{0,04}+O(0,2)=\frac{6,75-10,244+3,808}{0,04}+O(0,4)=7,85+O(0,2)$$

Οι κεντρικές διαφορές μας δίνουν ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{f_{i-1}-2f_{i}+f_{i+1}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2=\frac{f(3,2)-2f(3)+f(2,8)}{0,04}+O(0,2)^2=$$

$$=\frac{\left(\frac{(3,2)^4}{12}\right)-2\left(\frac{(3)^4}{12}\right)+\left(\frac{(2,8)^4}{12}\right)}{0,04}+O(0,2)=\frac{8,738-13,5+5,122}{0,04}+O(0,2)^2=9+O(0,2)^2$$

Η ακριβής λύση είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=x^2.\ \text{Για}\ x=3\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=9$$

Άρα βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα των κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας για βήμα $\Delta x=0,2$ συμπίπτει με την αναλυτική λύση του προβλήματος.

9. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ Μ.Δ.Ε.

9.1 Γενικά - Εξίσωση μετάδοσης κύματος

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστούν βασικά αριθμητικά σχήματα επίλυσης υπερβολικών Μ.Δ.Ε. χρησιμοποιώντας τη πρότυπη υπερβολική εξίσωση-μοντέλο που εκφράζει τη μονοδιάστατη εξίσωση μεταφοράς (advection equation) ή εξίσωση κύματος (wave equation) που είναι μία τυπική υπερβολική Μ.Δ.Ε.:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\alpha > 0) \tag{9.1}$$

όπου $u(x,t)$ είναι ο άγνωστος που είναι συνάρτηση του χώρου και του χρόνου και $\alpha>0$ είναι η ταχύτητα συναγωγής. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται γραμμική εξίσωση συναγωγής, προσομοιώνει σε απλοποιημένη μορφή τις εξισώσεις Euler και θα αποτελέσει βάση για την εφαρμογή σχημάτων επίλυσης υπερβολικών Μ.Δ.Ε.

Η εξίσωση (9.1) σε πιο συμπαγή μορφή μπορεί να γραφεί:

$$u_t + \ a \cdot u_x = 0 \tag{9.2}$$

όπου

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \ , \qquad\qquad u_x = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} \tag{9.3}$$

Για να επιλύσει κανείς την αριθμητικά τη Μ.Δ.Ε. (9.2) πρέπει να διακριτοποιήσει χωριστά τη χρονική και χωριστά τη χωρική παράγωγο που εμφανίζονται στην εξίσωση αυτή. Η προσέγγιση αυτή στην επίλυση μιας Μ.Δ.Ε. όπου η διακριτοποίηση των χωρικών παραγώγων είναι ανεξάρτητη από τη διακριτοποίηση των χρονικών παραγώγων ονομάζεται ημι-διακριτή μορφή (semi-discrete) της εξίσωσης. Επιλέγοντας για παράδειγμα μία προσέγγιση της χωρικής παραγώγου u_x με κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης ακρίβειας, παίρνουμε την ακόλουθη ημι-διακριτή (semi-discrete) μορφή για το τυχαίο σημείο i του πλέγματος:

$$(u_t)_i = \ -\frac{a}{2\cdot \Delta x} \cdot (u_{i+1} - u_{i-1}) \tag{9.4}$$

9.2Άμεσα ή ρητά (explicit) σχήματα υπερβολικών Μ.Δ.Ε.

9.2.1Μέθοδος Euler FTFS (Forward in Time Forward in Space)

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (9.1) δίνεται από:

$$\frac{{u_i}^{\eta+1} - {u_i}^{\eta}}{\Delta t} = -\alpha \cdot \frac{{u_{i+1}}^{\eta} - {u_i}^{\eta}}{\Delta x} \Rightarrow {u_i}^{\eta+1} = {u_i}^{\eta} - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}({u_{i+1}}^{\eta} - \ {u_i}^{\eta}) \tag{9.5}$$

όπου ο υπο-δείκτης i δηλώνει τη χωρική διακριτοποίηση και ο υπερ-δείκτης n δηλώνει τη χρονική διακριτοποίηση.

Η μέθοδος αυτή παρέχει $1^{ης}$ τάξης ακρίβεια ως προς το χώρο και $1^{ης}$ τάξης ακρίβεια ως προς το χρόνο,δηλ. το σφάλμα είναι $O(\Delta t, \Delta x)$. Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγουμε αναπτύσσοντας τη τιμή ${u_i}^{\eta+1}$ σε συνάρτηση με τη τιμή στο σημείο ${u_i}^{\eta}$ με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor (εδάφιο 8.2) και το χρονικό βήμα Δt. Όμοια αναπτύσσουμε με σειρές Taylor τη τιμή στο σημείο ${u_{i+1}}^{\eta}$ σε συνάρτηση με το σημείο ${u_i}^{\eta}$ που απέχει στο χώρο κατά Δx. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

Α. Αρχικά αναπτύσσω τη χρονική παράγωγο $\frac{\partial u}{\partial t}$ σε σειρές Taylor

Αναπτύσσοντας το $u(x, t+\Delta t)$ με σειρά Taylor γύρω από το σημείο $u(x,t)$, έχουμε:

$$u(t+\Delta t, x) = u_i^{n+1} = u_i^n + (\Delta t)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} +$$

Λύνοντας ως προς $u_i^{n+1} - u_i^n$ παίρνουμε:

$$u_i^{n+1} - u_i^n = (\Delta t)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \cdots \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta t)$$

Β. Ανάπτυγμα της χωρικής παραγώγου $\frac{\partial u}{\partial x}$

Αναπτύσσοντας το $u(x+\Delta x, t)$ με σειρά Taylor γύρω από το σημείο $u(x,t)$, έχουμε:

$$u(t+\Delta t, x) = u_{i+1}^n = u_i^n + (\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x t^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots.$$

Λύνοντας ως προς $u_{i+1}^n - u_i^n$ παίρνουμε:

$$u_{i+1}^n - u_i^n = (\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x t^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Άρα η προσέγγιση

$$\frac{{u_i}^{\eta+1} - {u_i}^{\eta}}{\Delta t} = -\alpha \cdot \frac{{u_{i+1}}^{\eta} - {u_i}^{\eta}}{\Delta x}$$

οδηγεί σε σφάλμα τάξης $O(\Delta x,\ \Delta t)$. Άρα το αριθμητικό αυτό σχήμα παρέχει πρώτης τάξης ακρίβειας ως προς το χρόνο και ως προς τον χώρο.

Κάνοντας ανάλυση ευστάθειας κατά von Neumann, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος αυτή **είναι πάντα ασταθής** (δηλ. ανεξάρτητα των τιμών των *Δx* και *Δt*).

9.2.2 Μέθοδος Euler FTCS (Forward in Time Centered in Space)

Παίρνουμε αυτό το αριθμητικό σχήμα σχηματίζοντας προς τα εμπρός διαφορές στη χρονική παράγωγο και κεντρικές διαφορές στη χωρική παράγωγο. Έτσι έχουμε:

$$\frac{{u_i}^{\eta+1} - {u_i}^{\eta}}{\Delta t} = -\alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

Ο άγνωστος στη παραπάνω εξίσωση είναι η ποσότητα ${u_i}^{\eta+1}$, δηλαδή η λύση για κάθε σημείο i στο χρονικό επίπεδο *n+1*. Η λύση που παίρνουμε λύνοντας ως προς ${u_i}^{\eta+1}$, είναι:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a(\Delta t)}{2(\Delta x)}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \qquad (9.6)$$

Η μέθοδος αυτή παρέχει 2ης τάξης ακρίβεια ως προς Δx και 1ης τάξης ακρίβεια ως προς *Δt*, δηλ. το σφάλμα είναι $O(\Delta t), (\Delta x)^2$. Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγουμε αναπτύσσοντας τη τιμή ${u_i}^{\eta+1}$ σε συνάρτηση με τη τιμή στο σημείο ${u_i}^{\eta}$ με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor (εδάφιο 8.2) και το χρονικό βήμα Δt. Όμοια αναπτύσσουμε με σειρές Taylor τη τιμή στο σημείο ${u_{i+1}}^{\eta}$ σε συνάρτηση με το σημείο ${u_{i-1}}^{\eta}$ που απέχει στο χώρο κατά $2(\Delta x)$.

Κάνοντας ανάλυση ευστάθειας κατά von Neumann, καταλήγουμε - όπως και στο προηγούμενο σχήμα εξίσωση (9.5) - στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος αυτή **είναι πάντα ασταθής** (δηλ. ανεξάρτητα των τιμών των Δx και Δt).

9.2.3 Upwind differencing (Ανάντη ή προς τα πίσω διαφορές)

Παίρνουμε αυτό το αριθμητικό σχήμα διακριτοποιώντας τη χρονική παράγωγο με προς τα εμπρός διαφορές και τη χωρική παράγωγο με προς τα πίσω διαφορές. Έτσι έχουμε:

$$\frac{{u_i}^{\eta+1} - {u_i}^{\eta}}{\Delta t} = -a\frac{{u_i}^{\eta} - u_{i-1}^{n}}{\Delta x} \rightarrow {u_i}^{\eta+1} = {u_i}^{\eta} - \alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}({u_i}^{\eta} - {u_{i-1}}^{\eta}) \qquad (9.7)$$

Το σχήμα αυτό παρέχει πρώτης τάξης ακρίβειας ως προς Δt και Δx, δηλ. παρουσιάζει σφάλμα $O(\Delta t,\Delta x)$. Στο αποτέλεσμα αυτό καταλήγουμε αναπτύσσοντας τη τιμή ${u_i}^{\eta+1}$ σε συνάρτηση με τη τιμή στο σημείο ${u_i}^{\eta}$ με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor (εδάφιο 8.2) και το χρονικό βήμα Δt. Όμοια αναπτύσσουμε με σειρές Taylor τη τιμή στο σημείο ${u_i}^{\eta}$ σε συνάρτηση με το σημείο ${u_{-1i}}^{\eta}$ που απέχει στο χώρο κατά Δx.

Κάνοντας ανάλυση ευστάθειας κατά von Neumann καταλήγουμε (σε αντίθεση με το αριθμητικό σχήμα 9.2.1 Euler FTFS) ότι το παραπάνω σχήμα είναι ευσταθές αν ο αριθμός:

$$CFL = c = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Ο αριθμός c ονομάζεται αριθμός Courant.

9.2.4 Σχήμα του Lax

Η μέθοδος αυτή προκύπτει αν στη μέθοδο κεντρικών διαφορών (σχήμα FTCS, εξ. (9.6)) που όπως αναφέρθηκε παραπάνω είναι ασταθής, πάρουμε τη μέση τιμή των γειτονικών σημείων για το $u_i^n = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$. Τότε έχουμε το παρακάτω σχήμα:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{a \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \qquad (9.8)$$

Η μέθοδος είναι ευσταθής, δηλαδή συγκλίνει για $c = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1$

9.2.5 Μέθοδος Leapfrog

Παίρνουμε αυτό το αριθμητικό σχήμα σχηματίζοντας κεντρικές διαφορές για τη χρονική παράγωγο και κεντρικές διαφορές στη χωρική παράγωγο. Έτσι έχουμε:

$$\frac{{u_i}^{\eta+1} - {u_i}^{\eta-1}}{2 \cdot \Delta t} = -\alpha\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \cdot \Delta x} \qquad (9.9)$$

Το σχήμα αυτό παρουσιάζει σφάλμα *$O(\Delta t^2,\Delta x^2)$* δηλ. δεύτερης τάξης ακρίβειας ως προς Δt και Δx.
Το παραπάνω σχήμα συγκλίνει για $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

Σύμφωνα με το σχήμα της εξίσωσης (9.9) απαιτούνται δύο σετ αρχικών τιμών – μία για τη ποσότητα $u_i^{\eta-1}$ και μία για τη ποσότητα u_{i-1}^n . Παρατηρούμε όμως ότι για την επίτευξη λύσης στο χρονικό επίπεδο *n+1* απαιτείται η λύση στο χρονικό επίπεδο *n-1* και στο χρονικό επίπεδο *n*. Αυτό σημαίνει ότι δύο σετ αρχικών δεδομένων χρειάζονται για να ξεκινήσει η επίλυση. Έτσι η επιλογή της αρχικής λύσης στο χρονικό επίπεδο *n-1* θα επηρεάσει τη λύση της Μ.Δ.Ε.

9.2.6 Σχήμα Lax-Wendroff

9.2.6.1 Σχήμα Lax-Wendroff για μονοδιάστατη Μ.Δ.Ε.

Ας θεωρήσουμε την υπερβολική Μ.Δ.Ε. που δίνεται από την εξ. (9.1)

Διαφορίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (9.1) ως προς το χρόνο, παίρνουμε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (9.10)$$

Το αριθμητικό σχήμα Lax-Wendroff λαμβάνεται εφαρμόζοντας ανάπτυγμα κατά Taylor στη μεταβλητή $u(x, t + \Delta t)$ γύρω από τη μεταβλητή $u(x, t)$ με χρονικό βήμα Δt, ως εξής:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \cdot \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \cdots$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα χρησιμοποιώντας τη μορφή που δίνεται από τις εξισώσεις (9.3), γίνεται:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \cdot \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t)^3 \qquad (9.11)$$

Αντικαθιστώντας την (9.10) και την (9.1) στην (9.11), παίρνουμε ότι:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(-\alpha \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \cdot \left(\alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \qquad (9.12)$$

Αναλύοντας με κεντρικές διαφορές τη πρώτη χωρική παράγωγο

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \cdot \Delta x}$$

Αναλύοντας με κεντρικές διαφορές τη δεύτερη χωρική παράγωγο

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

η εξίσωση (9.12) γίνεται:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \alpha \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \cdot \Delta x}\right) + \frac{1}{2}\alpha^2 \cdot (\Delta t)^2 \cdot \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right) \qquad (9.13)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή σαν τη μέθοδο Lax-Wendroff που παρέχει δεύτερης τάξης ακρίβεια ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο (δηλ. *$O(\Delta t^2, \Delta x^2)$*). Ανάλυση ευστάθειας δείχνει ότι το σχήμα είναι ευσταθές όταν η ποσότητα $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

9.2.6.2 Σχήμα Lax-Wendroff για το σύστημα εξισώσεων Euler

Η τεχνική Lax-Wendroff είναι μια άμεση (explicit) μέθοδος πεπερασμένων διαφορών που ταιριάζει ειδικά σε επαναληπτικές μεθόδους. Η ιδέα των αριθμητικών λύσεων που προκύπτουν καλό με την μέθοδο marching in steps (προχωρώντας βηματικά) στον χώρο ή τον χρόνο, τέτοιες επαναληπτικές μέθοδοι σχετίζονται με την λύση υπερβολικών και παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ένα παράδειγμα ενός προβλήματος ροϊκών πεδίων που διέπεται από υπερβολικές εξισώσεις είναι η λύση χρονικών βημάτων (time marching) άτριβης (μη-συνεκτικής) ροής χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler μη-μόνιμης ροής.
Παραδείγματος χάρη, ας υποθέσουμε μια μη-μόνιμη δισδιάστατη άτριβη (δίχως τριβή) ροή. Οι εξισώσεις του Euler σε μη συντηρητική μορφή είναι:

Συνέχεια
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \quad (9.14)$$

Ορμή κατά x
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (9.15)$$

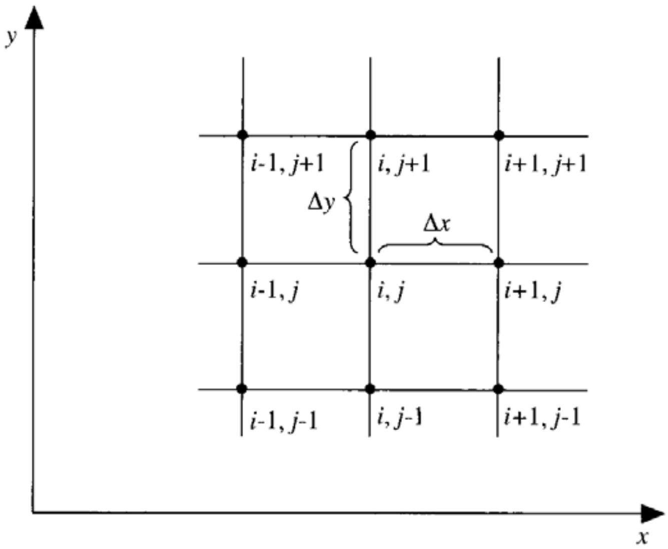
Ορμή κατά y
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) \quad (9.16)$$

Ενέργεια
$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial e}{\partial x} + v\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (9.17)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις έχουμε θεωρήσει ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις βαρύτητας και ιξώδους και ότι δεν υπάρχει προσθήκη ή αποβολή θερμότητας. Οι εξισώσεις (9.14) έως (9.17) είναι υπερβολικές ως προς τον χρόνο.
Συνεχίζουμε να βρίσκουμε αριθμητικές λύσεις στις εξισώσεις (9.14) έως (9.17) χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση χρονικού βηματισμού (time marching). Ας σημειωθεί ότι αυτές οι εξισώσεις είναι ήδη ταξινομημένες σε μια κατανοητή μορφή με τις χρονικές παραγώγους συγκεντρωμένες στο αριστερό μέλος και με τις χρονικές παραγώγους στο δεξί μέρος της ισότητας.
Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η μέθοδος Lax-Wendroff στηρίζεται σε ένα ανάπτυγμα σειράς Taylor ως προς το χρόνο, με τον εξής τρόπο:
Επιλέξτε οποιαδήποτε εξαρτώμενη ροϊκή μεταβλητή, παραδείγματος χάριν τη πυκνότητα ρ. Θεωρήστε το δισδιάστατο πλέγμα στο σχήμα 9.1. Το $\rho_{i,j}^{t}$ υποδηλώνει την πυκνότητα στο ίδιο σημείο του πλέγματος *(i , j)* σε χρονικό επίπεδο *t.* Τότε η πυκνότητα στο ίδιο σημείο του πλέγματος *(i,j)* σε χρόνο $t + \Delta t$, που υποδηλώνεται ως $\rho_{i,j}^{t+\Delta t}$ δίνεται σαν το ανάπτυγμα Taylor ως προς το χρόνο:

$$\rho_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{i,j}^{t}\Delta t + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{t}\frac{(\Delta t)^2}{2} + .. \quad (9.18)$$

Όταν αναπτύσσεται η εξίσωση (9.18), θεωρούμε ότι το ροϊκό πεδίο σε χρόνο *t* είναι γνωστό, και η εξίσωση (9.18) υπολογίζει προσεγγιστικά το νέο ροϊκό πεδίο σε χρόνο $t+\Delta t$.



Σχήμα 9.1: Τμήμα ορθογωνικού πλέγματος

Στην εξίσωση (9.18) η τιμή $\rho_{i,j}^{t}$ είναι γνωστή από το υπάρχον ροϊκό πεδίο σε χρονικό επίπεδο t. Εάν μπορούμε να βρούμε τιμές για τη πρώτη παράγωγο $(\partial\rho/\partial t)_{i,j}^{t}$ και για τη δεύτερη παράγωγο $(\partial^2\rho/\partial t^2)_{i,j}^{t}$, τότε η τιμή της πυκνότητας στο επόμενο βήμα στον χρόνο, $\rho_{i,j}^{t+\Delta t}$ μπορεί να υπολογιστεί ρητά (explicitly) από την εξίσωση (9.18). Ανάλογα αναπτύγματα σειρών κατά Taylor μπορούν να γραφούν για όλες τις υπόλοιπες εξαρτημένες μεταβλητές. Για παράδειγμα:

$$u_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} \Delta t + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{t} \frac{(\Delta t)^2}{2} + .. \tag{9.19}$$

$$v_{i,j}^{t+\Delta t} = v_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} \Delta t + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{t} \frac{(\Delta t)^2}{2} + ... \tag{9.20}$$

$$e_{i,j}^{t+\Delta t} = e_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} \Delta t + \left(\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}\right)_{i,j}^{t} \frac{(\Delta t)^2}{2} + ... \tag{9.21}$$

Οι εξισώσεις (9.18) έως (9.21) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουν τις μεταβλητές των ροϊκών πεδίων σε κάθε σημείο του πλέγματος στο επόμενο χρονικό βήμα, βασιζόμενες σε γνωστές τιμές των $\rho_{i,j}^{t}, u_{i,j}^{t}, v_{i,j}^{t}$ και $e_{i,j}^{t}$ σε χρόνο t, ήτοι, εφόσον έχουμε αριθμητικές τιμές για τις παραγώγους $(\partial\rho/\partial t)_{i,j}^{t}$, $(\partial u/\partial t)_{i,j}^{t}$, $(\partial^2 u/\partial t^2)_{i,j}^{t}$, κλπ., που εμφανίζονται στο δεξί μέλος των εξ. (9.18) έως (9.21). Από την στιγμή που οι εξισώσεις (9.18) έως (9.21) είναι μόνο μαθηματικά αναπτύγματα σειρών κατά Taylor δίχως καμία φυσική σημασία, πρέπει η φυσική της ροής πρέπει να εισέλθει με κάποιο τρόπο στην επίλυση του συστήματος των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Η φυσική είναι αυτό που ορίζει τις χρονικές παραγώγους $(\partial\rho/\partial t)_{i,j}^{t}$, $(\partial^2\rho/\partial t^2)_{i,j}^{t}$, κλπ., όπου η φυσική είναι ενσωματωμένη στις εξισώσεις που διέπονται από την ροή που δίνεται από τις (9.14) έως (9.17), δηλαδή στις εξισώσεις του Euler. Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, ας επικεντρωθούμε στον υπολογισμό της πυκνότητας σε χρόνο $t + \Delta t$ όπως ορίστηκε από το ανάπτυγμα Taylor, εξίσωση (9.18). Σε αυτή την εξίσωση η αριθμητική τιμή για την $(\partial\rho/\partial t)_{i,j}^{t}$ προκύπτει από την εξίσωσης της συνέχειας (9.14), όπου οι χωρικές παράγωγοι δίνονται από κεντρικές διαφορές δευτέρας τάξης. Ήτοι, από την εξίσωση (9.14):

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} = -\left(\rho_{i,j}^{t}\frac{u_{i+1,j}^{t}-u_{i-1,j}^{t}}{2\Delta x} + u_{i,j}^{t}\frac{\rho_{i+1,j}^{t}-\rho_{i-1,j}^{t}}{2\Delta x} + \rho_{i,j}^{t}\frac{v_{i,j+1}^{t}-v_{i,j-1}^{t}}{2\Delta y} + u_{i,j}^{t}\frac{\rho_{i,j+1}^{t}-\rho_{i,j-1}^{t}}{2\Delta y}\right) \tag{9.22}$$

Στην εξίσωση (9.22) όλες οι ποσότητες στο δεξί μέρος της ισότητας είναι γνωστές επειδή το ροϊκό πεδίο σε χρόνο t είναι γνωστό. Ως εκ τούτου η εξίσωση (9.22) παρέχει μία αριθμητική προσέγγιση για τη παράγωγο $(\partial\rho/\partial t)_{i,j}^{t}$, η οποία εισάγεται στην εξίσωση (9.18). Με τα μέχρι στιγμής αναφέραμε τον υπολογισμό του δεύτερου όρου στο δεξί μέρος της (9.18). Ο τρίτος όρος, $(\partial^2\rho/\partial t^2)_{i,j}^{t}$, προκύπτει με έναν παρόμοιο τρόπο αλλά απαιτεί περισσότερη προσπάθεια. Συγκεκριμένα διαφορίζουμε την εξίσωση (9.14) ως προς τον χρόνο:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = -\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{9.23}$$

Οι μικτές δεύτερες παράγωγοι στην εξίσωση (9.23), όπως η $(\partial^2 u/\partial x\, \partial t)$, προκύπτουν διαφορίζοντας τις εξισώσεις (9.14) έως (9.17) ως προς την κατάλληλη χωρική μεταβλητή. Για παράδειγμα, η παράγωγος $(\partial^2 u/\partial x\, \partial t)$ προκύπτει διαφορίζοντας την εξίσωση (9.15) ως προς x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = -u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x} \tag{9.24}$$

Στην εξίσωση (9.24), όλοι οι όροι στο δεξί μέλος εκφράζονται ως δεύτερης τάξης κεντρικές πεπερασμένες διαφορές σε χρονικό επίπεδο t, ήτοι:

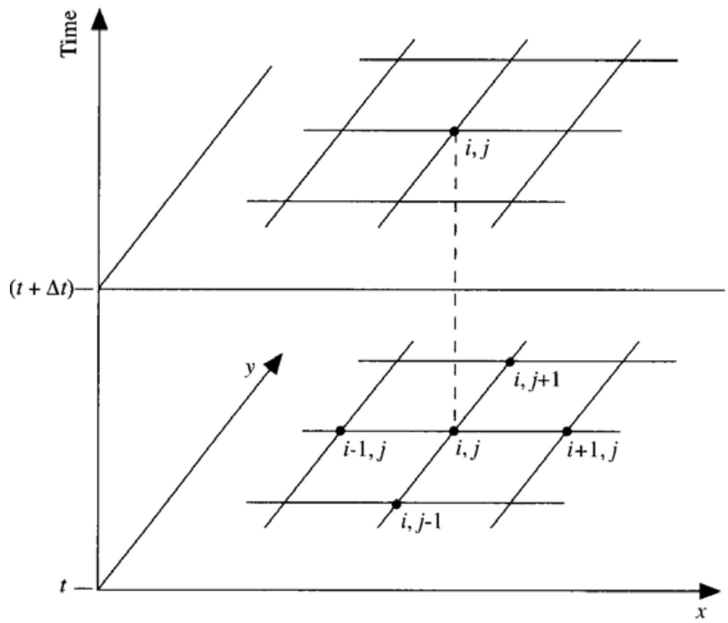
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)_{i,j}^{t} = - u_{i,j}^{t}\frac{u_{i+1,j}^{t} - 2u_{i,j}^{t} + u_{i-1,j}^{t}}{(\Delta x)^2} + \left(\frac{u_{i+1,j}^{t} - u_{i-1,j}^{t}}{2\Delta x}\right)^2 + \frac{u_{i+1,j+1}^{t} + u_{i-1,j-1}^{t} - u_{i-1,j+1}^{t} - u_{i+1,j-1}^{t}}{4(\Delta x)(\Delta y)} + \frac{u_{i,j+1}^{t} - u_{i,j-1}^{t}}{2\Delta y}\frac{v_{i+1,j}^{t} - v_{i-1,j}^{t}}{2\Delta x} \quad \frac{1}{\rho_{i,j}^{t}}\frac{p_{i+1,j}^{t} - 2p_{i,j}^{t} + p_{i-1,j}^{t}}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{\left(\rho_{i,j}^{t}\right)^2}\frac{p_{i+1,j}^{t} - p_{i-1,j}^{t}}{2\Delta x}\frac{\rho_{i+1,j}^{t} - \rho_{i-1,j}^{t}}{2\Delta x} \tag{9.25}$$

Παρατηρώντας την εξίσωση (9.25), βλέπουμε ότι όλοι οι όροι στο δεξί μέλος είναι γνωστοί από το γνωστό ροϊκό πεδίο σε χρόνο t. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά το αριστερό μέλος, δηλαδή μια αριθμητική προσεγγιστική τιμή για τη δεύτερη παράγωγο $(\partial^2 u/\partial x\, \partial t)_{i,j}^{t}$. Με την σειρά της, η αριθμητική τιμή αντικαθίσταται για τον όρο $\partial^2 u/(\partial x\partial t)$ ο οποίος εμφανίζεται στην εξίσωση (9.20). Συνεχίζοντας με τον υπολογισμό της εξίσωσης (9.23), μια αριθμητική τιμή για την $\partial^2\rho/(\partial x\partial t)$ βρίσκεται διαφορίζοντας την εξίσωση (9.14) ως προς x και αντικαθιστώντας όλες τις παραγώγους στο δεξί μέλος με δευτέρας τάξης κεντρικές διαφορές, ανάλογες της μορφής της εξίσωσης (9.25). Για να εξοικονομήσουμε χώρο, δεν θα γράψουμε ολόκληρο το αποτέλεσμα εδώ. Συνεχίζοντας παρακάτω με την εξίσωση (9.23), μια αριθμητική τιμή $\partial^2 v/(\partial y\partial t)$ βρίσκεται διαφορίζοντας την εξίσωση (9.16) ως προς y και αντικαθιστώντας όλες τις παραγώγους στο δεξί μέλος με δευτέρας τάξης κεντρικές διαφορές. Η τελευταία μικτή παράγωγος στην εξίσωση (9.23), $\partial^2\rho/(\partial y\partial t)$, βρίσκεται διαφορίζοντας την εξίσωση (9.14) ως προς y και αντικαθιστώντας όλες της παραγώγους στο δεξί μέλος με δευτέρας τάξης κεντρικές διαφορές. Οι μόνες παράγωγοι που μένουν να υπολογιστούν στο δεξί μέλος της εξίσωσης (9.23) είναι οι πρώτες χωρικές παράγωγοι δηλαδή, οι $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial\rho/\partial x$ και $\partial\rho/\partial y$, αντικαθίστανται από δευτέρας τάξης κεντρικές διαφορές:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}^{t} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

και ούτω καθ'εξής, καθώς και οι πρώτες παράγωγοι $\partial\rho/\partial t$, $\partial u/\partial t$ και $\partial v/\partial t$. Μια αριθμητική τιμή για την $\partial\rho/\partial t$ έχει ήδη προκύψει από την εξίσωση (9.22). Οι αριθμητικές τιμές για τις $\partial u/\partial t$ και $\partial v/\partial t$ προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο, εισάγοντας δευτέρας τάξης κεντρικές διαφορές στο δεξί μέλος των εξισώσεων (9.15) και (9.16), αντίστοιχα. Με όλα αυτά τελικά παίρνουμε μια αριθμητική τιμή για την $\partial^2\rho/\partial t^2$ από την εξίσωση (9.23). Με την σειρά της, αυτή αντικαθίσταται μέσα στην εξίσωση (9.23). Επειδή ο όρος $\partial\rho/\partial t$ έχει προκύψει νωρίτερα από την εξίσωση (9.22), τώρα έχουμε γνωστές τιμές στον χρόνο t και για τους τρεις όρους στο δεξί μέρος της εξίσωσης (9.23), δηλαδή, $\rho_{i,j}^{t}$, $(\partial\rho/\partial t)_{i,j}^{t}$, και

$(\partial^2\rho/\partial t^2)^t_{i,j}$. Αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό της πυκνότητας σε χρόνο $t + \Delta t$, ήτοι, $\rho^{t+\Delta t}_{i,j}$ που προέκυψε από την εξίσωση (9.17).
Για να βρούμε τις υπόλοιπες μεταβλητές του ροϊκού πεδίου στο σημείο του πλέγματος *(i,j)* στον χρόνο $t + \Delta t$, απλά πρέπει να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία. Για παράδειγμα, για να υπολογιστεί η τιμή της x συνιστώσας της ταχύτητας στον χρόνο $t + \Delta t$, $u^{t+\Delta t}_{i,j}$, πηγαίνουμε στην εξίσωση (9.19) και εισάγουμε τιμές για τις παραγώγους $(\partial u/\partial t)^t$ και $(\partial^2 u/\partial t^2)^t$ που προέκυψαν από την εξίσωση (9.15) με όμοιο τρόπο όπως περιγράφηκε παραπάνω για την πυκνότητα. Όπως γίνεται κατανοητό, η άλγεβρα προχωρά, αλλά η ιδέα είναι η ίδια. Για να πάρουμς την y συνιστώσα της ταχύτητας σε χρόνο $t + \Delta t$, $v^{t+\Delta t}_{i,j}$ χρησιμοποιούμε την εξίσωση (9.20), όπου οι τιμές για τις παραγώγους $(\partial v/\partial t)^t$ και $(\partial^2 v/\partial t^2)^t$ προέκυψαν από την εξίσωση (9.16). Για να υπολογιστεί η εσωτερική ενέργεια σε χρόνο $t + \Delta t$, $e^{t+\Delta t}_{i,j}$ χρησιμοποιούμε την εξίσωση (9.21), όπου οι τιμές για τις $(\partial e/\partial t)^t$ και $(\partial^2 e/\partial t^2)^t$ που προέκυψαν από την εξίσωση (9.17).
Με αυτό τον τρόπο, όλες οι μεταβλητές του ροϊκού πεδίου στο σημείο του πλέγματος *(i,j)* είναι γνωστές στον χρόνο $t + \Delta t$. Αυτό απεικονίζεται σχηματικά στο σχήμα 9.2, όπου φαίνεται το χωρικό πλέγμα σε δύο διαδοχικά χρονικά επίπεδα *t* και $t + \Delta t$.



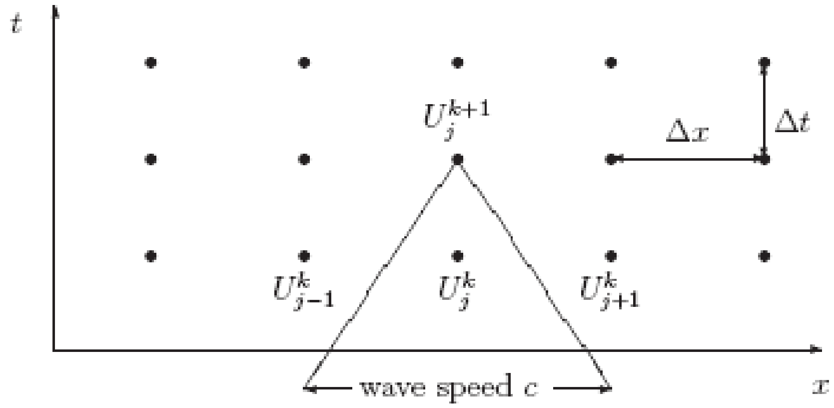
Σχήμα 9.2 Τμήμα του πλέγματος για τον χρονικό βηματισμό (time marching)

Εξετάζοντας αυτό το σχήμα, βλέπουμε ξεκάθαρα ότι η μέθοδος Lax-Wendroff μας επιτρέπει να πάρουμε ρητά (explicitly) της μεταβλητές του ροϊκού πεδίου στο σημείο του πλέγματος *(i,j)* σε χρονικό επίπεδο $t + \Delta t$ από τις γνωστές μεταβλητές του ροϊκού πεδίου στα σημεία του πλέγματος *(i,j), (i+1,j), (i-1,j), (i,j-1)* και *(i,j+1)* σε χρονικό επίπεδο *t*. Οι μεταβλητές του ροϊκού πεδίου σε όλα τα άλλα σημεία του πλέγματος *(i,j)* σε χρονικό επίπεδο $t + \Delta t$ προκύπτουν με όμοιο τρόπο.
Αυτή είναι η ουσία και οι λεπτομέρειες της μεθόδου Lax-Wendroff. Έχει ακρίβεια δευτέρας τάξης και στον χώρο και στον χρόνο. Η ιδέα είναι απλή, αλλά η άλγεβρα είναι χρονοβόρα· όπως βλέπετε, το μεγαλύτερο μέρος της μακροσκελούς άλγεβρας σχετίζεται με τις δεύτερες παράγωγους των εξισώσεων (9.19) έως (9.21).

Το πιο πάνω σχήμα συγκλίνει για $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

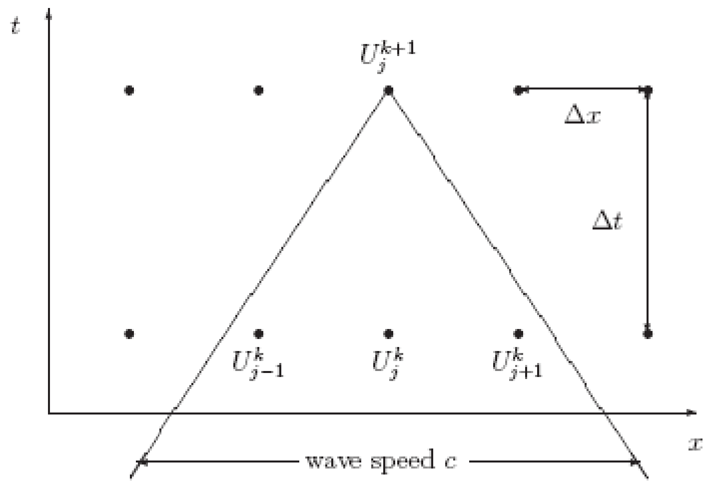
9.2.7 Συνθήκη CFL

Η φυσική σημασία του αριθμού CFL είναι ότι καθώς υπολογίζεται η τιμή u_i^{n+1} χρησιμοποιώντας πληροφορίες από τα σημεία $i-1$ και $i+1$ στο χρονικό διάστημα n σε ένα ευσταθές σχήμα, όπου η ταχύτητα μετάδοσης κύματος είναι μικρότερη από την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων Δx δια το χρονικό βήμα Δt , δηλ. αν σε ένα συνεχές μέσο, η πληροφορίες μεταδίδονται με ταχύτητα α, **το αριθμητικό σχήμα είναι ευσταθές όταν $\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \boldsymbol{a}$,** όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 9.3: Σχηματική απεικόνιση ευσταθούς αριθμητικού σχήματος υπερβολικής ΜΔΕ

Ασταθή αριθμητικά σχήματα προκύπτουν όταν $\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq \boldsymbol{a}$, δηλ. όταν το χρονικό βήμα Δt είναι μεγάλο και έτσι ο υπολογισμός του u_i^{n+1} απαιτεί πληροφορίες από σημεία που βρίσκονται έξω από το διάστημα μεταξύ των σημείων u_{i-1}^n και u_{i+1}^n καθώς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 9.4: Σχηματική απεικόνιση ασταθούς αριθμητικού σχήματος υπερβολικής ΜΔΕ

9.3 Σύνθετα ή πεπλεγμένα (Implicit) σχήματα υπερβολικών Μ.Δ.Ε.

Όταν η εξίσωση (9.1) διακριτοποιείται ως:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = -a\ \frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}}{\Delta x} \tag{9.26}$$

Τότε το αριθμητικό σχήμα ορίζεται ως σύνθετο ή πεπλεγμένο (implicit), διότι εμφανίζεται παραπάνω από ένας άγνωστος στην εξίσωση πεπερασμένων διαφορών και συγκεκριμένα στο δεξί μέρος της εξίσωσης (9.26). Σαν αποτέλεσμα, χρειάζεται να επιλυθεί ένα σύνολο ταυτόχρονων εξισώσεων, το οποίο απαιτεί περισσότερο χρόνο υπολογισμού ανά χρονικό επίπεδο (ή επανάληψη). Οι σύνθετες (implicit) μέθοδοι παρέχουν ισχυρό πλεονέκτημα στην ευστάθεια συγκριτικά με τις άμεσες (explicit) μεθόδους πεπερασμένων διαφορών, αφού οι περισσότερες σύνθετες μέθοδοι είναι άνευ όρων ευσταθείς. Επομένως, επιτρέπεται μεγάλο χρονικό βήμα, ωστόσο, η επιλογή ενός χρονικού βήματος είναι περιορισμένη λόγω του ότι μεγάλο χρονικό βήμα σημαίνει αύξηση του σφάλματος αποκοπής. Σε αυτή την ενότητα περιγράφονται ορισμένες από τις πιο ευρέως χρησιμοποιημένες έμμεσες αριθμητικές μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών.

9.3.1 Μέθοδος Euler BTCS

Το σχήμα Euler BTCS (Backward in Time Centered in Space), δηλ. προς τα πίσω διαφορές για τη χρονική παράγωγο και κεντρικές διαφορές για τη χωρική παράγωγο, είναι άνευ όρων ευσταθές *(unconditionally stable),* δηλαδή είναι ευσταθές ανεξάρτητα των τιμών των Δx και Δy.
Το σχήμα αυτό παρουσιάζει σφάλμα $O(\Delta t,\Delta x^2)$ δηλ. παρέχει πρώτης τάξης ακρίβεια ως προς το χρόνο και δεύτερης τάξης ακρίβειας ως προς το χώρο.
Το σχήμα αυτό αν εφαρμοστεί στην εξίσωση (9.1), γράφεται:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = -a\,\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2\cdot\Delta x} \qquad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}c\cdot u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1} - \frac{1}{2}c\cdot u_{i+1}^{n+1} = -u_i^n \tag{9.27}$$

όπου $c = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x}$

Όταν η εξίσωση (9.27) εφαρμοστεί για όλα τα σημεία του πλέγματος σε κάποιο γνωστό χρονικό επίπεδο *n*, θα έχει σαν αποτέλεσμα ένα σετ αλγεβρικών εξισώσεων. Αν κάνουμε το ίδιο για όλα τα σημεία του πλέγματος σε μορφή πίνακα, θα σχηματιστεί ένα τριδιαγώνιος πίνακας. Τα μη-μηδενικά στοιχεία της διαγωνίου, όπως φαίνεται από την εξίσωση (9.27) είναι: $\left[\frac{1}{2}c \quad -1 \quad -\frac{1}{2}c\right]$.
Το αριθμητικό σχήμα σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}c & -1 & -\frac{1}{2}c & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}c & -1 & -\frac{1}{2}c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}c & -1 & -\frac{1}{2}c & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2}c & -1 & -\frac{1}{2}c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{k-2}^{n+1} \\ u_{k-1}^{n+1} \\ u_k^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{k-2}^n \\ u_{k-1}^n \\ u_k^n \end{bmatrix}$$

Η επίλυση του συστήματος, δηλαδή η εύρεση των τιμών $u_i^{n+1}, i = 1,2,3,..,k$, γίνεται με αναστροφή του μητρώου

9.3.2 Πεπλεγμένη ανάντη (upwind) μέθοδος πρώτης τάξης ακρίβειας

Το σχήμα αυτό σχηματίζεται προσεγγίζοντας με πρώτης τάξης ακρίβειας προς τα εμπρός διαφορές τη χρονική παράγωγο και με πρώτης τάξης προς τα πίσω διαφορές τη χωρική παράγωγο. Έτσι έχουμε:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n}}{\Delta t} = -\frac{a}{\Delta x}\left(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right) \qquad (9.28)$$

Το σχήμα παρουσιάζει πρώτη τάξη ακρίβειας, δηλαδή το σφάλμα είναι *O(Δt,Δx)*
Η εξίσωση (9.28) μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x} \cdot u_{i-1}^{n+1} - \left(1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) \cdot u_i^{n+1} = -u_i^n \Rightarrow c \cdot u_{i-1}^{n+1} - (1 + c) \cdot u_i^{n+1} = -u_i^n \qquad (9.29)$$

όπου $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

Όταν η εξίσωση (9.28) εφαρμόζεται για όλα τα σημεία του υπολογιστικού πεδίου, έχει σαν αποτέλεσμα ένα διδιαγώνιου σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Η λύση του δι-διαγώνιου συστήματος θα είναι της μορφής:

$$[A_i] \cdot u_{i-1}^{n+1} + [B_i] \cdot u_i^{n+1} = [D_i]$$

Έτσι θα έχουμε:

$$u_i^{n+1} = \frac{[D_i] - [A_i] \cdot u_{i-1}^{n+1}}{[B_i]}$$

9.3.3 Μέθοδος των Crank-Nicolson

Το σχήμα αυτό σχηματίζεται ως εξής:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n}}{\Delta t} = -\frac{a}{2} \cdot \left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta x} + \frac{u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}}{2 \cdot \Delta x}\right] \qquad (9.30)$$

Στη περίπτωση αυτή, η λύση της Μ.Δ.Ε. προκύπτει από τη λύση ενός τριδιαγώνιου συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων ως εξής:

$$\frac{1}{4} c \cdot u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1} - \frac{1}{4} c \cdot u_{i+1}^{n+1} = -u_i^n + \frac{1}{4} c \cdot (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \qquad (9.31)$$

όπου $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

Το σχήμα αυτό παρουσιάζει δεύτερης τάξης ακρίβεια ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο, δηλ. $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

Το αριθμητικό σχήμα σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{4}c & -1 & -\frac{1}{4}c & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4}c & -1 & -\frac{1}{4}c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4}c & -1 & -\frac{1}{4}c & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{4}c & -1 & -\frac{1}{4}c
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{k-2}^{n+1} \\ u_{k-1}^{n+1} \\ u_k^{n+1}
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
-\frac{1}{4}c & 1 & \frac{1}{4}c & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{4}c & 1 & \frac{1}{4}c & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{4}c & 1 & \frac{1}{4}c & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{4}c & 1 & \frac{1}{4}c
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ u_3^{n} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{k-2}^{n} \\ u_{k-1}^{n} \\ u_k^{n}
\end{bmatrix}
$$

9.4 Μέθοδοι με ενδιάμεσα βήματα (predictor-corrector)

9.4.1 Μέθοδος Richtmyer/Lax-Wendroff

Η μέθοδος Lax-Wendroff που παρουσιάστηκε στο εδάφιο 9.2.8, χωρίζεται σε δύο ενδιάμεσα βήματα. Καταγράφονται στη διεθνή βιβλιογραφία δύο διαφορετικές διατυπώσεις: Η πρώτη που αναφέρεται σαν μέθοδος Richtmyer, υπολογίζει τους αγνώστους κατά το πρώτο βήμα (Βήμα πρόγνωσης) στο σημείο του πλέγματος i, ενώ η δεύτερη που αναφέρεται σαν μέθοδος Lax-Wendroff με ενδιάμεσα βήματα υπολογίζει τους αγνώστους κατά το πρώτο βήμα στο σημείο $i+\frac{1}{2}$. Και στις δύο διατυπώσεις υπολογίζεται με το πρώτο βήμα ένα ενδιάμεσο χρονικό με επίπεδο $n+\frac{1}{2}$ από το γνωστό χρονικό επίπεδο $n,$ προκειμένου να καταλήξουμε τελικά με το δεύτερο βήμα στο επίπεδο $n+1$. Η μέθοδος προσφέρει δεύτερης τάξης ακρίβεια και ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο.

Η διατύπωση κατά Richtmeyer είναι:

$$\frac{u_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\frac{\Delta t}{2}} = -a\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \qquad (1^o\text{Βήμα}) \tag{9.32}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a\,\frac{u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\cdot\Delta x} \qquad (2^o\text{Βήμα}) \tag{9.33}$$

ή

$$
\begin{cases}
u_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) - \frac{a \cdot \Delta t}{4 \cdot \Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) \\
u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x}\left(u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}\right)
\end{cases} \tag{9.34}
$$

Η μέθοδος συγκλίνει για $\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 2$

Η διατύπωση της μεθόδου κατά Lax-Wendroff με ενδιάμεσα βήματα έχει ως εξής:

$$
\begin{cases}
u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) - \frac{a \cdot \Delta t}{2 \cdot \Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right) \\
u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)
\end{cases} \tag{9.35}
$$

Η μέθοδος είναι ευσταθής όταν $\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Σημειώστε ότι αν αντικαταστήσετε τη πρώτη από τις δύο εξισώσεις (9.35) στη δεύτερη εξίσωση, προκύπτει το αρχικό σχήμα Lax-Wendroff που δίνεται από την εξίσωση (9.13).

9.4.2 Μέθοδος MacCormack

Η μέθοδος του MacCormack είναι μια παραλλαγή της μεθόδου Lax-Wendroff, αλλά είναι απλούστερη στην εφαρμογή της. Όπως η τεχνική των Lax-Wendroff, η μέθοδος MacCormack μέθοδος είναι επίσης μία μέθοδος πολλαπλών βημάτων η οποία προσφέρει δεύτερης τάξης χωρική και χρονική ακρίβεια. Καθιερώθηκε για πρώτη φορά το 1969, κατέστη η πιο δημοφιλής ρητή μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση ροών για τα επόμενα 15 χρόνια. Σήμερα η μέθοδος MacCormack έχει ως επί το πλείστον αντικατασταθεί από πιο εξελιγμένες προσεγγιστικές μεθόδους, ορισμένες από τις οποίες θα συζητηθούν σε επόμενο κεφάλαιο. Εν τούτοις είναι πολύ φιλική στους φοιτητές διότι είναι πολύ εύκολο να τη κατανοήσουν και να τη προγραμματίσουν σε Η/Υ. Επιπλέον, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται με τη χρήση της μεθόδου MacCormack είναι απόλυτα ικανοποιητικά για πολλές εφαρμογές ροών. Είναι μια θαυμάσια μέθοδος για την εισαγωγή των αρχαρίων στην Υπολογιστική Ρευστομηχανική (CFD).

Σε αυτή τη μέθοδο πολλαπλών βημάτων, το πρώτο βήμα χρησιμοποιεί προς τα εμπρός διαφορές στη παρακάτω διακριτοποιημένη μορφή:

$$
\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = -a\, \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \tag{9.31}
$$

όπου ο αστερίσκος * δηλώνει μία προσωρινή τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής σε ένα ενδιάμεσο χρονικό επίπεδο.

Το δεύτερο βήμα της μεθόδου χρησιμοποιεί προς τα πίσω διαφορές και είναι:

$$
\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \Delta t} = -a\, \frac{u_i^* - u_{i-1}^*}{\Delta x}
$$

Η τιμή της μεταβλητής $u_i^{n+\frac{1}{2}}$ στο χρονικό επίπεδο $n + \frac{1}{2}$ προσδιορίζεται από το μέσο όρο των μεταβλητών u_i^n και u_i^*

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (u_i^n + u_i^*)$$

Έτσι η μέθοδπς MacCormack με δύο βήματα γίνεται:

Βήμα πρόγνωσης *(predictor step)* $\quad u_i^* = u_i^n - a \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_{i+1}^n - u_i^n)$ (9.32)

Βήμα διόρθωσης *(corrector step)* $\quad u_i^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[(u_i^n + u_i^*) - a \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_i^* - u_{i-1}^*) \right]$ (9.33)

Είναι επίσης μέθοδος δεύτερης τάξης ακρίβειας ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο, δηλ. $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ και η συνθήκη ευστάθειας είναι $\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 1$

Οι προς τα εμπρός διαφορές στο βήμα πρόγνωσης και οι προς τα πίσω διαφορές στο βήμα διόρθωσης μπορούν να αντιστραφούν σε κάθε χρονικό βήμα έτσι ώστε οι προς τα εμπρός / προς τα πίσω διαφορές σε ένα βήμα να ακολουθούνται με προς τα πίσω / προς τα εμπρός διαφορές στο επόμενη βήμα κλπ. Η μέθοδος αυτή δίνει πολύ καλά αποτελέσματα για μη-γραμμικά προβλήματα Μ.Δ.Ε., ενώ για γραμμικά προβλήματα είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο Lax-Wendroff.

Για τη περίπτωση των διδιάστατων εξισώσεων του Euler που είναι αναλυμένες στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις από (9.14) μέχρι (9.17) και αναφερόμαστε πάλι στο δισδιάστατο πλέγμα που παρουσιάζεται στο σχήμα 9.3.
Υποθέτουμε ότι το ροϊκό πεδίο σε κάθε σημείο πλέγματος στο σχήμα 9.1 είναι γνωστό σε χρόνο *t* και προχωράμε να υπολογίσουμε το ροϊκό πεδίο στα ίδια σημεία πλέγματος σε χρόνο *t+Δt*, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.4.

Πρώτα εξετάζουμε τη τιμή της πυκνότητας του ρευστού στο σημείο πλέγματος *(i,j)* σε χρονικό επίπεδο *t+Δt*:

$$\rho_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av} \Delta t \qquad (9.31)$$

όπου $(\partial \rho / \partial t)_{av}$ είναι μια αντιπροσωπευτική μέση τιμή της παραγώγου $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ μεταξύ του χρονικού επιπέδου *t* και χρονικού επιπέδου *t+Δt*. Συγκρίνοντας την εξίσωση (9.31) με την αντίστοιχη της τεχνικής του Lax-Wendroff:

$$\rho_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^t + \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{i,j}^t \cdot \Delta t + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right)_{i,j}^t \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots$$

βλέπουμε ότι σε αυτή την εξίσωση οι χρονικές παράγωγοι υπολογίζονται σε χρόνο *t*, και ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right)_{i,j}^t$ είναι απαραίτητος για να έχει η μέθοδος ακρίβεια δεύτερης τάξης. Αντίθετα στην εξίσωση (9.31) η τιμή του $(\partial \rho / \partial t)_{av}$ υπολογίζεται ώστε να παραμείνει η δεύτερης τάξης ακρίβεια χωρίς την ανάγκη να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\right)_{i,j}^t$, πράγμα που περιλαμβάνει πολλή άλγεβρα. Με τη μέθοδο MacCormack αυτή η άλγεβρα παρακάμπτεται. Παρόμοιες σχέσεις γράφονται για τις άλλες ροϊκών μεγεθών:

$$u_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{av} \cdot \Delta t \qquad (9.32)$$

$$v_{i,j}^{t+\Delta t} = v_{i,j}^t + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{av} \cdot \Delta t \qquad (9.33)$$

$$e_{i,j}^{t+\Delta t} = e_{i,j}^t + \left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_{av} \cdot \Delta t \qquad (9.34)$$

Επεξηγούμε το παραπάνω σχήμα χρησιμοποιώντας σαν παράδειγμα τον υπολογισμό της πυκνότητας. Γυρίζουμε στην εξίσωση (9.31), η μέση χρονική παράγωγος $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{av}$ λαμβάνεται από μία φιλοσοφία μεθόδου πρόγνωσης-διόρθωσης (predictor-corrector).

Βήμα πρόγνωσης (predictor step):

Στη εξίσωση της συνέχειας αντικαθιστάμε τις χωρικές παραγώγους στη δεξιά πλευρά με τις προς τα εμπρός διαφορές:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} = -\left(\rho_{i,j}^{t}\frac{u_{i+1,j}^{t}-u_{i,j}^{t}}{\Delta x} + u_{i,j}^{t}\frac{\rho_{i+1,j}^{t}-\rho_{i,j}^{t}}{\Delta x} + \rho_{i,j}^{t}\frac{v_{i,j+1}^{t}-v_{i,j}^{t}}{\Delta y} + v_{i,j}^{t}\frac{\rho_{i,j+1}^{t}-\rho_{i,j}^{t}}{\Delta y}\right) \qquad (9.35)$$

Στην εξίσωση (9.35) όλες οι μεταβλητές ροής στο χρόνο t είναι γνωστές τιμές δηλαδή, η δεξιά πλευρά είναι γνωστή. Τώρα, θεωρούμε μια προβλεφθείσα αξία της πυκνότητας $(\bar{\rho})^{t+\Delta t}$ από τους πρώτους όρους μιας σειράς Taylor ως εξής:

$$(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} \cdot \Delta t \qquad (9.36)$$

Στην εξίσωση (9.36) το $\rho_{i,j}^{t}$ είναι γνωστό και η παράγωγος $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{i,j}^{t}$ είναι γνωστή από την εξίσωση (35) και ως εκ τούτου η ποσότητα $(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t}$ υπολογίζεται εύκολα. Η τιμή της ποσότητας $(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t}$ είναι απλά μία πρόβλεψη της τελικής τιμής της πυκνότητας. Η εξίσωση (9.36) περιέχει μόνο τους όρους πρώτης τάξης στο ανάπτυγμα Taylor. Με παρόμοιο σκεπτικό υπολογίζονται οι προβλεφθείσες τιμές για τα u, v, e.

$$(\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} \cdot \Delta t \qquad (9.37)$$

$$(\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t} = v_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} \cdot \Delta t \qquad (9.38)$$

$$(\bar{e})_{i,j}^{t+\Delta t} = e_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} \cdot \Delta t \qquad (9.39)$$

Στις εξισώσεις (9.37) έως και (9.39) οι τιμές των χρονικών παραγώγων που είναι στο δεξί μέρος των εξισώσεων, υπολογίζονται από τις εξισώσεις (9.20) ως και (9.22), αντίστοιχα, με τις προς τα εμπρός διαφορές που χρησιμοποιούνται για τις χωρικές παραγώγους, παρόμοιες με αυτές της εξίσωσης (9.35) για την εξίσωση της συνέχειας.

Βήμα διόρθωσης (corrector step):

Στο βήμα διόρθωσης πρώτα υπολογίζουμε μία πρόβλεψη για τη χρονική παράγωγο σε χρονικό επίπεδο $t+\Delta t$, $\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}\right)_{i,j}^{t+\Delta t}$ αντικαθιστώντας τις προβλεφθείσες τιμές των $\rho,\ u,\ v$ στο δεξί μέρος της εξίσωσης της συνέχειας και αντικαθιστώντας τις χωρικές παραγώγους με προς τα πίσω διαφορές:

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} = -\left[(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} \cdot \frac{(\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t}-(\bar{u})_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + (\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} \cdot \frac{(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t}-(\bar{\rho})_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + (\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} \cdot \frac{(\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t}-(\bar{v})_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta y}(\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t} \cdot \frac{(\bar{p})_{i,j}^{t+\Delta t}-(\bar{p})_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta y}\right] \qquad (9.40)$$

Η μέση τιμή της χρονικής παραγώγου της πυκνότητας που εμφανίζεται στην εξίσωση (9.31) λαμβάνεται από τον αριθμητικό μέσο όρο του $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{i,j}^{t}$ που λαμβάνεται από την εξίσωση (35) και τη τιμή $\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t}\right)_{i,j}^{t+\Delta t}$ που υπολογίζεται από την εξίσωση (9.40):

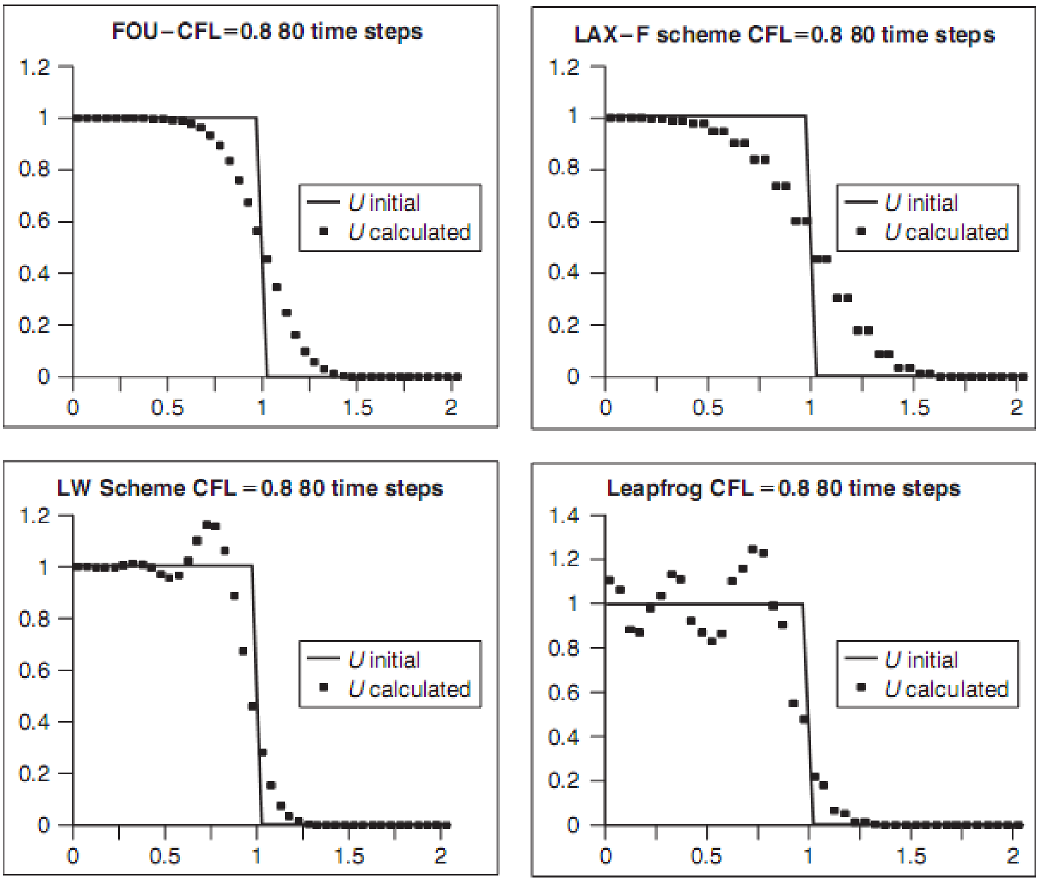
$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{av} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{i,j}^{t} + \left(\frac{\overline{\partial\rho}}{\partial t}\right)_{i,j}^{t+\Delta t}\right] \tag{9.41}$$

Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τελική, «διορθωμένη» τιμή της πυκνότητας σε χρονικό επίπεδο $t+\Delta t$ από την εξίσωση (9.31), που ξαναγράφεται παρακάτω:

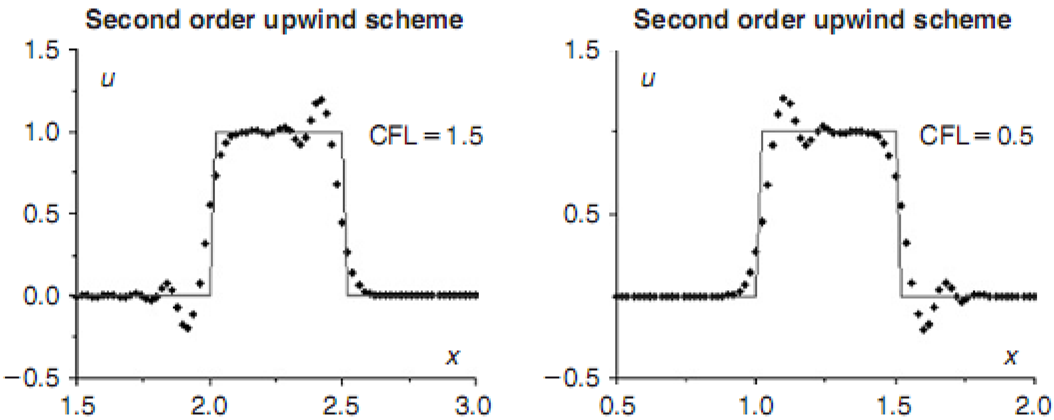
$$\rho_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^{t} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{av} \tag{9.31}$$

Η διαδικασία της πρόγνωσης και διόρθωσης που περιγράφηκε στα παραπάνω δίνει τη μεθοδολογία του υπολογισμού της πυκνότητας στο σημείο πλέγματος *(i,j)* σε χρόνο $t+\Delta t$ όπως φαίνεται στο σχήμα 9.2. Αυτή η μεθοδολογία είναι επαναλαμβανόμενη σε όλα τα σημεία πλέγματος, έτσι ώστε να υπολογιστεί η πυκνότητα σε όλο ροϊκό πεδίο σε χρόνο $t+\Delta t$. Για να υπολογίσουμε τις τιμές των u, v, e σε χρόνο $t+\Delta t$ χρησιμοποιείται η ίδια μέθοδος, ξεκινώντας από τις εξισώσεις (9.32) ως (9.34) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ορμής και ενέργειας σε μη συντηρητική μορφή, όπως στις εξισώσεις από (9.20) ως (9.22) για να υπολογισθούν οι μέσες χρονικές παράγωγοι μέσω της διαδικασίας πρόγνωσης και διόρθωσης, χρησιμοποιώντας τις προς τα εμπρός διαφορές στη πρόγνωση και τις προς τα πίσω διαφορές στη διόρθωση. Η τεχνική MacCormack όπως περιγράφηκε παραπάνω, επειδή η διαδικασία των δυο φάσεων πρόγνωσης και διόρθωσης χρησιμοποιείται με τις προς τα εμπρός διαφορές στη πρόγνωση και με τις προς τα πίσω στη διόρθωση, είναι μια μέθοδος που προσφέρει δεύτερης τάξης ακρίβεια. Επομένως έχει την ίδια ακρίβεια με τη μέθοδο Lax-Wendroff όπως περιγράφεται στο εδάφιο 9.5. Εντούτοις η μέθοδος MacCormack είναι πολύ πιο εύκολο να εφαρμοστεί, επειδή δε χρειάζεται να υπολογισθούν οι παράγωγοι δεύτερη φορά όπως συνέβη στη μέθοδο Lax-Wenfroff. Για να το δούμε αυτό καλύτερα ανακαλούμε τις εξισώσεις (9.28) και (9.29), οι όποιες απαιτούνται για τη μέθοδο Lax-Wendroff. Αυτές οι εξισώσεις αντιπροσωπεύουν έναν μεγάλο αριθμό πρόσθετων υπολογισμών. Επιπλέον για ένα πιο σύνθετο πρόβλημα της Μηχανικής των Ρευστών όπως η συνεκτική ροή ενός ρευστού, η παραγώγιση των εξισώσεων της συνέχειας, της ορμής και της ενέργειας, για να πάρει κανείς τις δεύτερες παραγώγους, πρώτα όσον αφορά το χρόνο και έπειτα τις μικτές παραγώγους όσον αφορά το χρόνο και χώρο, είναι πολύ κουραστική διαδικασία και παρέχει μια πρόσθετη πηγή για ανθρώπινο λάθος. Η μέθοδος MacCormack δεν απαιτεί τέτοιες δεύτερες παραγώγους και ως εκ τούτου δεν έχει να κάνει με τις εξισώσεις (9.28) και (9.29). Στη τεχνική του MacCormack η χρήση των εμπρός διαφορών στη πρόγνωση και των πίσω στη διόρθωση δεν είναι ιδιαίτερης σημασίας, η ίδια τάξη ακρίβειας επιτυγχάνεται από τη χρήση των πίσω διαφορών στη πρόγνωση και των εμπρός διαφορών στο βήμα διόρθωσης.

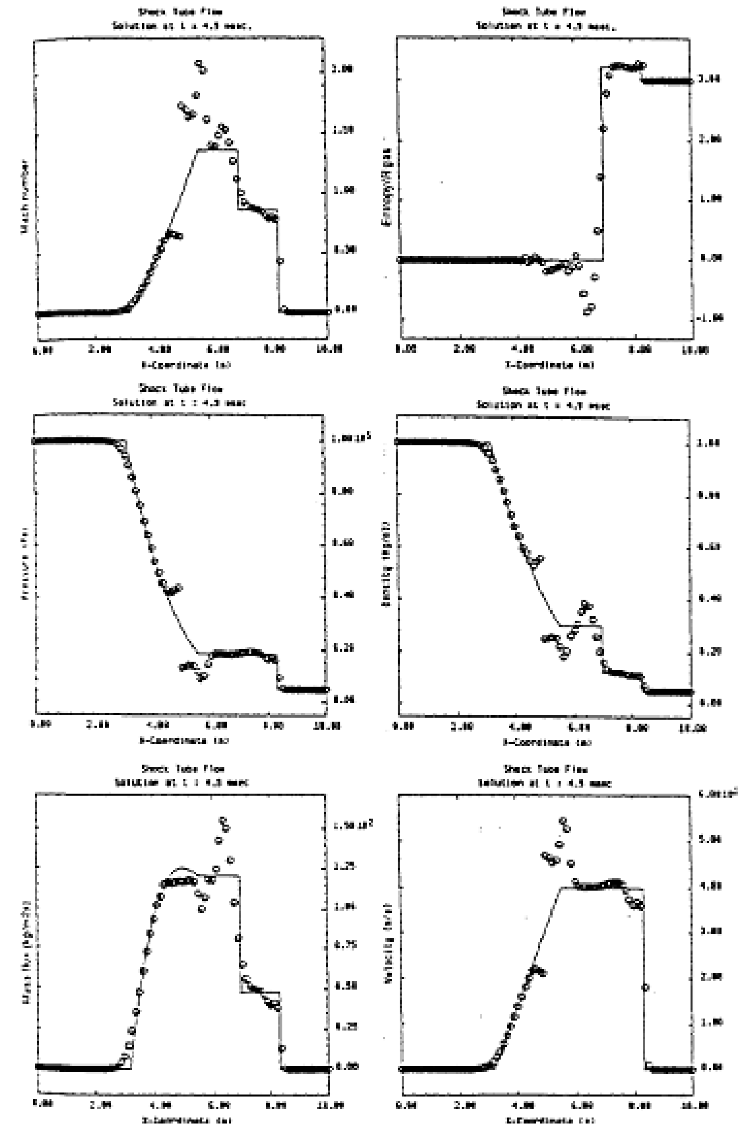
9.5 Σύγκριση μεθόδων



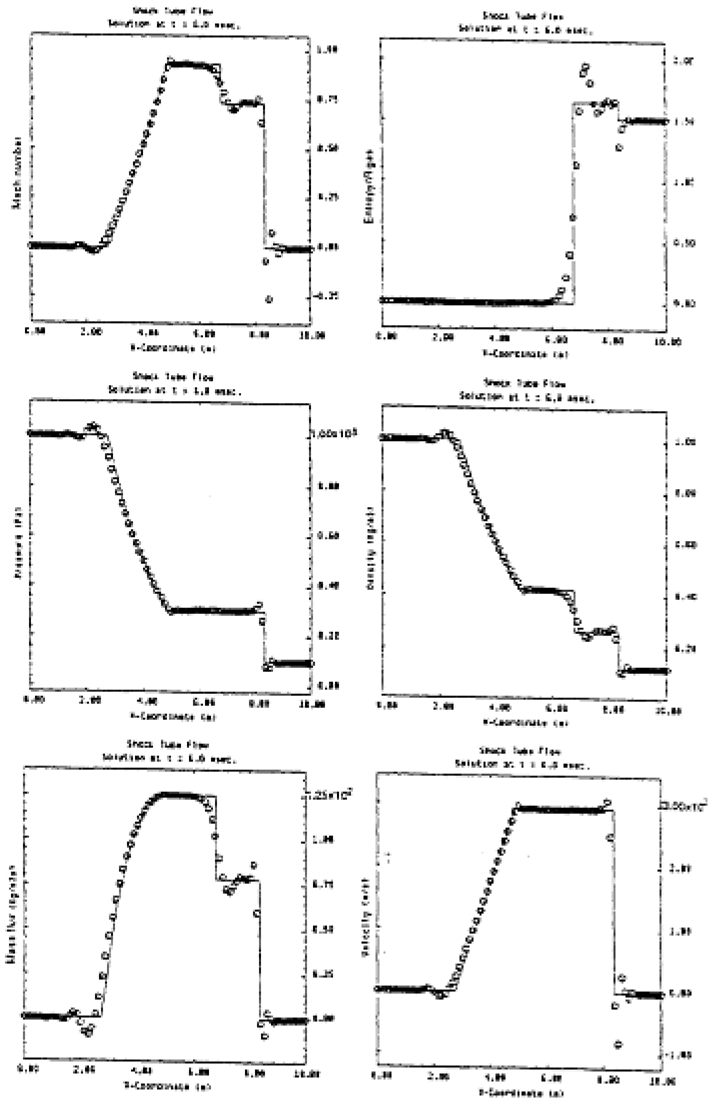
Σχήμα 9.5: Σύγκριση αποτελεσμάτων τεσσάρων αριθμητικών σχημάτων για την επίλυση της γραμμικής εξίσωσης συναγωγής $\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0\right)$για τη μετάδοση ενός τετραγωνικού παλμού.



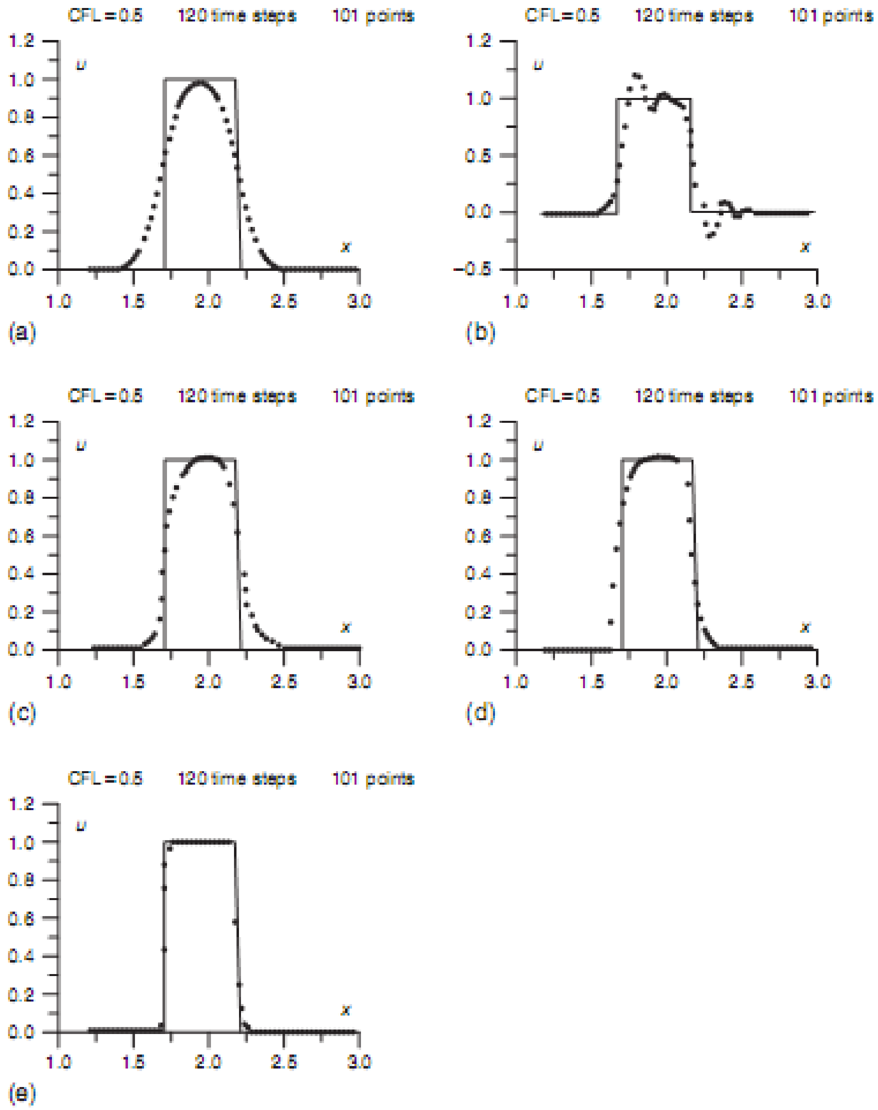
Σχήμα 9.6: Αποτελέσματα επίλυσης τετραγωνικού παλμού με το αριθμητικό σχήμα των Beam and Warming.



Σχήμα 9.7: Αποτελέσματα υπολογισμών ροής σε κρουστικό σωλήνα με το σχήμα του MacCormack



Σχήμα 9.8: Αποτελέσματα υπολογισμών ροής σε κρουστικό σωλήνα με το σχήμα υψηλής ακρίβειας του van Leer

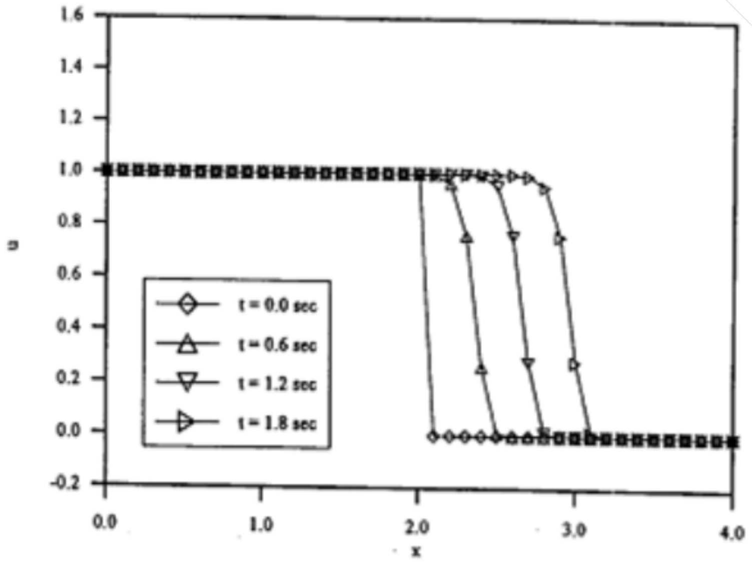


Σχήμα 9.9: Διάφοροι περιοριστές (limiters) για τη γραμμική εξίσωση μετάδοσης κύματος $\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0\right)$ μετά από 120 χρονικά βήματα υπολογισμών με σχήμα: (α) πρώτης τάξης upwind, (β) δεύτερης τάξης upwind, (γ) δεύτερης τάξης upwind με περιοριστή min-mod, (δ) δεύτερης τάξης upwind με περιοριστή van Leer, (ε) δεύτερης τάξης upwind με περιοριστή superbee.

9.6 Μέθοδοι διακριτοποίησης ως προς το χρόνο: Μέθοδος πολλαπλών βημάτων Runge-Kutta

Ένα αριθμητικό σύστημα το οποίο χρησιμοποιείται συχνά για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών στις Συνήθεις Διαφορικές εξισώσεις είναι η μέθοδος Runge-Kutta. Το σύστημα αυτό ουσιαστικά χρησιμοποιεί τον σταθμισμένο μέσο όρο πολλών λύσεων πάνω από το χρονικό διάστημα Δt ώστε να έχουμε βελτίωση στην ακρίβεια της λύσης. Για να γίνει κατανοητό το παραπάνω, ας εξετάσουμε την εξίσωση - μοντέλο που δίνεται παρακάτω:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}$$



Σχήμα 9.10: Λύση της μη-ιξώδους εξίσωσης Burgers από το πρώτης τάξεως έμμεσο σύστημα $\Delta x = 0{,}1$ και $\Delta t = 0{,}1$.

Με πεπερασμένες διαφορές πρώτης τάξεως προς τα εμπρός μας δίνει:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \tag{9.42}$$

Διάφορες προσεγγίσεις είναι διαθέσιμες για τον υπολογισμό του όρου συναγωγής $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^n$. Παραδείγματος χάριν, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει κεντρικές διαφορές δεύτερης τάξης με το άμεσο σύστημα FTCS (Forward-Time Central-Space). Υπενθυμίζουμε ότι, λόγω της απαίτησης ευστάθειας, μια τροποποίηση εισήχθη και η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών που προκύπτει είναι γνωστή ως η μέθοδος Lax (εδάφιο 9.2.4).

Τώρα ας θεωρήσουμε τον υπολογισμό του όρου συναγωγής $\left(\partial F / \partial x \right)$ σε διάφορα χρονικά υπό-διαστήματα μέσα στο χρονικό διάστημα Δt και στην συνέχεια ας πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα με μέσο όρο αυτών των τιμών. Για παράδειγμα, πρώτα υπολογίζουμε μια τιμή u_i χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα $\Delta t/2$ που συμβολίζεται με το $u_i^{(2)}$. Οι εκθέτες με παρένθεση θα χρησιμοποιούνται για να ορίζουν τιμές σε χρονικό επίπεδο $a \cdot \Delta t$ εντός του καθορισμένου χρονικού βήματος όπου $0 < a < 1$. Είναι σύνηθες να συμβολίζουμε την τιμή μιας μεταβλητής στο χρονικό επίπεδο 'n' με το χρονικό επίπεδο (1).
Τώρα η διατύπωση είναι ως εξής:

$$u_i^{(1)} = u_i^n \tag{9.43}$$

$$u_i^{(2)} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^n \tag{9.44}$$

Ας σημειωθεί πως η εξίσωση (9.43) είναι γραμμένη έτσι ώστε να ορίζεται ως την πρώτη φάση της μεθόδου Runge-Kutta και να είναι συνεπής με την διάταξη της μεθόδου όπως θα δούμε παρακάτω. Για την ακρίβεια, δεν είναι υποχρεωτικό να καθοριστεί στη διαδικασία προγραμματισμού στον Η/Υ. Οποιαδήποτε χωρική προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον όρο συναγωγής $(\partial F/\partial x)$. Αφού έχει καθοριστεί η $u_i^{(2)}$,η τελική λύση για την u_i^{n+1} υπολογίζεται από την:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(1)} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(2)} \right] \right\} \tag{9.45}$$

Το σύστημα που δίνεται από τις εξισώσεις (9.43) μέχρι και (9.45) είναι γνωστό ως μέθοδος Runge-Kutta με δύο βήματα και έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο. Θα αναφέρεται στο εξής ως η δεύτερης τάξης μέθοδος Runge-Kutta. Η τάξη ακριβείας καθορίζεται με σύγκριση του συστήματος με το ανάπτυγμα σειράς κατά Taylor. Ας σημειωθεί ότι, στην εξίσωση (9.45), εξίσου σημασία δίνεται και στην κατά μέσο όρο διαδικασία διακριτοποίησης του όρου συναγωγής. Για την ακρίβεια, η εξίσωση (6.45) μπορεί να γραφτεί σε γενική μορφή ως:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot \left[a \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(1)} + b \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(2)} \right] \tag{9.46}$$

όπου τα a και b είναι σταθμισμένοι παράγοντες και, στην εξίσωση (9.46), είναι ίσοι με 0,5. Ας σημειωθεί ότι το άθροισμα των σταθμισμένων παραγόντων στην κατά μέσο όρο διαδικασία πρέπει να είναι ίσο με ένα. Έτσι λοιπόν, το άθροισμα των a και b στην εξίσωση (9.46) πρέπει να είναι ένα. Ακόμα, παρατηρούμε ότι στον υπολογισμό της $u_i^{(2)}$, στην εξίσωση (9.44), το χρονικό διάστημα ορίστηκε στο μεσοδιάστημα, δηλαδή $\Delta t/2$. Για την ακρίβεια, ο συντελεστής Δt μπορεί να οριστεί σε οποιαδήποτε τιμή μεταξύ του μηδενός και ένα. Για αυτό, παρατηρούμε ότι μπορούν να αναπτυχθούν πολλοί (πράγματι άπειροι) αριθμοί της μεθόδου Runge-Kutta δεύτερης τάξης. Το πιο κοινό σύστημα δευτέρας τάξεως δίνεται από τις εξισώσεις (9.43) μέχρι και (9.45).

Μια γενική ν-φάση του συστήματος Runge-Kutta μπορεί να γραφτεί και ως:

$$u_i^{(1)} = u_i^n \tag{9.47}$$

$$u_i^{(2)} = u_i^n - a_2 \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(1)} \tag{9.48}$$

$$u_i^{(3)} = u_i^n - a_3 \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(2)} \tag{9.49}$$

$$u_i^{(4)} = u_i^n - a_4 \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(3)} \tag{9.50}$$

....

$$u_i^{(\nu)} = u_i^n - a_\nu \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(\nu-1)} \tag{9.51}$$

και

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot \left[\sum_{i=1}^{i=\nu} \beta_i \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^i \right] \tag{9.52}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι συντελεστές $\alpha_k,\ k = 1,2,\dots,n$ αντιπροσωπεύουν τους συντελεστές του κάθε βήματος. Επιπλέον ο συμβολισμός $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_i^{(\nu-1)}$ σημαίνει ότι τα υπόλοιπα (residuals) είναι υπολογισμένα από την λύση $u_i^{(\nu-1)}$ στο προηγούμενο ενδιάμεσο βήμα $\nu - 1$.

Διαφορετικά σε σχέση με τα κλασικά σχήματα Runge - Kutta, μόνο η μηδενική (αρχική) λύση και το τελευταίο υπόλοιπο αποθηκεύονται ώστε να μειωθούν οι απαίτησης μνήμης. Ο συντελεστής βήματος μπορεί να συντονιστεί ώστε να αυξήσουμε το μέγιστο χρονικό βήμα και να βελτιώσουμε την ευστάθεια σε μια συγκεκριμένη χωρική ολοκλήρωση. Για συνέπεια, χρειάζεται μόνο $\alpha_m = 1$. Το αποτέλεσμα της μετατροπής του σχήματος Runge - Kutta είναι ότι δεύτερης τάξης ακρίβεια μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο αν $\alpha_{m=1} = \frac{1}{2}$. Αλλιώς το σχήμα με τα ενδιάμεσα βήματα έχει πρώτης τάξης ακρίβεια στο χρόνο.

	Πρώτης Τάξης Ακρίβειας Σχήμα			Δεύτερης Τάξης Ακρίβειας Σχήμα		
CFL	**1.5**	**2**	**2.5**	**0.69**	**0.92**	**1.15**
Βήματα	**3**	**4**	**5**	**3**	**4**	**5**
α_1	0.1481	0.0833	0.0533	0.1918	0.1084	0.0695
α_2	0.4000	0.2069	0.1263	0.4929	0.2602	0.1602
α_3	1.0000	0.4265	0.2375	1.0000	0.5052	0.2898
α_4		1.0000	0.4414		1.0000	0.5060
α_5			1.0000			1.0000

Πίνακας 9.1: Σχήμα με ενδιάμεσα βήματα, βελτιστοποιημένος συντελεστής (α) και CFL αριθμοί (σ) για πρώτη και δεύτερης τάξεως ανάντη χωρική ολοκλήρωση.

	Σχήμα Κεντρικών Διαφορών		Ανάντη Σχήμα	
CFL	**3.6**		**2**	
Βήματα	**α**	**β**	**Α**	**Β**
1	0.2500	1.00	0.2742	1.00
2	0.1667	0.00	0.2067	0.00
3	0.3750	0.56	0.5020	0.56
4	0.5000	0.00	0.5142	0.00
5	1.0000	0.44	1.0000	0.44

Πίνακας 9.2: Υβριδικό σχήμα με ενδιάμεσο βήμα, βελτιστοποιημένος συντελεστής βήματος (α) και συντελεστής ανάμειξης (β), όπως επίσης και CFL αριθμοί (σ) για κεντρικές και ανάντη χωρικές ολοκληρώσεις.

Οι παραπάνω εξισώσεις (9.47) – (9.52) με τα ενδιάμεσα βήματα είναι ιδιαίτερα κατάλληλες για ανάντη (upwind) χωρική ολοκλήρωση σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα. Σχήματα κεντρικής διακριτοποίησης εκτελούνται πολύ πιο αποδοτικά με μεθοδολογία υβριδικών σχημάτων με ενδιάμεσα βήματα. Σύνολα από βελτιστοποιημένους συντελεστές βήματος για πρώτης και δεύτερης τάξης σχημάτων ανάντη διαφορών παρουσιάζονται στους πίνακες 9.1 και 9.2 για από 3 μέχρι 5 ενδιάμεσα βήματα. Η πρακτική εμπειρία έχει δείξει ότι οι συντελεστές πρώτης τάξεως πρέπει να προτιμούνται σε περιπτώσεις όπου το πεδίο ροής περιέχει ισχυρές ροϊκές ασυνέχειες (όπως κρουστικά κύματα), άσχετα από την τάξη της χωρική ολοκλήρωσης. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι κάθε σχήμα υψηλότερης τάξης αλλάζει σε πρώτης τάξης στα κρουστικά κύματα για να αποφύγει αριθμητικές ταλαντώσεις στην λύση. Ωστόσο, το υπόλοιπο στους ισχυρούς αριθμητικούς κραδασμούς επηρεάζει σημαντικά την σύγκλιση.

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές β_i αντιπροσωπεύουν τους σταθμισμένους παράγοντες έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{i=\nu}\beta_i = 1$ και οι συντελεστές a_i καθορίζονται μεταξύ του μηδενός και του ένα. Ανάμεσα σε μια ποικιλία από συστήματα Runge-Kutta (RK),χρησιμοποιείται πιο πολύ το τετάρτης τάξεως σύστημα RK. Ένα σύστημα τετάρτης τάξεως μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$u_i^{(1)} = u_i^n \tag{9.53}$$

$$u_i^{(2)} = u_i^n - \frac{1}{2}\cdot\Delta t\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i^{(1)} \tag{9.54}$$

$$u_i^{(3)} = u_i^n - \frac{1}{2}\cdot\Delta t\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i^{(2)} \tag{9.55}$$

$$u_i^{(4)} = u_i^n - \Delta t\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i^{(3)} \tag{9.56}$$

και

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{(1)} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{(2)} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{(3)} + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{(4)}\right] \tag{9.57}$$

Τα συστήματα Runge-Kutta συνήθως εκφράζονται σε άμεση μορφή. Τα πεπλεγμένα συστήματα RK είναι υπολογιστικά ακριβότερα και χρησιμοποιούνται σπανίως. Μερικά από τα πλεονεκτήματα των συστημάτων Runge-Kutta είναι:

1. Τα συστήματα Runge-Kutta εκφράζονται συνήθως ως άμεσα τυποποιημένα και γι αυτό τα συστήματα αυτά είναι ευκολότερο να προγραμματιστούν.

2. Τα συστήματα Runge-Kutta κατέχουν καλύτερα κριτήρια ευστάθειας σε σχέση με άλλα σχετικά άμεσα συστήματα. Ας θυμηθούμε πως, για τις περισσότερες γραμμικές και υπερβολικές εξισώσεις, η απαιτούμενη ευστάθεια των άμεσων τύπων είναι $CFL \leq 1$.Μπορεί να αποδειχτεί ότι, για ένα σύστημα RK τετάρτης τάξης με κεντρικές διαφορές του όρου συναγωγής, η απαιτούμενη ευστάθεια είναι $CFL \leq 2\sqrt{2}$. Τονίζεται, όμως, ότι το σύστημα μπορεί να είναι ασταθές για μη-γραμμικές υπερβολικές εξισώσεις όταν χρησιμοποιούνται κεντρικές διαφορές για τη διακριτοποίηση του όρου συναγωγής. Για αυτό, τυπικά περιλαμβάνονται κάποιοι όροι απόσβεσης για να σταθεροποιήσουν τη λύση. Για να μειώσουμε το υπολογιστικό κόστος, αυτοί οι όροι απόσβεσης μπορούν να εκτιμηθούν μόνο μια φορά σε χρονικό επίπεδο n και να επαυξάνουν τη λύση μετά την τελική φάση.

Τα κύρια μειονεκτήματα είναι:

1. Δεδομένου ότι πραγματοποιούνται αρκετοί υπολογισμοί για κάθε χρονικό βήμα, το σύστημα απαιτεί σημαντικά περισσότερο χρόνο υπολογισμού ανά βήμα.

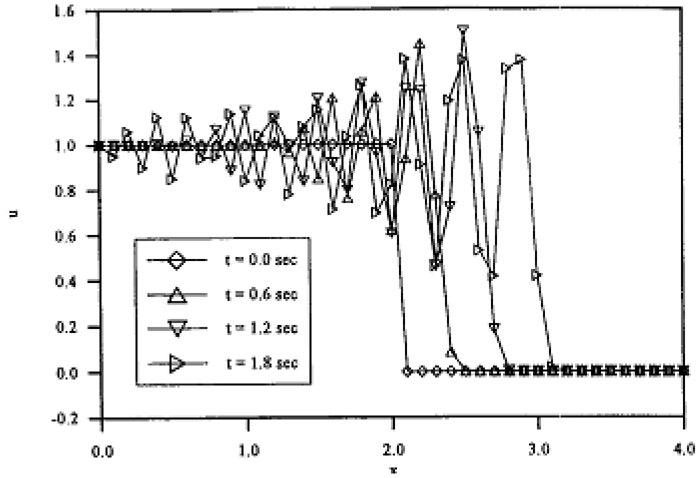
2. Καθίσταται πιο δύσκολο να υπολογιστεί το σφάλμα..

Στις ακόλουθες εφαρμογές, χρησιμοποιείται μια δεύτερης τάξης προσέγγιση κεντρικών διαφορών για να υπολογίσουμε τους όρους συναγωγής, οι οποίοι είναι:

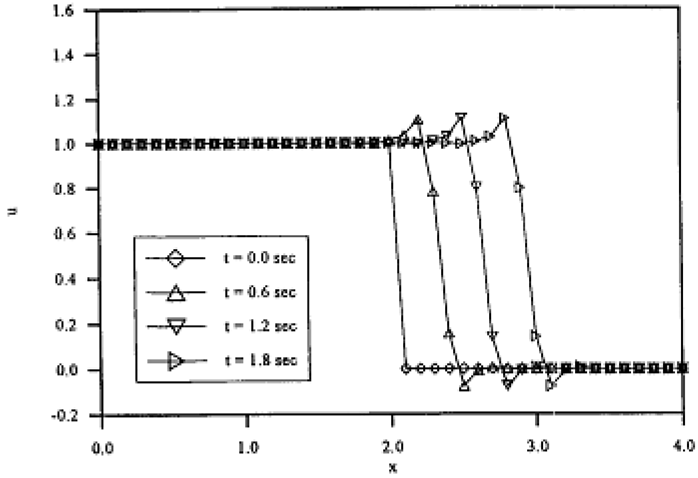
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\cdot\Delta x}$$

Η λύση στο προτεινόμενο πρόβλημα , εφαρμόζοντας σχήμα RK τετάρτης τάξης, το οποίο διέπεται από τις εξισώσεις (9.43) έως (9.47), απεικονίζεται στο σχήμα 9.9. Το χωρικό βήμα Δx είναι 0.1 και το χρονικό βήμα Δt είναι 0.1 .Η λύση έχει αναπτύξει μεγάλες και μη αποδεκτές ταλαντώσεις. Αυτό δεν αποτελεί έκπληξη καθώς η προσέγγιση κεντρικών διαφορών που χρησιμοποιήθηκε στον τύπο κατέχει ένα μεγάλο σφάλμα διασποράς. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται και στην λύση από το σύστημα Beam and Warming. Για να μειώσουμε τις αριθμητικές ταλαντώσεις σε ένα αποδεκτό επίπεδο, θα πρέπει να προστεθεί και ένας τετάρτης τάξεως όρος απόσβεσης. Για το σκοπό αυτό, η εξίσωση (9.48) υπολογίζεται σε χρονικό επίπεδο 'n' και στη συνέχεια προστίθεται ο όρος απόσβεσης D (που ονομάζεται και τεχνητό ιξώδες) μετά το τελικό βήμα. Αυτό θα ισχύει αφού στην εξίσωση (9.47) ,έχουμε ότι $u_i^{n+1} = u_i^{n+1} + D$

.Τώρα, παρατηρούμε στο σχήμα 9.10 την λύση με τον όρο απόσβεσης που προστέθηκε στην αρχική Μ.Δ.Ε. και το ε_l ίσο με 0.1.



Σχήμα 9.9: Λύση τη μη-ιξώδους εξίσωσης Burgers τετάρτης τάξης μέθοδο Runge-Kutta, $\Delta x = 0.1$ και $\Delta t = 0.1$



Σχήμα 9.10: Λύση της μη-ιξώδους εξίσωσης Burgers με την τετάρτης τάξης μέθοδο Runge-Kutta με τη προσθήκη τεχνητού ιξώδους ($\varepsilon_l = 0.1$), $\Delta x = 0.1$ και $\Delta t = 0.1$

9.7 Τροποποιημένη μέθοδος RUNGE-KUTTA

Για να μειώσουμε την απαιτητική αποθήκευση ενός συστήματος RK σε μνήμη, εισάγεται μια τροποποίηση για να εξαλειφθεί το τελευταίο ενδιάμεσο βήμα όπου χρησιμοποιείται η λύση από τα προηγούμενα ενδιάμεσα βήματα για τον υπολογισμό της αριθμητικής ροής. Για αυτό, το ισοδύναμο σχήμα RK δεύτερης τάξης γράφεται ως εξής:

$$u_i^{(1)} = u_i^n \tag{9.58}$$

$$u_i^{(2)} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(1)} \tag{9.59}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(2)} \tag{9.60}$$

Ένα τετάρτης τάξης σχήμα RK είναι,

$$u_i^{(1)} = u_i^n \tag{9.61}$$

$$u_i^{(2)} = u_i^n - \frac{\Delta t}{4} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(1)} \tag{9.62}$$

$$u_i^{(3)} = u_i^n - \frac{\Delta t}{3} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(2)} \tag{9.63}$$

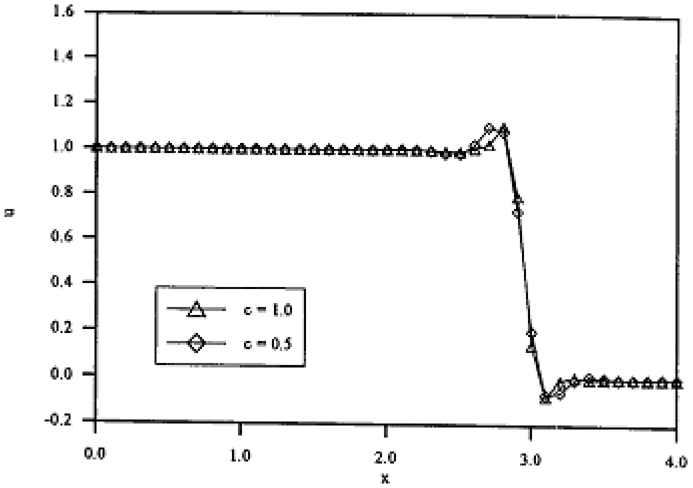
$$u_i^{(4)} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(3)} \tag{9.64}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i^{(4)} \tag{9.65}$$

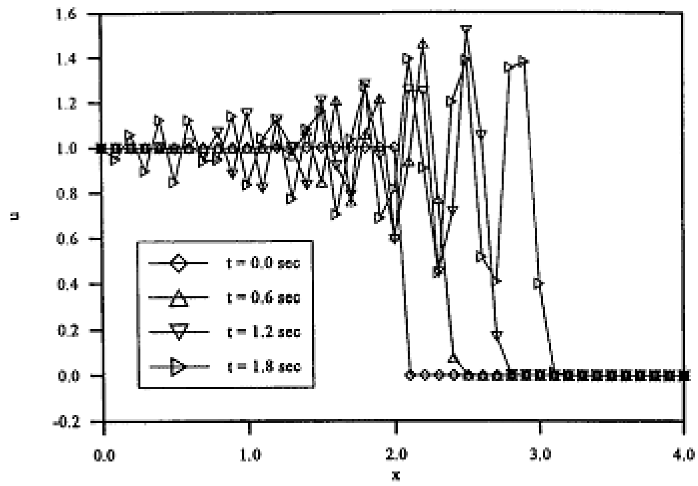
Για άλλη μια φορά, χρησιμοποιείται η προσέγγιση κεντρικών διαφορών με ακρίβεια δευτέρας τάξης για τον όρο συναγωγής $\partial F/\partial x$. Η λύση είναι παρόμοια με αυτή της τετάρτης τάξης RK που παρατηρείται στο σχήμα 9.9. Ξανά, η προσθήκη του όρου απόσβεσης είναι απαραίτητη για να παραχθούν αποδεκτές λύσεις. Η λύση με τον όρο απόσβεσης της μορφής

$$D = -\varepsilon_l \cdot \left(u_{i+2}^n - 4 \cdot u_{i+1}^n + 6 \cdot u_i^n - 4 \cdot u_{i-1}^n + u_{i+2}^n \right)$$

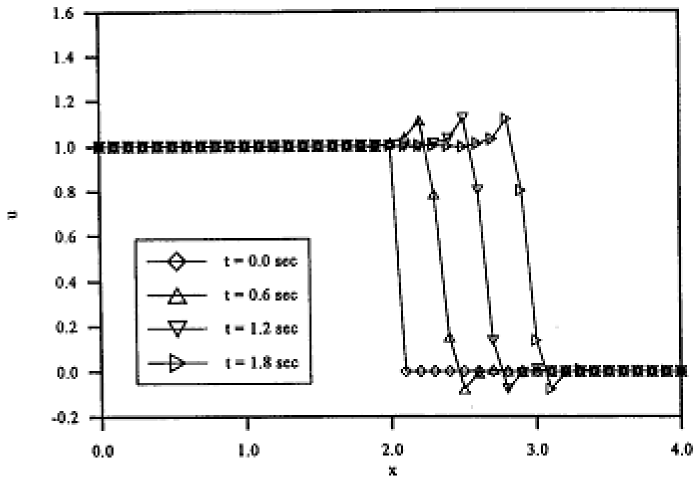
και τον συντελεστή $\varepsilon_l = 0.1$ παρατηρούνται στο σχήμα 9.13. Να σημειωθεί ότι, η προσθήκη ενός όρου απόσβεσης είναι παρόμοια με αύτη της προηγούμενης ενότητας όπου, $u_i^{n+1} = u_i^{n+1} + D$ η οποία εφαρμόζεται μετά την εξίσωση (9.65).



Σχήμα 9.11: Το αποτέλεσμα του μεγέθους του βήματος στην λύση της μη-ιξώδους εξίσωσης Burgers με τη τέταρτης τάξης μέθοδο RK με συντελεστή απόσβεσης $\varepsilon_l = 0.1$.



Σχήμα 9.12: Λύση της μη-ιξώδους εξίσωσης Burgers με τη τροποποιημένη τέταρτης τάξης μέθοδο RK, $\Delta x = 0.1$ και $\Delta t = 0.1$.



Σχήμα 9.13: Λύση της μη-ιξώδους εξίσωσης Burgers με τη τροποποιημένη τέταρτης τάξης μέθοδο RK με απόσβεση του $\varepsilon_l = 0.1$, $\Delta x = 0.1$ και $\Delta t = 0.1$

10. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΑΧΥΣΗ – ΤΕΧΝΗΤΟ ΙΞΩΔΕΣ Μ.Δ.Ε.

10.1 Γενικές αρχές Αριθμητικής Διάχυσης – Τεχνητού Ιξώδους

Στα προηγούμενα κεφάλαια έχουν παρουσιαστεί αριθμητικές τεχνικές για την επίλυση των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Euler ή Navier-Stokes, υπολογίζοντας επίσης τις περικοπές και τα λάθη στρογγύλευσης αυτών των προσεγγιστικών μεθόδων. Η εστίαση έγκειται στο γεγονός ότι λύνουμε κάποιες *συγκεκριμένες Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις* αλλά ότι οι αριθμητικές λύσεις - που είναι προσεγγιστικές - περιέχουν πάντα κάποιο λάθος.
Για να παρουσιάσουμε τις αρχές της αριθμητικής διάχυσης, ας ασχοληθούμε πρώτα με τη πρότυπη μερική διαφορική εξίσωση (εξίσωση – μοντέλο), ονομαζόμενη ως, η μονοδιάστατη εξίσωση κύματος, που δίνεται από:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{10.1}$$

με $a > 0$. Θεωρούμε ότι η (10.1) είναι η συγκεκριμένη μερική διαφορική εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε αριθμητικά. Ας διαλέξουμε να διακριτοποιήσουμε αυτήν την εξίσωση χρησιμοποιώντας πρώτης τάξεως προς τις προς τα εμπρός πεπερασμένες διαφορές ως προς το χρόνο και πρώτης τάξης προς τα πίσω διαφορές ως προς το χώρο.
Έτσι η εξίσωση (10.1) παριστάνεται από την ακόλουθη διαφοροποιημένη εξίσωση:

$$\frac{u_i^{t+\Delta t} - u_i^t}{\Delta t} + a\frac{u_i^t - u_{i-1}^t}{\Delta x} = 0 \tag{10.2}$$

Μια λύση της εξίσωσης (10.2) αντιπροσωπεύει την αριθμητική λύση της εξίσωσης (10.1) καθορισμένη με ακρίβεια, υπολογίζοντας περικοπές και λάθη στρογγύλευσης. Η ακρίβεια της εξίσωσης (10.2), είναι πρώτης τάξης ως προς Δx και ως προς Δt, δηλ. *Ο(Δx, Δt)*. Ας εξετάσουμε τώρα μια ελαφρώς διαφοροποιημένη προσέγγιση. Για να μπορέσουμε να αποδείξουμε αυτή την άποψη, αντικαθιστούμε ${u_i}^{t+\Delta t}$ και u_{i-1}^t της εξίσωσης (10.2) με τα αναπτύγματα σειρών κατά Taylor, όπως παρακάτω:

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t \Delta t + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^t \frac{(\Delta t)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^t \frac{(\Delta t)^3}{6} + \cdots \tag{10.3}$$

$$u_{i-1}^t = u_i^t - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^t \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^t \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^t \frac{(\Delta x)^3}{6} + \cdots \tag{10.4}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (10.4) και (10.3) στην (10.2) παίρνουμε:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^t \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^t \frac{(\Delta t)^2}{6} + \cdots\right] + a\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^t - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^t \frac{\Delta x}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^t \frac{(\Delta x)^2}{6} - \cdots\right] = 0 \tag{10.5}$$

Αναδιοργανώνοντας την εξίσωση (10.5) παίρνουμε την

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^t = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^t \frac{\Delta t}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^t \frac{(\Delta t)^2}{6} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^t \frac{a\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^t \frac{a(\Delta x)^2}{6} + \cdots \tag{10.6}$$

Διακόπτοντας για λίγο, εξετάζουμε την εξίσωση (10.6). Η αριστερή πλευρά είναι ακριβώς ίδια με την αριστερή πλευρά της αρχικής μερικής διαφορικής εξίσωσης (10.1). Το δεξί μέρος της (10.6) είναι το σφάλμα αποκοπής που σχετίζεται με τη διαφορική εξίσωση (10.2). Ξεκάθαρα, αυτή το σφάλμα αποκοπής είναι πρώτης τάξης ακρίβειας ως προς Δx και ως προς Δt, δηλ. το *Ο(Δx, Δt)*. Ας αντικαταστήσουμε τώρα τις χρονικές παραγώγους στο δεξί μέρος της (10.6) με τη παράγωγο ως προς τη διεύθυνση *x*. Αρχικά διαφορίζουμε την εξίσωση (10.6) με ως προς *t*. (Δεν θα ξαναγράψουμε χάριν απλοποίησης δείκτη *i* και τον εκθέτη t, μέχρι να διαπιστώσουμε ότι όλοι οι παράγωγοι έχουν υπολογιστεί στο σημείο i και τη χρονική στιγμή t).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=-\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\cdot\frac{\Delta t}{2}-\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\cdot\frac{(\Delta t)^2}{6}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\cdot\frac{a\Delta x}{2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial t}\cdot\frac{a(\Delta x)^2}{6}+\cdots \qquad (10.7)$$

Επίσης, διαφορίζουμε την εξίσωση (10.6) ως προς x και πολλαπλασιάζουμε επί α.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\cdot\frac{a\Delta t}{2}-\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}\cdot\frac{a(\Delta t)^2}{6}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\cdot\frac{a^2\Delta x}{2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\cdot\frac{a^2(\Delta x)^2}{6}+\cdots \qquad (10.8)$$

Αφαιρώντας την εξίσωση (10.8) από την (10.7) έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&-\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\cdot\frac{\Delta t}{2}-\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\cdot\frac{(\Delta t)^2}{6}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\cdot\frac{a\Delta x}{2}\\&-\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial t}\cdot\frac{a(\Delta x)^2}{6}+\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\cdot\frac{a\Delta t}{2}+\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\,\partial x}\cdot\frac{a(\Delta t)^2}{6}\\&-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\cdot\frac{a^2\Delta x}{2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\cdot\frac{a^2(\Delta x)^2}{6}+\cdots\end{aligned} \qquad (10.9)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την (10.9) σε μια πιο συμπτυγμένη μορφή, εμφανίζοντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης, π.χ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\Delta t}{2}\left[-\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+a\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}+O(\Delta t)\right]+\frac{\Delta x}{2}\left[\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}-a^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x)\right] \qquad (10.10)$$

Η εξίσωση (10.10) μας παρέχει την έκφραση τον όρο $\partial^2 u/\partial t^2$, η οποία πρόκειται να αντικατασταθεί με τον πρώτο όρο στο δεξί μέρος της εξίσωσης (10.6). Πριν προχωρήσουμε όμως σε αυτήν την αντικατάσταση, ας χειριστούμε τον δεύτερο όρο στο δεξί μέρος της εξίσωσης (10.6), που είναι η τρίτη παράγωγος. Αυτό επιτυγχάνεται διαφορίζοντας την εξίσωση (10.10) ως προς το χρόνο, δίνοντας:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=a^2\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\,O(\Delta t,\Delta x) \qquad (10.11)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (10.8) ως προς x και πολλαπλασιάζοντας επί α, παίρνουμε:

$$a^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+a^3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=O\,(\Delta t,\Delta x) \qquad (10.12)$$

Προσθέτοντας τώρα τις εξισώσεις (10.11) και (10.12) έχουμε:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=-a^3\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t,\Delta x) \qquad (10.13)$$

Η εξίσωση (10.13) μας παρέχει την έκφραση για την τρίτη παράγωγο που ενσωματώνεται τόσο στην (10.10) όσο και στην (10.6). Επιστρέφοντας στην εξίσωση (10.10), παρατηρούμε δυο μικτές παραγώγους ως προς x και ως προς το χρόνο που πρέπει να χειριστούμε. Παραγωγίζοντας την (10.10) ως προς x παίρνουμε

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3\partial x}=a^2\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+0(\Delta t,\Delta x) \qquad (10.14)$$

Επιπλέον, αναδιοργανώνοντας την (10.14), έχουμε:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\Delta t,\Delta x) \qquad (10.15)$$

Αντικαθιστώντας την (6.50) με την (6.52) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=-a\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta t,\Delta x) \qquad (10.16)$$

Αντικαθιστώντας πάλι την (10.13) την (10.14) και την (10.16) με την (10.10) πετυχαίνουμε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2}\left[a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a^3 \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t, \Delta x)\right] + \frac{\Delta x}{2}\left[-\alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta t, \Delta x)\right] \quad (10.17)$$

Αντικαθιστώντας την (10.17) και την (10.13) με την (10.6) έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \ a \ \frac{\partial u}{\partial x} = - \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{a^2 \ \Delta t}{2} - \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{a^3 (\Delta t)^2}{2} + \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{a^2 (\Delta x)(\Delta t)}{2}$$

$$+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{a^3 (\Delta t)^2}{6} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{a \Delta x}{2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cdot \frac{a (\Delta x)^2}{6} + O[(\Delta t)^3, (\Delta t)^2 \ (\Delta x), (\Delta t)(\Delta x)^2, (\Delta x)^3]$$

(10.18)

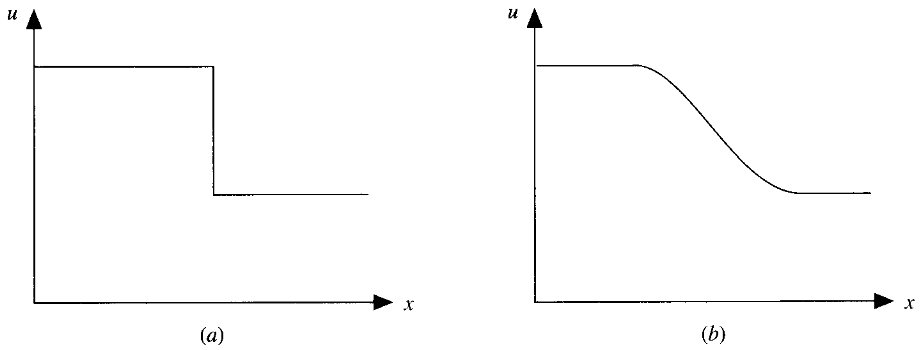
Μια αναδιάταξη της (6.55) μαζί με τον ορισμό του ν σαν $\nu = \alpha \cdot \Delta x / \Delta t$ οδηγεί στην:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \ a \ \frac{\partial u}{\partial x} = \ \frac{a \Delta x}{2} (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a (\Delta x)^2}{6} (3\nu - 2\nu^2 - 1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O[(\Delta t)^3, (\Delta t)^2 \ (\Delta x), (\Delta t)(\Delta x)^2, (\Delta x)^3] \quad (10.19)$$

Σημειώνουμε ότι η (10.19) είναι μια *μερική διαφορική εξίσωση* από μόνη της εμπεριέχοντας τους όρους $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^3 u / \partial x^3$ κλπ. Εν τέλει, έχοντας υπόψη μας την (10.19), είμαστε πλέον έτοιμοι να δώσουμε έμφαση στη διαφορετική αντίληψη που αναφέρθηκε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου. Προηγουμένως, είδαμε μια ακριβή λύση (χωρίς λάθη στρογγύλευσης) της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών (10.2), σαν μια αριθμητική λύση της αρχικής μερικής διαφορικής εξίσωσης (10.1) αλλά με ένα λάθος που προέκυπτε από το σφάλμα αποκοπής. Παρόλα αυτά, υπάρχει και μια άλλη πλευρά στο συγκεκριμένο ζήτημα. Στην πραγματικότητα, η ακριβής λύση (χωρίς λάθη στρογγύλευσης) της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών (10.2), συνιστά μια ακριβή λύση (χωρίς σφάλμα αποκοπής) μιας διαφορετικής μερικής διαφορικής εξίσωσης, της εξίσωσης (10.19). Η (10.19) ονομάζεται *τροποποιημένη εξίσωση*. Για να επαναλάβουμε, όταν η εξίσωση διαφορών, (10.2) χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας αριθμητικής λύσης της αρχικής μερικής διαφορικής εξίσωσης, η εξίσωση (10.1), στην πραγματικότητα αυτή η διαφορά εξίσωσης λύνει μια κάπως διαφορετική μερική διαφορική εξίσωση. Λύνει δηλαδή την (10.19) αντί της (10.1).

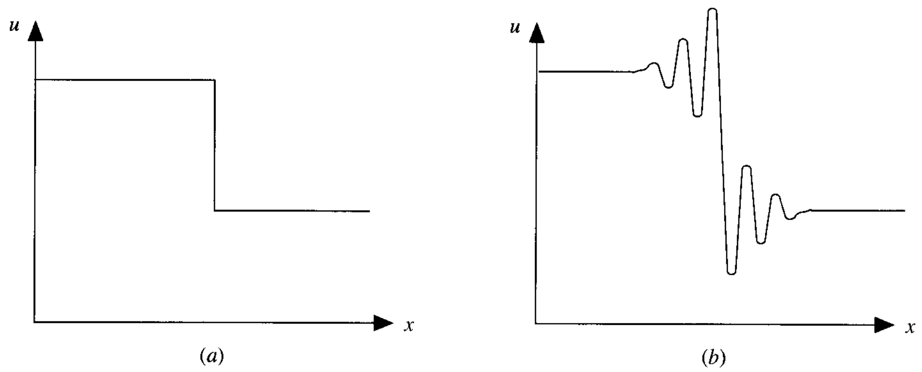
Η παραγώγιση και η παρουσίαση της τροποποιημένης εξίσωσης, όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως, είναι μεγαλύτερης σημασίας από την απλή καθιέρωση μιας διαφορετικής προσέγγισης στη σημασία της ακριβής λύσης μιας εξίσωσης διαφοράς.

Η εξίσωση (10.19) μας δίνει επίσης κάποιες πληροφορίες για την *αναμενόμενη* συμπεριφορά της αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης διαφοράς. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε διεξοδικότερα την εξίσωση (10.19). Στο δεξί μέρος υπάρχει ο όρος $\partial^2 u / \partial x^2$. Για μια στιγμή, βγάλτε όλες τις σκέψεις από το μυαλό σας και απλά φανταστείτε τις εξισώσεις που διέπουν μια ιξώδη ροή, που είναι οι εξισώσεις Navier - Strokes. Αυτές οι εξισώσεις εμπεριέχουν όρους όπως $\partial^2 u / \partial x^2$ πολλαπλασιασμένους με το συντελεστή ιξώδους *μ*. Αυτοί οι όροι αντιπροσωπεύουν τη διάχυση του φυσικού ιξώδους της ροής. Τώρα ας επιστρέψουμε στην εξίσωση (10.19). Ο όρος $\partial^2 u / \partial x^2$ που εμφανίζεται εδώ, συμπεριφέρεται σαν ένας «όρος διάχυσης» πιο πολύ σαν τους ιξώδεις όρους των εξισώσεων Navier – Stokes. Παρόλα αυτά, στην εξίσωση (10.19), αυτός ο όρος είναι σαν συνέπεια της αριθμητικής διακριτοποιήσης που ενσωματώνεται στην εξίσωση διαφορών (10.2) και είναι συνεπώς καθαρά αριθμητικής προελεύσεως χωρίς καμία φυσική σημασία. Για αυτό το λόγο, η εμφάνιση αυτού του όρου (και των συναφών με αυτόν), στο πλαίσιο μιας αριθμητικής επίλυσης, που ονομάζεται αριθμητική διάχυση. Με τη σειρά του, ο συντελεστής σε αυτόν τον όρο, όπως ο $(a \ \Delta x/2)(1 - \nu)$ της εξίσωσης (10.19) συμπεριφέρεται περισσότερο σαν φυσικό ιξώδες και επομένως ονομάζεται *τεχνητό ιξώδες*. Στην Υπολογιστική Ρευστομηχανική (CFD), οι όροι «αριθμητική διάχυση» (numerical dissipation) και «τεχνητό ιξώδες» (artificial viscosity) συχνά χρησιμοποιούνται εναλλακτικά και γενικά υποδηλώνουν τη διάχυτη συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης- μια συμπεριφορά που είναι εκ φύσεως αριθμητική. Για παράδειγμα, η αρχική μερική διαφορική εξίσωση (10.1), με την οποία ξεκινήσαμε αυτή την ενότητα, περιγράφει τη διάδοση ενός κύματος μέσα σε ένα ιδεατό ρευστό προς τη μια κατεύθυνση. Στην πραγματικότητα, αν ξεκινήσουμε τη χρονική στιγμή 0, με ένα ακριβές, ασυνεχές κύμα, όπως σκιαγραφείται στο σχήμα 6.5, τότε κατά τη διάρκεια της πορείας της επίλυσης, η επίδραση της αριθμητικής διάχυσης θα είναι για να απλωθεί αυτό το κύμα με τον ίδιο σχεδόν τρόπο που το πραγματικό φυσικό ιξώδες θα άπλωνε το κύμα. Φυσικά, ο λόγος που το κύμα θα διαδοθεί στην αριθμητική μας επίλυση δεν έχει να κάνει με το φυσικό ιξώδες.



Σχήμα 10.1: Αποτέλεσμα της αριθμητικής διάχυσης. (a) Αρχική συνθήκη κύματος σε χρόνο t=0, (b) Σχήμα του κύματος για χρονικό επίπεδο t>0 όπως προκύπτει από την αριθμητική λύσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης κύματος, καθώς αυτή επηρεάζεται από την αριθμητική διάχυση.

Αντίθετα, σχετίζεται με το γεγονός ότι η ακριβής αριθμητική επίλυση της εξίσωσης διαφοράς (6.2) είναι η λύση της εξίσωσης (10.19) αντί της αρχικής μερικής διαφορικής εξίσωσης που δίνεται από την (10.1) και η (10.19) έχει κάποιους μη μηδενικούς όρους στο δεξί μέρος της που παίζουν τον ρόλο της διάχυσης. Πολλοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται στο CFD εμπεριέχουν αυτή την επίδραση του τεχνητού ιξώδους απλοποιημένα στην διαδικασία τους.
Κάπως συσχετιζόμενο στη προηγούμενη ιδέα, είναι η επίδραση της αριθμητικής διασποράς, η οποία δημιουργεί μια αριθμητική συμπεριφορά διαφορετική από αυτής της αριθμητικής διάλυσης. Η διασπορά οδηγεί σε μια παραμόρφωση της διάδοσης των διαφορετικών φάσεων του κύματος το οποίο εμφανίζεται ως «κυματισμοί» (wiggles) μπροστά και πίσω από το κύμα. Αυτό απεικονίζεται σχηματικά στο σχήμα 6.6.



Σχήμα 10.2: Αποτέλεσμα της αριθμητικής διάχυσης. (a) Αρχική συνθήκη κύματος σε χρόνο t=0, (b) Σχήμα του κύματος για χρονικό επίπεδο t>0 όπως προκύπτει από την αριθμητική λύσης της μερικής διαφορικής εξίσωσης κύματος, καθώς αυτή επηρεάζεται από την αριθμητική διάχυση.

Μια από τις αξίες της απόρροιας και εμφάνισης της τροποποιημένης εξίσωσης που σχετίζεται με τη δοσμένη εξίσωση πεπερασμένων διαφορών, είναι ότι η συγγενής συμπεριφορά της διάδοσης και της διασποράς, μπορεί να αξιολογηθεί. Η αριθμητική διάλυση είναι το άμεσο αποτέλεσμα ακόμα-τάξεων παραγώγων στη δεξιά πλευρά της τροποποιημένης εξίσωσης $(\partial^2 u/\partial x^2, \partial^4 u/\partial x^4\ \kappa\tau\lambda)$ και της αριθμητικής διασποράς είναι το άμεσο αποτέλεσμα των περιττών-τάξεως παραγώγων $(\partial^3 u/\partial x^3\ \kappa\tau\lambda)$. Από τη στιγμή που η δεξιά πλευρά της τροποποιημένης εξίσωσης είναι το σφάλμα αποκοπής μπορούμε να υποστηρίξουμε πως, γενικά, όταν ο βασικός όρος του σφάλματος αποκοπής είναι μία παράγωγος ζυγής τάξης, τότε η αριθμητική λύση θα εμφανίζει ιξώδη συμπεριφορά όπως στο σχήμα 10.1 και όταν ο βασικός όρος είναι μία περιττής-τάξης παράγωγος, τότε θα εμφανίζει κυρίως συμπεριφορά διασποράς, όπως στο σχήμα 10.2.

Ερχόμαστε τώρα στο τελευταίο θέμα αυτής της συζήτησης σε αυτήν την ενότητα. Έχουμε αποδείξει ότι το τεχνητό ιξώδες μπορεί να εμφανιστεί μέσα σε ένα δοσμένο αλγόριθμο, απλά λόγω της μορφής της τροποποιημένης εξίσωσης –τότε λέμε ότι το τεχνητό ιξώδες εμφανίζεται έμμεσα στη διαφορική εξίσωση. Αν και το τεχνητό ιξώδες θέτει σε κίνδυνο την ακρίβεια της λύσης (κάτι που είναι αρνητικό), πάντα εξυπηρετεί στο να βελτιώσουμε την ευστάθεια της λύσης (κάτι που είναι θετικό). Όντως για πολλές εφαρμογές στο CFD, η λύση δεν έχει αρκετό τεχνητό ιξώδες έμμεσα προστιθέμενο στον αλγόριθμο, και η λύση θα καταλήξει ασταθής, εκτός αν προστεθεί άμεσα περισσότερο τεχνητό ιξώδες στους υπολογισμούς. Αυτό εγείρει ένα από τα πιο πολυσύνθετα ζητήματα του CFD. Καθώς σκοπίμως προστεθεί με άμεσο τρόπο περισσότερο τεχνητό ιξώδες, αυξάνεται την πιθανότητα να γίνει η λύση λιγότερο ακριβής. Από την άλλη πλευρά, προσθέτοντας αυτό το τεχνικό ιξώδης είστε τουλάχιστον ικανοί να επιτύχετε μια σταθερή λύση, ενώ χωρίς αυτό, σε κάποιες περιπτώσεις δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί καμία λύση. (προβλήματα ροής, με πολύ ισχυρές ασυνέχειες, όπως τα κρουστικά κύματα, «συλλαμβάνονται» κατά τη ροή, χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση shock capturing, είναι κυρίως ευαίσθητα και συνήθως επιζητούν άμεση προσθήκη τεχνητού ιξώδες για μια σταθερή και στρωτή λύση. Είναι οποιαδήποτε λύση, ασχέτως με το πόσο ανακριβής είναι, καλύτερη από καμία λύση καθόλου; Η απάντηση σε αυτήν την ερώτηση για οποιοδήποτε δοσμένο πρόβλημα, είναι θέμα καταστάσεων και κρίσεων. Είναι άποψη του συγγραφέα, στηριζόμενη από τη συλλογική εμπειρία της κοινότητας του CFD, ότι στις εφαρμογές όπου η χρήση του τεχνητού ιξώδους, είναι απαραίτητη, η συνετής χρήση αυτής της ποσότητας, έχει οδηγήσει στο μεγαλύτερο μέρος, σε λογικές και μερικές φορές πολύ ακριβείς αριθμητικές λύσεις. Παρόλα αυτά, πρέπει κανείς να γνωρίζει τη φυσική του προβλήματος που θέλει να υπολογίσει έτσι ώστε να μπορεί να κρίνει τη ποιότητα και την αξιοπιστία της αποκτώμενης αριθμητικής λύσης.

10.2 Τεχνητή διάχυση για σχήματα κεντρικών διαφορών για τις εξισώσεις Euler

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω αρχές τεχνητής διάχυσης στο σύστημα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων Euler, έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathrm{F}} = \vec{D}$$

όπου ο όρος $\vec{D}$ που εμφανίζεται στο δεξί μέρος των εξισώσεων αποτελεί τον όρο τεχνητής διάχυσης (ή τεχνητού ιξώδους). Ο όρος αυτός δεν έχει καμία φυσική σημασία, αλλά η μόνη χρησιμότητα του είναι να αποσβαίνει τις αριθμητικές ταλαντώσεις κοντά σε περιοχές ροϊκών ασυνεχειών και να οδηγεί σε ευστάθεια το αριθμητικό σχήμα που εφαρμόζεται.
Ο πρώτος που εφάρμοσε την αρχή του τεχνητού ιξώδους για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων Euler, ήταν ο Jameson. Το τεχνητό ιξώδες που παρουσιάστηκε από τον Jameson είναι μια μίξη όρων δεύτερου και τέταρτου βαθμού.

Προκειμένου να διατηρήσουμε την συντηρητική ιδιότητα που έχουν οι εξισώσεις Euler, ο όρος τεχνητού ιξώδους παίρνει τη μορφή (σε δύο διαστάσεις χάριν απλότητας):

$$D = D_x + D_y = \left(d_{i+\frac{1}{2},j} - d_{i-\frac{1}{2},j}\right) + \left(d_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \qquad (10.20)$$

όπου

$$d_{i+\frac{1}{2},j} = \varepsilon^{(2)}_{i+1/2j} \cdot \left(U_{i+1,j} - U_{i,j}\right) - \varepsilon^{(4)}_{i+1/2j} \cdot \left(U_{i+2,j} - 3U_{i+1,j} + 3U_{i,j} - U_{i-1,j}\right) \qquad (10.21)$$

με τον ίδιο ορισμό των υπόλοιπων όρων στην (10.20)
Οι συντελεστές δεύτερης και τέταρτης τάξης διαφορών, $\varepsilon^{(2)}$ και $\varepsilon^{(4)}$ αντίστοιχα ορίζονται ως:

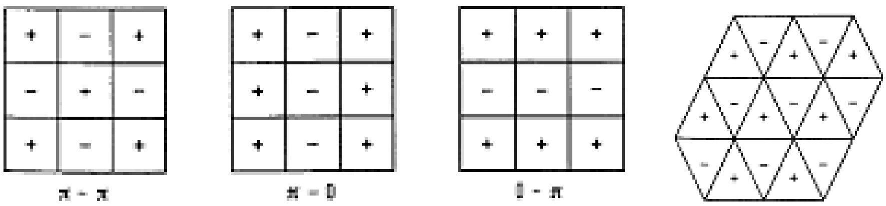
$$\varepsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2}j} = \mathrm{k}^{(2)} \max(\nu_{i+1j}, \nu_{i\,j})$$

$$\varepsilon^{(4)}_{i+1/2j} = \max(0, k^{(4)} - \varepsilon^{(2)}_{i+1/2j}) \tag{10.22}$$

όπου $k^{(2)}$ και $k^{(4)}$ είναι σταθερές και τυπικές τιμές για τις σταθερές αυτές είναι: $k^{(2)}=1/4$, $k^{(4)}=1/256$.
Ως ανιχνευτή ομαλότητας ροής για τον ορισμό του συντελεστή στην (10.21) ο Jameson χρησιμοποιεί

$$\nu_{i,j} = \frac{|p_{i+1j} - 2p_{i\,j} + p_{i-1j}|}{p_{i+1j} + 2p_{i\,j} + p_{i-1j}} \approx \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{(\Delta x)^2}{P_{ref}}$$

Με αυτό τον ορισμό, ο όρος δεύτερου βαθμού είναι σημαντικός μόνο σε περιοχές κρουστικών κυμάτων. Σε περιοχές ομαλής ροής, ο όρος δεύτερης τάξης έχει ένα πολύ μικρό συντελεστή και έτσι ο όρος τέταρτου βαθμού επικρατεί. Ο συντελεστής τέταρτου βαθμού αποτελεί το αποκαλούμενο «*background dissipation*» (διάχυση υπόβαθρου). Για αποτελέσματα όμοιας σταθερότητας, διαχέει τη λύση σε όρους μικρότερους της δεύτερης τάξης. Γι’ αυτό χρησιμοποιείται σε περιοχές ομαλής ροής. Σε περιοχές ροϊκών ασυνεχειών, η διάχυση τέταρτης τάξης πρέπει να απενεργοποιηθεί αφού προκαλεί αριθμητικής φύσης ταλαντώσεις στη λύση και η διάχυση δεύτερης τάξης χρησιμοποιείται για να αποσβεστούν οι ταλαντώσεις αυτές. Γι’ αυτό και η διάχυση δεύτερης τάξης είναι γνωστή σαν «*shock dissipation*» (διάχυση κρούσης).
Σε όρια του πλέγματος που ακουμπούν σε στερεές επιφάνειες, ο όρος διάχυσης (10.20) με κατεύθυνση κάθετη προς το όριο, τείνει να τεθεί ίσος με το με μηδέν. Στον προηγούμενο καθορισμό του όρου διάχυσης (εξ. 10.21, εξ. 10.22) οι αποκαλούμενοι όροι δεύτερης και τέταρτης τάξης αντιστοιχούν σε παραγώγους μόνο σε ομαλό πλέγμα. Παρ’ ολ’αυτά για τον υπολογισμό των εξισώσεων (10.20, 10.21) δεν χρειάζεται αλλαγή πλέγματος όπου οι αποστάσεις Δx και Δy μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων στη x και στη y διεύθυνση δεν είναι σταθερές.
Οι όροι τεχνητής διάχυσης δεν είναι έννοιες οι οποίες μπορούν να προσομοιωθούν με το φυσικό ιξώδες της ροής. Οι όροι αυτοί δεν έχουν ακόμα την ιδιότητα να εξαλείφουν ψευδείς συναρτήσεις, δηλαδή τις μη φυσικές λύσεις του αριθμητικού σχήματος. Το σχήμα 10.3 δείχνει το μοτίβο διαταραχής των ροών και σαν συνέπεια των εξαρτημένων μεταβλητών, μη ανιχνεύσιμο από το κεντρικό τύπο ισορροπημένης ροής για τετράπλευρο και τριγωνικό πλέγμα.

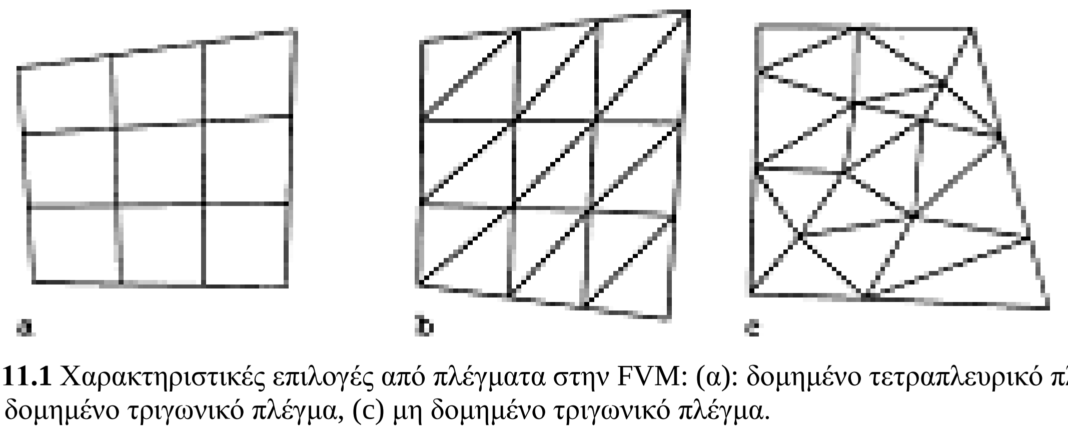


Σχήμα 10.3 Ψευδή μοντέλα για διακριτοποίηση με κεντράρισμα στο κέντρο του κελιού.

11. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΓΚΩΝ

11.1 Εισαγωγή

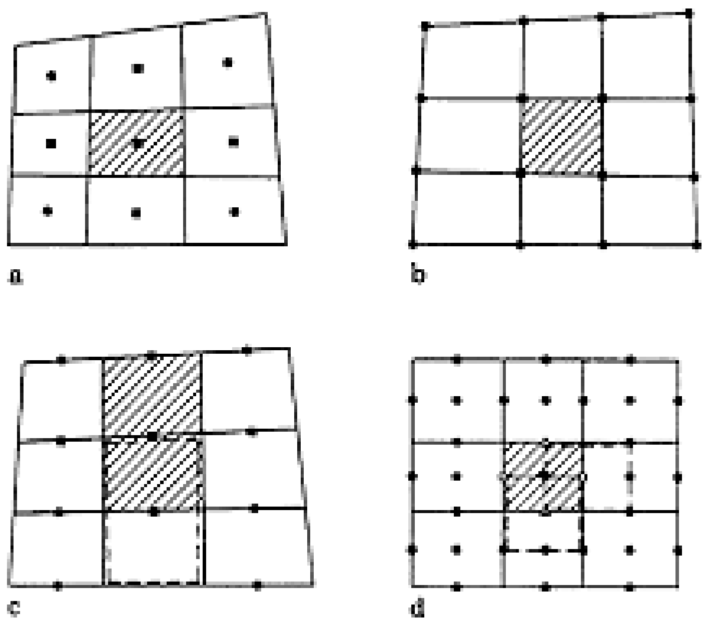
Οι βασικοί νόμοι της Ρευστομηχανικής είναι οι νόμοι διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας (conservative laws), που στο εξής θα τους λέμε συντηρητικούς νόμους, εφαρμόζονται σε ένα κλειστό όγκο ελέγχου Μόνο με την συμπληρωματική απαίτηση επαρκώς ομαλής λύσης μπορούν αυτοί οι νόμοι να μετατραπούν σε μερικές διαφορικές εξισώσεις. Όμως η επαρκής ομαλότητα της ροής δεν είναι πάντα εγγυημένη. Παράδειγμα είναι το κρουστικό κύμα που είναι η πιο κοινή μορφή ασυνεχούς ροϊκού πεδίου. Σε περίπτωση που συμβούν ασυνέχειες, η λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων θα ερμηνευτεί στην απλοποιημένη μορφή (weak form), αυτή είναι η λύση των ολοκληρωτικών μορφών των εξισώσεων. Για παράδειγμα οι νόμοι που διέπουν την ροη μέσα από κρουστικά κύματα, ονομάζονται νόμοι των Hugoniot-Rankine, που είναι συνδυασμός από συντηρητικούς νόμους σε ολοκληρωτική μορφή. Για σωστό υπολογισμό των κρουστικών κυμάτων με τη χρήση αριθμητικής μεθόδου, πρέπει να ακολουθηθούν αυτοί οι νόμοι.
Υπάρχουν και πρόσθετες περιπτώσεις όπου μια ακριβής παρουσίαση των συντηρητικών νομών είναι σημαντική σε μια αριθμητική μέθοδο. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι η γραμμή ολίσθησης (slipstream) που συμβαίνει πίσω από αεροτομή ή πτέρυγα εάν η παραγωγή εντροπίας είναι διαφορετική στις ροές και των δυο πλευρών της αεροτομής, σε αυτή την περίπτωση συμβαίνει μια εφαπτομενική ασυνέχεια. Άλλο παράδειγμα είναι η ασυμπίεστη ροή όπου επιβολή ασυμπιεστότητας σαν συντηρητικός νομός καθορίζει την πίεση του πεδίου.
Στις περιπτώσεις που παραθέτονται παραπάνω, είναι σημαντικό το να εφαρμόζονται με ακρίβεια οι συντηρητικοί νόμοι σε ολοκληρωμένη μορφή. Η πιο φυσική μέθοδος για να το επιτύχουμε αυτό είναι να διακριτοποιήσουμε την ολοκληρωμένη μορφή των εξισώσεων και όχι τη διαφορική μορφή τους. Αυτή είναι η βάση της μεθόδου πεπερασμένων όγκων. Περαιτέρω σε περίπτωση όπου η ισχυρή διατήρηση μάζας, ορμής και ενέργειας δεν είναι απολύτως απαραίτητη στην ολοκληρωμένη μορφή, είναι ακόμα ελκυστικό να χρησιμοποιήσουμε τους βασικούς νόμους στη πρωτογενή μορφή.
Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων εισήχθη στο τομέα της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής από τον McDonald το 1971 και τους McCormack και Paullay το 1972 για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων του Euler στις 2 διαστάσεις και στη συνέχεια οι Rizzi και Inoye το 1973 επέκτειναν τη μέθοδο στις 3 διαστάσεις. Η ονομασία πεπερασμένοι όγκοι δόθηκε επειδή οι εξισώσεις Navier-Stoker ή οι εξισώσεις Euler επιλύονται στην ολοκληρωτική μορφή τους χρησιμοποιώντας τη συντηρητική ιδιότητα των ποσοτήτων που περιλαμβάνονται σε αυτές και διακριτοποιούνται κατευθείαν στο φυσικό πεδίο, δίχως την χρήση μετασχηματισμών.
Το πεδίο ροής υποδιαιρείται, όπως στην μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, σε καθορισμένα μη επικαλυπτόμενα κελιά που περιέχουν όλο το πεδίο. Στην μέθοδο πεπερασμένων όγκων (FVM) χρησιμοποιείται ο όρος ***κελί*** αντί του όρου ***στοιχείο*** που χρησιμοποιείται στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Οι συντηρητικοί νόμοι εφαρμόζονται για να καθορίσουν τις μεταβλητές της ροής σε μερικά διακριτά σημεία των κελίων, που λέγονται *κόμβοι*.



Σχήμα 11.1 Χαρακτηριστικές επιλογές από πλέγματα στην FVM: (α): δομημένο τετραπλευρικό πλέγμα, (b) δομημένο τριγωνικό πλέγμα, (c) μη δομημένο τριγωνικό πλέγμα.

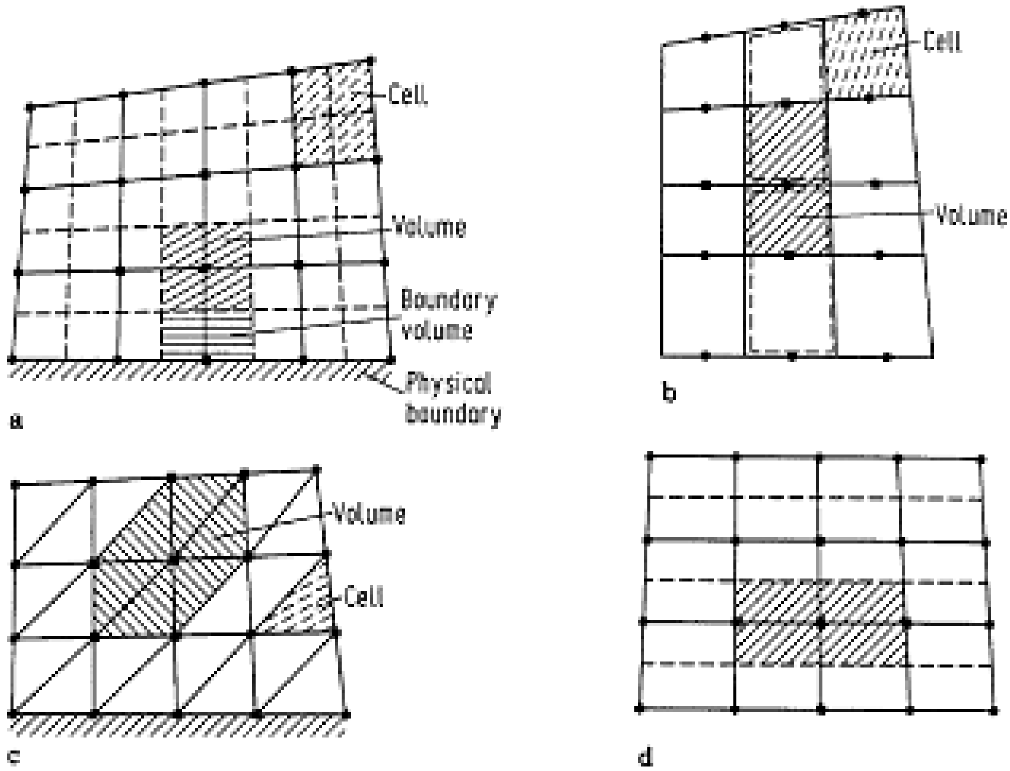
Όπως στην μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM), οι κόμβοι είναι χαρακτηριστικές θέσεις των κελιών, όπως τα κέντρα των κελιών (cell-centers), ή οι κορυφές των κελιών (cell-vertices) ή το μέσο των

πλευρών. Προφανώς υπάρχει μεγάλη ελευθέρια επιλογής κελιών και κόμβων. Τα κελιά μπορούν να είναι τριγωνικά, τετράπλευρα κτλ. Μπορούν να σχηματίσουν δομημένα ή μη δομημένα πλέγματα. Ολόκληρη η γεωμετρική ελευθερία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (FEM) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (FVM). Το σχήμα 11.1 δείχνει μερικά χαρακτηριστικά ειδή πλέγματος.
Η επιλογή των κόμβων μπορεί να επηρεαστεί από την επιθυμία απεικόνισης της λύσης από μία διαδικασία παρεμβολής (interpolation structure), όπως στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Μια τυπική επιλογή είναι τα κέντρα των κελιών (cell-centers) για αναπαράσταση μιας εξαρτημένης συνάρτησης ή οι κορυφές των κελιών (cell-vertices) για αναπαράσταση μιας συνάρτησης αποτελούμενης από ευθύγραμμα τμήματα ή μιας συνάρτησης με δυο μεταβλητές. Ωστόσο στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων (FVM), δεν χρειάζεται να καθοριστεί μία συνάρτηση παρεμβολής σε κάθε όγκο και οι κόμβοι μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να μην υπάρχει συνάρτηση παρεμβολής (interpolation structure). Το σχήμα 11.2 δείχνει μερικές χαρακτηριστικές επιλογές κόμβων που πάνε μαζί με καθορισμένες μεταβλητές .
Οι δυο πρώτες επιλογές είναι συναρτήσεις παρεμβολής (interpolation structures), οι άλλες δυο όχι. Στο τελευταίο παράδειγμα, οι τιμές της συνάρτησης δεν είναι καθορισμένες σε όλους τους κόμβους. Το πλέγμα των κόμβων στο όποιο η πίεση και η πυκνότητα είναι καθορισμένες είναι διαφορετικό από το πλέγμα των κόμβων στα όποια τα στοιχειά της ταχύτητας κατά x και της ταχύτητας κατά y είναι καθορισμένα. Αυτή η προσέγγιση κοινώς λέγεται προσέγγιση μετατοπισμένου πλέγματος (staggered grid approach).
Το τρίτο βασικό συστατικό της μεθόδου είναι επιλογή των **όγκων** στους οποίους θα εφαρμοστούν οι συντηρητικοί νόμοι. Στο σχήμα 11.2 φαίνονται μερικές πιθανές επιλογές όγκου έλεγχου (σκιασμένες).



Σχήμα 11.2 Τυπικές επιλογές κόμβων στην FVM.Οι σημειωμένοι κόμβοι χρησιμοποιούνται στο ισοζύγιο αριθμητικών ροών στους όγκους έλεγχου. (a): Μια σταθερή συνάρτηση για κάθε όγκο, (b): συνάρτηση αποτελούμενη από γραμμική παρεμβολή για κάθε όγκο, (c): δίχως συνάρτηση παρεμβολής με όλες τις μεταβλητές καθορισμένες σε κάθε κόμβο, (d): δίχως συνάρτηση παρεμβολής με όχι όλες τις μεταβλητές καθορισμένες σε κάθε κόμβο (μετατοπισμένο καρτεσιανό πλέγμα).

Στα δυο πρώτα παραδείγματα, ο όγκος έλεγχου συμπίπτει με τα κελιά. Το τρίτο παράδειγμα στο σχήμα 11.2 δείχνει ότι στους όγκους στους οποίους εφαρμόζονται οι συντηρητικοί νόμοι δεν χρειάζεται να συμπίπτουν με τα κελιά του πλέγματος. Οι όγκοι μπορούν να είναι επικαλυπτόμενοι. Το σχήμα 11.3 δείχνει μερικά παραδείγματα από όγκους που δεν ταυτίζονται με τα κελιά, για επικαλυπτόμενες και μη επικαλυπτόμενες περιπτώσεις. Ο όρος ***όγκος*** ορίζει τον ***όγκο έλεγχου*** όπου εφαρμόζονται οι συντηρητικοί νόμοι (αυτό είναι σχετικό με τη συνάρτηση για τον καθορισμό μια τιμής), ενώ ο ορός *κελί* καθορίζει ένα *βρόγχο του πλέγματος* (αυτό είναι σχετικό με τη γεωμετρία της διακριτοποίησης). Μια απαραίτητη προϋπόθεση για τα κελιά είναι ότι δεν είναι επικαλυπτόμενα και ότι καλύπτουν όλο το πλέγμα. Για τους όγκους η προϋπόθεση αυτή είναι λιγότερο περιορισμένη. Οι όγκοι αυτοί μπορούν να είναι επικαλυπτόμενοι σχηματίζοντας έτσι μια οικογένεια όγκων. Κάθε οικογένεια πρέπει να αποτελείται από μη επικαλυπτόμενους όγκους που καλύπτουν όλο τον όγκο ελέγχου του πλέγματος. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι ότι όταν ένας όγκος αφήνει ένα κενό στη ροή τότε ένας άλλος όγκος τον συμπληρώνει. Προφανώς, από την αποσύζευξη των όγκων και των κελιών, η ελευθερία καθορισμού της συνάρτησης στο τρόπο χρήσης της στο ροϊκό πεδίο στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων γίνεται πολύ μεγαλύτερη από ότι στις άλλες, τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και τη μέθοδο πεπερασμένων διαφόρων. Έχει να κάνει με το είδος της ροής του προβλήματος για να επιτύχουμε τον πιο φυσικό τρόπο διακριτοποίησης, με την γεωμετρική ευελιξία στην επιλογή του πλέγματος και την ευελιξία στον καθορισμό των χωριστών μεταβλητών στη ροή που κάνει την μέθοδο πεπερασμένων όγκων ελκυστική στις μηχανολογικές εφαρμογές.



Σχήμα 11.3 Επιλογές όγκων που δεν ταυτίζονται με τα κελιά, για περιπτώσεις με επικάλυψη και δίχως επικάλυψη. (a) μετατοπισμένοι όγκοι σχετικά με τα κελιά, δίχως επικάλυψη, (b): μη μετατοπισμένοι όγκοι σχετικά με τα κελιά, με επικάλυψη, (c): μη μετατοπισμένοι όγκοι σχετικά με τα κελιά, με επικάλυψη, (d): μετατοπισμένοι όγκοι σχετικά με τα κελιά, με επικάλυψη.

Η μέθοδος πεπερασμένων όγκων (FVM) προσπαθεί να συνδυάσει τα πλεονεκτήματα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, αυτό είναι η γεωμετρική ευελιξία μαζί με τα πλεονεκτήματα της μεθόδου πεπερασμένων διαφόρων (FDM), αυτό είναι η ευελιξία καθορισμού των μεταβλητών του πεδίου ροής (ξεχωριστές τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών και των σχετιζομένων αριθμητικών ροών). Μερικές παραλλαγές είναι κοντά στην πεπερασμένων στοιχείων (για παράδειγμα σχήμα. 11.2a). Άλλες παραλλαγές είναι κοντά στην πεπερασμένων διαφόρων και μπορούν να ερμηνευτούν ως συντηρητικές μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών (για παράδειγμα σχήμα 11.3a).Άλλες πάλι παραλλαγές είναι ενδιάμεσα των ορίων αυτών.

Το μείγμα από FEM-like (μοιάζουν με πεπερασμένα στοιχεία) και FDM-like (μοιάζουν με πεπερασμένες διαφορές) προσεγγίσεις μερικές φορές οδηγούν σε σύγχυση στην ονοματολογία. Μερικοί συγγράφεις με υπόβαθρο σε FEM χρησιμοποιούν τον όρο στοιχείο για το κελί και συχνά χρησιμοποιούν τον όρο κελί για τον όγκο (έλεγχου). Αυστηρά μιλώντας, η έννοια *στοιχείο* είναι διαφορετική από την έννοια *κελί*. Ένα πλέγμα είναι χωρισμένο σε κομμάτια. Ένα κομμάτι έχει σημασία και συνεπάγεται ως κελί εάν και μόνο είναι μια υποδιαίρεση της γεωμετρίας. Εάν ακόμα συνεπάγεται ότι, στη λογική πεπερασμένων στοιχείων (FEM-sense), ορίζεται μια συνάρτηση χώρου, αυτό είναι στοιχείο.

Από τα προηγούμενα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η FVM έχει μόνο πλεονεκτήματα σε σχέση με την FEM και την FDM και έτσι ένας θα μπορούσε να ρωτήσει γιατί όλη η Υπολογιστική Ρευστομηχανική

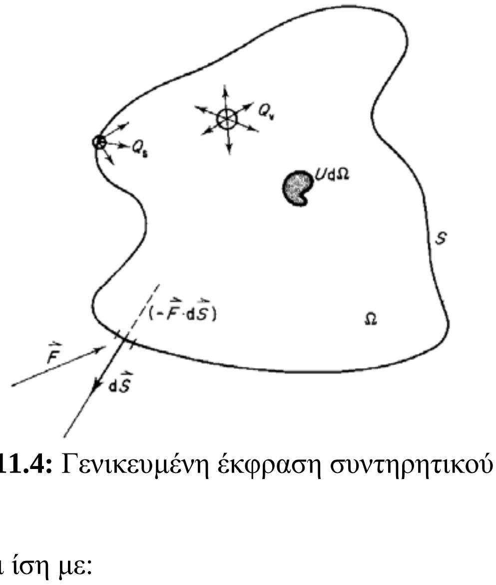
(CFD) δεν έχει βασιστεί πάνω στην FVM. Από τα προηγούμενα είναι ήδη φανερό ότι η FVM έχει μια δυσκολία στον ορισμό των παραγώγων. Αφού το υπολογιστικό πλέγμα δεν είναι αναγκαίο να είναι ορθογωνικό με ισαπέχοντα σημεία, όπως στην Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών (FDM), ο ορισμός των παραγώγων βασισμένος πάνω στο ανάπτυγμα Taylor είναι αδύνατος. Επίσης, δεν υπάρχει μηχανισμός όπως στην FEM,να μετατρέπουν μεγαλύτερης τάξης παραγωγούς σε μικρότερης. Συνεπώς, η FVM είναι καλύτερη για προβλήματα ροής σε πρωτογενής μεταβλητές, όπου όρος της τριβής (ιξώδους) λείπει (εξισώσεις του Euler) ή που ο όρος αυτός δεν είναι κυρίαρχος (υψηλός αριθμός Reynolds εξισώσεις Navier-Stokes). Περαιτέρω, η FVM έχει δυσκολία να επιτύχει υψηλής τάξης ακρίβεια. Κελιά με κυρτά όρια, όπως χρησιμοποιούνται στη FEM, ή κυρτές γραμμές πλέγματος, όπως χρησιμοποιούνται στη FDM, είναι δύσκολο να εφαρμοστούν. Στη περισσότερες μεθόδους, τα όρια των κελιών είναι ευθείες και οι γραμμές του πλέγματος είναι τμηματικά ευθείες. Παρουσίαση τιμών συναρτήσεων ή ροών καλυτέρα από τμηματικά σταθερές ή τμηματικά γραμμικές είναι δυνατόν αλλά είναι πολύ πολύπλοκο. Οι περισσότερες FVM μέθοδοι είναι μόνο δεύτερης τάξης ακριβείς. Για πολλές μηχανολογικές εφαρμογές, αυτή η ακρίβεια είναι αρκετή. Η ανάπτυξη μεθόδων πεπερασμένων όγκων με καλύτερη ακρίβεια αυτές τις μέρες είναι μια περιοχή με πολύ ενεργή έρευνα και δεν υπάρχει ακόμα κάποια ξεκάθαρη διόραση πώς να επιτύχουμε καλύτερη ακρίβεια με αποδοτικό τρόπο. Επομένως, στην συνεχεία εστιάζουμε στις εξισώσεις Euler. Έτσι, για επεξήγηση των βασικών αλγόριθμων, αποφεύγουμε την συζήτηση για προσδιορισμό των παραγώγων. Περαιτέρω εμείς συζητάμε μόνο για κλασικούς αλγόριθμους με δεύτερης-τάξης ακρίβεια ως προς το χώρο. Για απλότητα δεν συζητάμε για έμμεσα σχήματα (implicit schemes), αφού η επιλογή ανάμεσα σε έμμεσα σχήματα και άμεσα σχήματα δεν είναι συνδεδεμένα με τη χωρική διακριτοποίηση. Αυτό το εισαγωγικό κείμενο δεν έχει στόχο να δώσει μια ολόκληρη επισκόπηση της FVM. Μόνο σκοπό έχει να απεικονίσει μερικές βασικές ιδιότητες πάνω σε παραδείγματα στις μεθόδους που χρησιμοποιούνται ευρέως.

11.2 Γενικευμένη μορφή εξισώσεων διατήρησης μάζας, ορμής, ενέργειας

Η μεταβολή μάζας, ορμής, ενέργειας στη μονάδα του χρόνου μίας ποσότητας που διατηρείται σταθερή (και ονομάζεται συντηρητική ποσότητα) εντός στοιχειώδους όγκου $d\Omega$ εκφράζεται ως:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} U\, d\Omega$$

όπου $d\,\Omega$ ο στοιχειώδης όγκος και $\vec{U}$ εκφράζει τη μάζα, ορμή και ενέργεια (σε διανυσματική μορφή).



Σχήμα 11.4: Γενικευμένη έκφραση συντηρητικού νόμου

Η ποσότητα αυτή πρέπει να είναι ίση με:
(α) Τη ροή μάζας, ορμής και ενέργειας διαμέσου της επιφάνειας S που περιβάλλει τον όγκο Ω γράφεται ως:

$$-\oint_{S} \vec{F}\, d\vec{S}$$

όπου το διάνυσμα $d\vec{S}$ έχει φορά προς το εξωτερικό της επιφάνειας *S*, ενώ η ροή μάζας, ορμή και ενέργειας $\vec{F}$ έχει φορά προς το εσωτερικό της επιφάνειας *S*, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.4.

(β) Τη συνεισφορά των πηγών επιφανείας Q_S και των πηγών όγκου Q_V που περικλύονται από τον όγκο *V*. Αυτές είναι:

$$\int_{\Omega} Q_V\, d\Omega + \int_{\Omega} \vec{Q}_S d\Omega$$

Έτσι ο νόμος διατήρησης της μάζας, ορμής, ενέργειας μπορεί να γραφεί σε ολοκληρωτική μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} U \cdot d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V\, d\Omega + \int_{\Omega} \vec{Q}_S d\Omega \qquad (11.1)$$

Η τελευταία εξίσωση οδηγεί στη διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης, διότι για οποιονδήποτε όγκο *Ω* μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S$$

Ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό του νόμου διατήρησης είναι ότι οι εσωτερικές μεταβολές του *U*, σε περίπτωση που δεν υπάρχουν πηγές όγκων Q_V, εξαρτώνται μόνον από τη συνεισφορά των ροών διαμέσου του όγκου *V*.

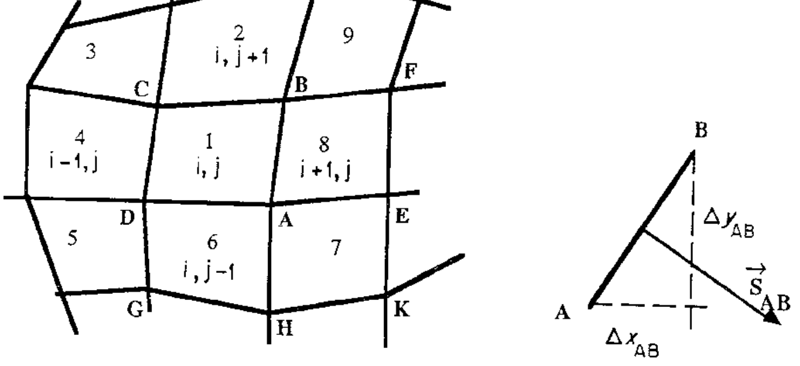
11.3 Εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Όγκων

Εφαρμοζόμενη σε έναν όγκο Ω_j η εξίσωση (11.1) σε διακριτοποιημένη μορφή γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U_j \Omega_j\right) + \sum_{\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}\left(\vec{F} \cdot \vec{S}\right) = Q_j \Omega_j \qquad (11.2)$$

όπου το άθροισμα των όρων των ροών αναφέρεται στις εξωτερικές πλευρές του κελιού έλεγχου Ω_j

Αναφερόμενοι στο κελί 1 με συντεταγμένες *(i,j)* του σχήματος 11.5, τότε οι άγνωστοι U_j στο σημείο με συντεταγμένες *(i,j)* που είναι το κέντρο του κελιού που είναι παράλληλα το σημείο ελέγχου του, γίνονται $U_{i,j}$ και Ω_j είναι η επιφάνεια του ABCD και οι αριθμητικές ροές προστίθενται για τις 4 πλευρές του τετράπλευρου, δηλαδή AB, BC, CD και DA.



Σχήμα 11.5: Διδιάστατο πλέγμα πεπερασμένων όγκων

Στη περίπτωση που δεν υπάρχουν οι πηγαίοι όροι (source terms) (ή Q_j) τότε για μόνιμες ροές οι πεπερασμένοι όγκοι παίρνουν τη μορφή:

$$\sum_{\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\varepsilon\varsigma} \left(\vec{F}\cdot\vec{S}\right)=0$$

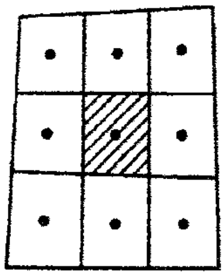
Στην επιφάνεια στερεού σώματος που δεν διαπερνάται από ροή (π.χ. κοντά σε στερεά τοιχώματα στην επιφάνεια σωμάτων), οι πεπερασμένοι όγκοι γίνονται:

$$\vec{F}\cdot d\vec{S}=0$$

για την πλευρά του όγκου που ακουμπά επάνω στο στερεό σώμα.

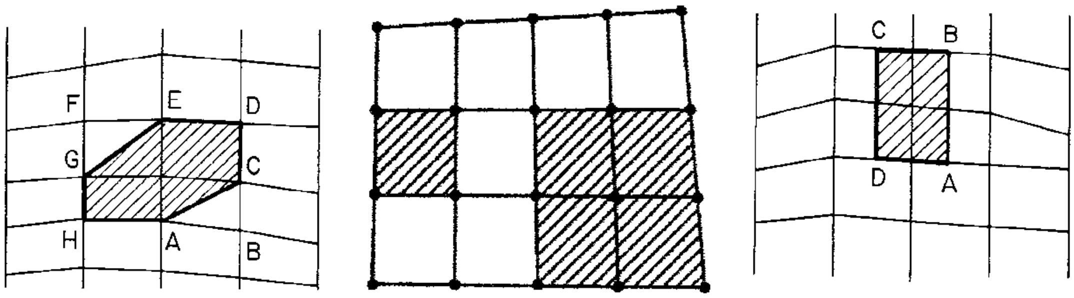
Υπάρχουν δυο είδη στοιχείων πεπερασμένων όγκων σε δομημένα πλέγματα:

i) Τα λεγόμενα *cell centered* όπου οι άγνωστοι υπολογίζονται σε ένα κελί, σχήμα 11.6. Στο κελί αυτό, οι άγνωστοι υπολογίζονται να είναι σταθεροί στον όγκο του κελιού αυτού. Τα λεγόμενα cell-centered: τα κελιά συμπίπτουν με τον όγκο έλεγχου.



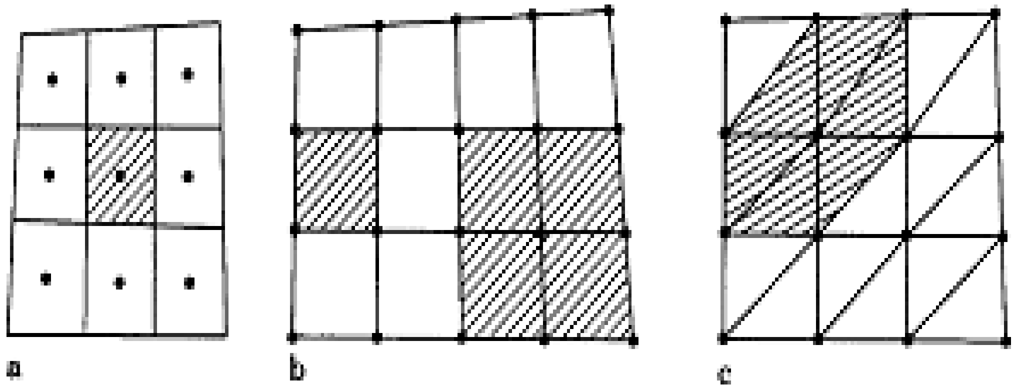
Σχήμα 11.6: Παράδειγμα όγκου cell-centered

ii) Τα λεγόμενα *cell-vertex* στοιχεία για τα οποία οι άγνωστοι υπολογίζονται για τα σημεία του πλέγματος. Στα κελιά τύπου cell-vertex δίνεται μεγαλύτερη ευελιξία για τον καθορισμό του όγκου έλεγχου, σχήμα 11.7.



Σχήμα 11.7: Παράδειγμα όγκων cell-vertex

Οι μέθοδοι πεπερασμένων όγκων που μοιάζουν με πεπερασμένα στοιχεία (FEM-like), χρησιμοποιούν κελιά στα όποια γίνονται παρεμβολές των ροϊκών μεγεθών. Έτσι, τα κελιά σχηματίζουν στοιχεία στην λογική των πεπερασμένων στοιχείων (FEM-sense). Δύο είδη παρεμβολής μπορούν να χρησιμοποιηθούν: τμηματικά σταθερή παρεμβολή (piecewise constant) και τμηματικά γραμμική παρεμβολή (piecewise linear). Το σχήμα 11.8 δείχνει μερικές δυνατότητες τετράπλευρων και τριγωνικών πλεγμάτων. Η τμηματικά σταθερή παρεμβολή φαίνεται από τη μέθοδο κεντρικών κελιών (cell-centered), ενώ η τμηματικά γραμμική παρεμβολή φαίνεται από τη μέθοδο κορυφών κελιών (cell-vertex). Και στις δυο μεθόδους, τα κελιά και μια ομάδα κελιών γύρω από ένα κόμβο χρησιμοποιούνται ως όγκοι. Στη πρώτη μέθοδο τα δεδομένα είναι στο κέντρο των κελιών. Στη δεύτερη μέθοδο, τα δεδομένα είναι στις κορυφές των κελιών.



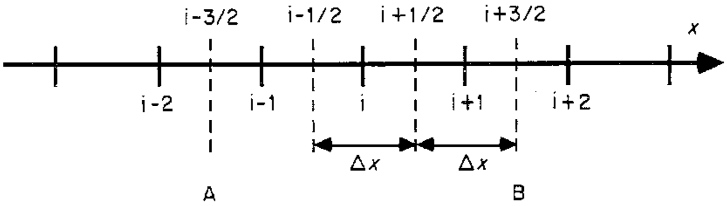
Σχ. 11.8 FEM-like(μοιάζουν) μέθοδοι πεπερασμένων όγκων. (a): cell-centered : (b): cell-vertex με μη επικαλυπτόμενους και επικαλυπτόμενους όγκους σε τετράπλευρα κελιά : (c): cell-vertex σε τριγωνικά κελιά

11.4 Μονοδιάστατη (1-D) μορφή πεπερασμένων όγκων

Για απλοποίηση του προβλήματος ας θεωρήσουμε τη μονοδιάστατη μορφή της εξίσωσης:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=q$$

Θεωρούμε επίσης το πλέγμα ισαπέχοντων σημείων που φαίνεται στο σχήμα 11.9.



Σχήμα 11.9: Μονοδιάστατο πλέγμα ισαπέχοντνων σημείων

Εφαρμόζοντας κεντρικές διαφορές για τη διακριτοποίηση των αριθμητικών ροών στο πιο πάνω πλέγμα, έχουμε για το σημείο *i* :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{f_{i+1/2}}{\Delta x}-\frac{f_{i-1/2}}{\Delta x}=q_i$$

Όμοια για το σημείο *i+1*, έχουμε:

$$\frac{\partial u_{i+1}}{\partial t}+\frac{f_{i+3/2}}{\Delta x}-\frac{f_{i+1/2}}{\Delta x}=q_{i+1}$$

Για το σημείο *i-1*, έχουμε:

$$\frac{\partial u_{i-1}}{\partial t}+\frac{f_{i-1/2}}{\Delta x}-\frac{f_{i-3/2}}{\Delta x}=q_{i-1}$$

Το άθροισμα των τριών εξισώσεων είναι μια συνεπής διακριτοποίηση για το κελί AB$\left(i-{}^{3}/_{2}\,, i+{}^{3}/_{2}\right)$, δηλαδή:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i+u_{i+1}+u_{i-1}}{3}\right)+\frac{f_{i+3/2}-f_{i-3/2}}{3\cdot\Delta x}=\frac{1}{3}\left(q_i+q_{i+1}+q_{i-1}\right)$$

<u>Σημείωση για την διακριτοποιηση εξισώσεων σε συντηρητική μορφή</u>

Η συντηρητική μορφή της Μ.Δ.Ε. είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=q$$

Διακριτοποιώντας την εξίσωση αυτή:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\left(f^*_{i+1/2}-f^*_{i-1/2}\right)}{\Delta x}=q_i$$

όπου η συνάρτηση *f** ονομάζεται αριθμητική ροή και είναι συνάρτηση των τιμών u_i σε *2κ-1* γειτονικά σημεία:

$$f^*_{i+1/2}=f^*\left(u_{i+k},....,u_{i-k+1}\right)$$

Αν η λύση u_i της διακριτοποιημενης εξίσωσης συγκλίνει σε μια συνάρτηση $u(x,t)$ καθώς και τα *Δx* και *Δt* τείνουν προς το μηδέν τότε η $u(x,t)$ ονομάζεται ασθενής λύση (weak solution) της Μ.Δ.Ε.

11.5 Εφαρμογή της Μεθόδου Πεπερασμένων Όγκων σε δύο διαστάσεις

Εμείς εδώ δείχνουμε μερικές μορφές για τις διδιάστατες εξισώσεις του Euler. Το σύνολο των εξισώσεων του συστήματος Euler σε δυο διαστάσεις είναι:

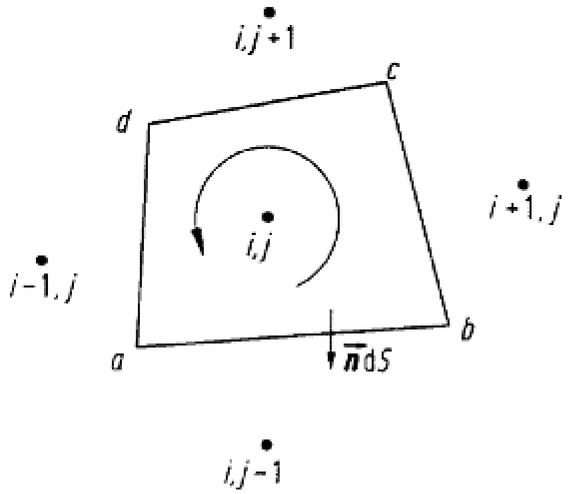
$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho E\end{bmatrix},\quad f=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho Hu\end{bmatrix},\quad g=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho Hv\end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Όπου ρ είναι η πυκνότητα, *u* και *v* είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας, *P* είναι η πίεση, *E* είναι η ολική ενεργεία και *H* είναι η ολική ενθαλπία (*γ* είναι η αδιαβατική σταθερά).

$$E=\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right),\qquad H=E+\frac{p}{\rho}$$

Για ένα κελί όπως φαίνεται στο σχήμα 11.10, οι τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών αποθηκεύονται στο κέντρο του κελιού. Αυτές οι τιμές δεν είναι απαραίτητο να φαίνονται σαν τιμές στους κόμβους, αλλά μπορούν ακόμα να φάνουν ως μέσες τιμές πάνω στο κελί. Επομένως, στη μέθοδο αυτή (cell-centered), για λογούς οπτικής, συχνά, μετά την ολοκλήρωση των υπολογισμών, οι τιμές αποδίδονται στις κορυφές του πλέγματος περνώντας σταθμισμένες μέσες τιμές στα προσκείμενα κελιά. Πρώτα, εμείς είδαμε την τυπική δεύτερης τάξης ακριβής μορφοποίηση.



Σχ. 11.10 Διαμόρφωση cell-centered

Χρησιμοποιώντας τον όγκο έλεγχου του σχήματος 11.10, μια ημιδιακριτοποιήση της (11.3) που λαμβάνεται με

$$\Omega_{i,j}\ \frac{\partial U}{\partial t} + \int_{abcd} \vec{F}\,.\vec{n}\ dS = 0 \qquad (11.4)$$

όπου $\Omega_{i,j}$ ορίζει τον όγκο (ή επιφάνεια σε δύο διαστάσεις) του όγκου έλεγχου. $\vec{F}$ είναι το διάνυσμα ροής: $\vec{F} = f\,\overrightarrow{l_x} + g\,\overrightarrow{l_y}$, dS είναι το στοιχείο επιφάνειας και $\vec{n}$ είναι η κάθετος προς τα έξω. Παίρνοντας το θετικό πρόσημο όπως δείχνει το σχήμα 11.10, έχουμε:

$$\vec{n}\ dS = dy\,\overrightarrow{l_x} - dx\,\overrightarrow{l_y} \qquad (11,5)$$

Βάζοντας την (11.5) μέσα στην (11.4) δίνει

$$\Omega_{i,j}\frac{\partial U}{\partial t} + \int_{abcd}(f\ dy - g\ dx) = 0 \qquad (11.6)$$

Περεταίρω, οι αριθμητικές ροές f και g πρέπει να υπολογιστούν στα όρια του όγκου. Μια μέση τιμή ανάμεσα στους παρακείμενους κόμβους δείχνει να είναι η πιο εύκολη επιλογή, για παράδειγμα:

$$f_{ab} = \frac{1}{2}\left(f_{i,j} + f_{i,j-1}\right), \qquad g_{ab} = \frac{1}{2}\left(g_{i,j} + g_{i,j-1}\right) \qquad (11.7)$$

Αφού οι συναρτήσεις των αριθμητικών ροών είναι μη-γραμμικές συναρτησείς των εξαρτημενών μεταβλητών, μια εναλλακτική έκφραση της εξίσωσης (11.7) είναι

$$f_{ab} = f\left[\frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{i,j-1}\right)\right], \qquad g_{ab} = g\left[\frac{1}{2}\left(U_{i,j} + U_{i,j-1}\right)\right] \qquad (11.8)$$

Με την εξίσωση (11.8) εννοείται ότι στις εξαρτημένες μεταβλητές βρίσκουμε πρώτα τον μέσο όρο και μετά υπολογίζουμε τα διανύσματα των αριθμητικών ροών (fluxes). Αυτή η επιλογή δεν συνιστάται, αφού συνεπάγεται διπλάσιους υπολογισμούς ροϊκών μεγεθών σε σχέση με την εξίσωση (11.7). Πράγματι, όταν σε ένα δομημένο τετράπλευρο πλέγμα, υπάρχουν n_x υποδιαιρέσεις στο διαμήκη άξονα και n_y υποδιαιρέσεις στον κάθετο άξονα, έπειτα υπάρχουν κελία $n_x n_y$, αλλά $n_x(n_y+1)+n_y(n_x+1)$ πλευρές κελίων. Αυτό δεν συνεπάγεται ότι η δουλειά που έγινε στην (11.8) είναι διπλάσια από τη δουλειά που έγινε στην (11.7). Πολύς υπολογιστικός χρόνος και προσπάθεια μπορεί να κερδηθεί παρατηρώντας ότι η ορμή της ροής είναι μια ροή μάζας πολλαπλασιασμένη από μια μέση ταχύτητα, κ.λπ. Παρόλα αυτά, ο ορισμός (11.7) είναι λιγότερο χρονοβόρος. Με τον υπολογισμό των αριθμητικών ροών f και g, η ημιδιακριτοπομένη εξίσωση (11.6) έχει ολοκληρωθεί. Τώρα μένει να γίνει η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο.

11.6 Δισδιάστατη (2-D) μορφή πεπερασμένων όγκων

Η ολοκληρωτική μορφή της Μ.Δ.Ε. για δισδιάστατα προβλήματα γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_{ij}} U\,d\Omega+\oint_{ABCD}\left(f\,dy-g\,dx\right)=\int_{\Omega_{ij}} Q\,d\Omega$$

όπου f, g είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της ροής $\vec{F}$.

Το διάνυσμα $\vec{S}_{AB}$ για την πλευρά AB του τετράπλευρου ABCD του σχήματος 11.5, είναι:

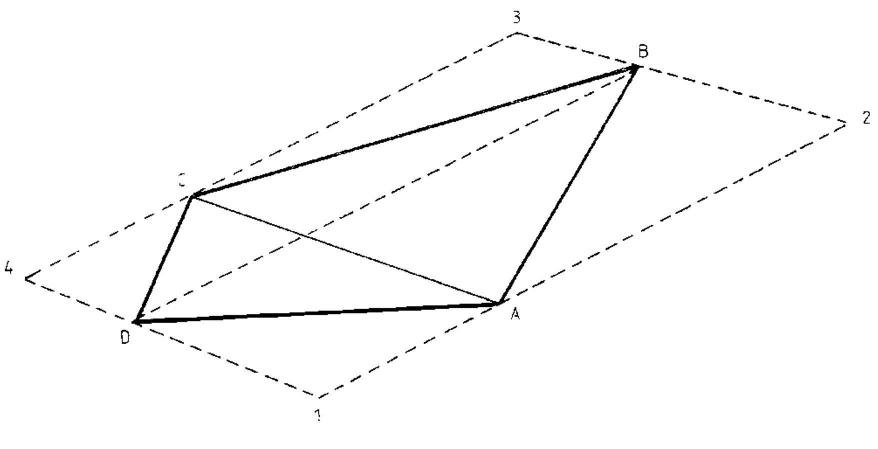
$$\vec{S}_{AB}=\Delta y_{\mathrm{AB}}\vec{i}_x-\Delta x_{\mathrm{AB}}\vec{i}_y=\left(y_B-y_A\right)\vec{i}_x-\left(x_B-x_A\right)\vec{i}_y$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U\cdot\Omega\right)_{ij}+\sum_{ABCD}\left[f_{AB}\left(y_B-y_A\right)-g_{AB}\left(x_B-x_A\right)\right]=\left(Q\cdot\Omega\right)_{ij}$$

όπου το άθροισμα $\sum\limits_{ABCD}$ είναι και για τις 4 πλευρές του ABCD.

Για ένα γενικευμένο τετράπλευρο ABCD που φαίνεται στο σχήμα 11.11, η επιφάνεια Ω είναι :

$$\Omega_{ABCD}=\frac{1}{2}\left|\vec{x}_{AC}\times\vec{x}_{BD}\right|=\frac{1}{2}\left[\left(x_c-x_A\right)\cdot\left(y_D-y_B\right)-\left(y_C-y_A\right)\cdot\left(x_D-x_B\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\Delta x_{\mathrm{AC}}\,\Delta y_{BD}-\Delta x_{\mathrm{BD}}\,\Delta y_{AC}\right)$$



Σχήμα 11.11: Επιφάνεια τυχαίου τετραπλεύρου

11.8 Υπολογισμός αριθμητικών ροών διαμέσου των πλευρών των κελιών

Ο υπολογισμός των συντεταγμένων των ροών f_{AB}, g_{AB} στις πλευρές των τετράπλευρων εξαρτάται από την επιλογή του είδους του όγκου που χρησιμοποιείται,, όπως επίσης και από την επιλογή του αριθμητικού σχήματος που χρησιμοποιείται.
Γενικά για τις εξισώσεις Navier-Stokes και Euler υπάρχουν 2 είδη αριθμητικών σχημάτων: Αυτά των κεντρικών διαφορών και αυτά των προς τα πίσω ή ανάντη (upwind) διαφορών.

11.8.1 Σχήματα κεντρικών διαφορών και πεπερασμένοι όγκοι τύπου cell-centered

Για τα σχήματα αυτά, οι παρακάτω περιπτώσεις μπορούν να υπάρξουν:

i) Μέσος όρος αριθμητικών ροών δύο γειτονικών κελιών:

$$f_{AB} = \frac{1}{2}\left(f_{i,j} + f_{i+1,j} \right)$$

όπου

$$f_{i,j} = f\left(U_{i,j}\right)$$

ii) Οι αριθμητικές ροές υπολογίζονται αφού πρώτα βρούμε τη μέση τιμή των συντηρητικών μεταβλητών από δύο γειτονικά κελιά:

$$f_{AB} = f\left(\frac{U_{i,j} + U_{i+1,j}}{2}\right)$$

iii) Με πιο πεπλεγμένο τρόπο βρίσκοντας το μέσο όρο γειτονικών αριθμητικών ροών ή μεταβλητών:

$$f_{AB} = \frac{1}{2}\left(f_A + f_B \right)$$

όπου

$$U_A = \frac{1}{4}\left(U_{i,j} + U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} + U_{i,j-1}\right)$$

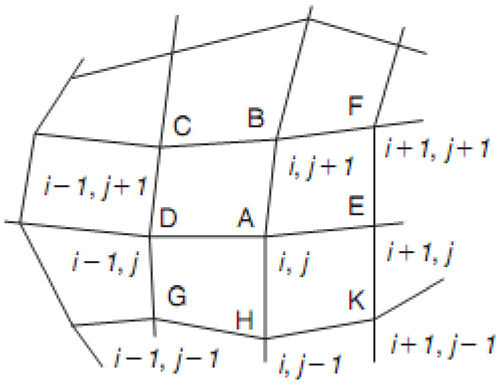
και

$$f_A = f\left(U_A\right)$$

ή

$$f_A = \frac{1}{4}\left(f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} + f_{i,j-1} \right)$$

11.8.2 Σχήματα κεντρικών διαφορών και πεπερασμένοι όγκοι τύπου cell-vertex



Στη περίπτωση αυτή θεωρούμε το κελί ABCD και υπολογίζουμε το άθροισμα των αριθμητικών ροών διαμέσου του κελιού αυτού, που είναι:

$$\oint_{ABCD} \vec{F} d\vec{s} = \frac{1}{2}\left[\left(f_A - f_C \right)\Delta y_{DB} + \left(f_B - f_D \right)\Delta y_{AC} - \left(g_A - g_C\right)\Delta x_{DB} - \left(g_B - g_D\right)\Delta x_{AC} \right] = 0$$

Παράδειγμα:
Εφαρμογή μεθόδου κεντρικών διαφορών σε Καρτεσιανό πλέγμα με ομοιόμορφα *Δx* και *Δy* για όλα τα σημεία.

Έχουμε ότι:

$$\Delta y_{AB} = y_{i+1/2,\,j+1/2} - y_{i+1/2,\,j-1/2} = \Delta y$$

$$\Delta x_{AB} = 0$$

$$\Delta x_{BC} = -\Delta x$$

$$\Omega_{i,\,j} = \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\Delta y_{CB} = 0$$

Θέτοντας $f_{AB} = f_{i+1/2,\,j}$ έχουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{ij} \Delta x \Delta y + \left(f_{i+1/2,\,j} - f_{i-1/2,\,j} \right) \Delta y + \left(g_{i,\,j+1/2} - g_{i,\,j-1/2} \right) \Delta x = Q_{ij} \Delta x \Delta y$$

Διαιρώντας διά $\Delta x \cdot \Delta y$ παίρνουμε ένα σχήμα κεντρικών διαφορών

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{\left(f_{i+1/2,\,j} - f_{i-1/2,\,j} \right)}{\Delta x} + \frac{\left(g_{i,\,j+1/2} - g_{i,\,j-1/2} \right)}{\Delta y} = Q_{i,\,j}$$

πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τις ροές $f_{i\pm1/2,\,j}$ και $g_{i,\,j\pm1/2}$

Υποθέτοντας προσεγγίσεις κεντρικών διαφορών 2ης τάξης έχουμε:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{\left(f_{i+1,\,j} - f_{i-1,\,j} \right)}{2\Delta x} + \frac{\left(g_{i,\,j+1} - g_{i,\,j-1} \right)}{2\Delta y} = Q_{i,\,j}$$

Έτσι η Μ.Δ.Ε. σε διακριτοποιημένη μορφή γράφεται:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{4}\left[2\frac{f_{i+1,\,j} - f_{i-1,\,j}}{2\Delta x} + \frac{f_{i+1,\,j+1} - f_{i-1,\,j+1}}{2\Delta x} + \frac{f_{i+1,\,j-1} - f_{i-1,\,j-1}}{2\Delta x} \right] +$$

$$+\frac{1}{4}\left[2\frac{g_{i,\,j+1} - g_{i,\,j-1}}{2\Delta y} + \frac{g_{i+1,\,j+1} - g_{i+1,\,j+1}}{2\Delta y} + \frac{g_{i-1,\,j+1} - g_{i-1,\,j-1}}{2\Delta y} \right] = Q_{ij}$$

που σημαίνει ότι το σχήμα κεντρικών διαφορών σε ομοιόμορφα καρτεσιανά πλέγματα οδηγεί σε 2ης τάξης ακρίβεια.
Παρατηρούμε επίσης ότι τα $f_{i,j}$, $g_{i,j}$ δεν εμφανίζονται στην εξίσωση:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{\left(f_{i+1,\,j} - f_{i-1,\,j} \right)}{2\Delta x} + \frac{\left(g_{i,\,j+1} - g_{i,\,j-1} \right)}{2\Delta y} = Q_{i,\,j}$$

και ότι αν *(i+j)* είναι ζυγός αριθμός η εξίσωση αυτή περιέχει μόνο κόμβους με *(i+j)* μονό αριθμό. Δηλαδή διαχωρίζονται οι κόμβοι με μονή και ζυγοί αρίθμηση. Αυτός ο διαχωρισμός οδηγεί σε αριθμητικές ταλαντώσεις σε περιοχές κρουστικών κυμάτων η κυμάτων εντροπίας.

11.8.3 Σχήματα ανάντη διαφορών (upwind)

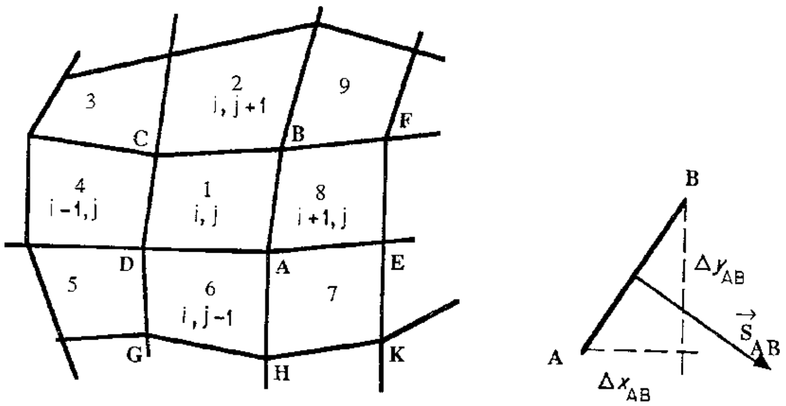
Για σχήματα upwind και τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, η αριθμητική ροή υπολογίζεται σαν συνάρτηση της διεύθυνσης διάδοσης της διαταραχής με την αντίστοιχη ταχύτητα μετάδοσης της διαταραχής, που προσδιορίζεται από την Ιακωβιανή:

$$\vec{A}(U) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = a\overrightarrow{I_x} + b\overrightarrow{I_y}$$

με $$a(U) = \frac{\partial f}{\partial U} \qquad \text{και} \qquad b(U) = \frac{\partial g}{\partial U}$$

Το πιο απλό σχήμα upwind παίρνει τη ροή διαμέσου της πλευράς του κελιού ίση με τη ροή που παράγεται από το ανάντη (upstream) κελί. Αυτό έχει τη φυσική σημασία ότι η εισερχόμενη ροή διαμέσου της πλευράς του κελιού προσδιορίζεται πλήρως από τις πληροφορίες στη διεύθυνση μετάδοσης της διαταραχής.

Θεωρώντας το ακόλουθο σχήμα



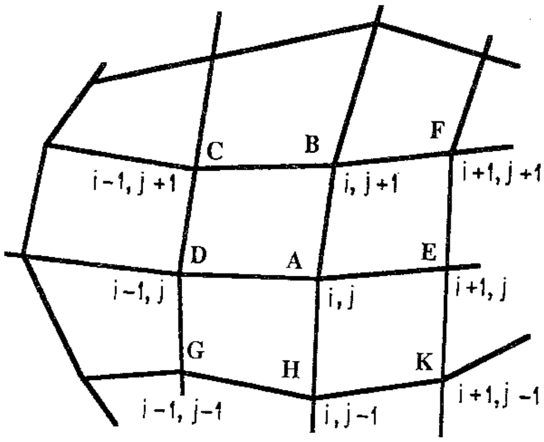
Σχήμα 11.11: Ονοματολογία πλέγματος με κελιά τύπου cell-centered

ορίζουμε:

$(\vec{F}\cdot\vec{S})_{AB} = (\vec{F}\cdot\vec{S})_{ij}$ αν $(\vec{A}\cdot\vec{S})_{AB} > 0$

$(\vec{F}\cdot\vec{S})_{AB} = (\vec{F}\cdot\vec{S})_{i+1,j}$ αν $(\vec{A}\cdot\vec{S})_{AB} < 0$

Για σχήματα προς τα πίσω διαφορών (upwind) και για πεπερασμένους όγκους όπου οι άγνωστοι βρίσκονται στις κορυφές των τετραπλεύρων (cell vertex), σύμφωνα με το πιο κάτω σχήμα, έχουμε:



Σχήμα 11.12: Ονοματολογία πλέγματος με κελιά τύπου cell-vertex

$(\vec{F}\cdot\vec{S})_{AB} = (\vec{F}\cdot\vec{S})_{CD}$ αν $(\vec{A}\cdot\vec{S})_{AB} > 0$

$(\vec{F}\cdot\vec{S})_{AB} = (\vec{F}\cdot\vec{S})_{EF}$ αν $(\vec{A}\cdot\vec{S})_{AB} > 0$

Καθώς εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων στον όγκο ελέγχου GHKEFBCD του παραπάνω σχήματος παίρνουμε υπόψη τις συνεισφορές των σημείων *(i-2, j)* και *(i, j-2)* για θετικές ταχύτητες μεταφοράς των διαταραχών.

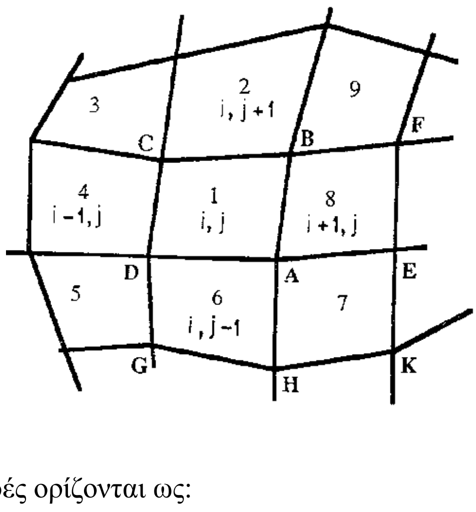
Παράδειγμα: Σχήμα Upwind σε Καρτεσιανό πλέγμα

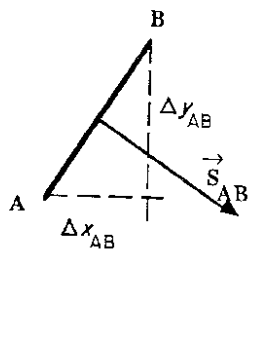
Θεωρούμε τη διακριτοποίηση της διδιάστατης γραμμικής εξίσωσης μεταφοράς

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

με $a, b > 0$

Διακριτοποιώντας την εξίσωση στο κελί ABCD του σχήματος που ακολουθεί και που ορίζεται ως εξής:





Οι αριθμητικές ροές ορίζονται ως:

$$f = \alpha \cdot U$$

και

$$g = b \cdot U$$

και υποθέτοντας ότι τα AB και CD είναι κατακόρυφες πλευρές του ABCD, έχουμε:

$$(\vec{F}\cdot\vec{S})_{AB} = f_{ij}\Delta y = \alpha\cdot U_{ij}\Delta y$$

$$(\vec{F}\cdot\vec{S})_{CD} = -f_{i-1,j}\Delta y = -\alpha\cdot U_{i-1,j}\Delta y$$

Όμοια για τις οριζόντιες πλευρές BC και DA:

$$(\vec{F}\cdot\vec{S})_{BC} = g_{ij}\Delta x = b\cdot U_{ij}\Delta x$$

$$(\vec{F}\cdot\vec{S})_{DA} = -g_{i,j-1}\Delta x = -b\cdot U_{i,j-1}\Delta x$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη Μ.Δ.Ε. και διακριτοποιώντας έτσι ώστε να έχουμε αριθμητικό σχήμα 1ης τάξης ακρίβειας upwind έχουμε:

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x}(f_{i,j} - f_{i-1,j}) + \frac{1}{\Delta y}(g_{i,j} - g_{i,j-1}) = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{a}{\Delta x}(U_{i,j} - U_{i-1,j}) + \frac{b}{\Delta y}(U_{i,j} - U_{i,j-1}) = 0$$

Διδιάστατη εξίσωση διάχυσης

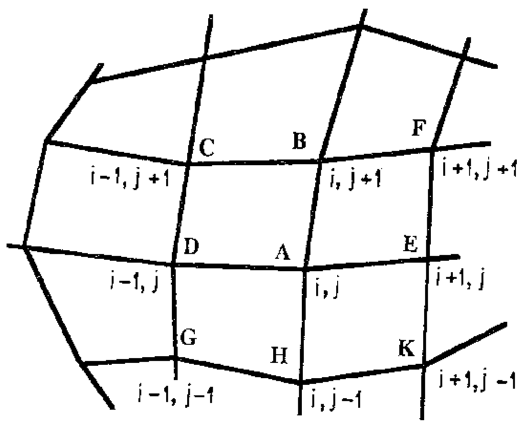
Η γενική μορφή της Μ.Δ.Ε. είναι:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0$$

με συντελεστές των ροών διάχυσης τα $f = k\frac{\partial U}{\partial x}$ και $g = k\frac{\partial U}{\partial y}$

όπου k = σταθερά.

Θέλουμε να δημιουργήσουμε διακριτοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων στο πλέγμα που φαίνεται παρακάτω:



Εκφράζοντας ισοζύγιο ροών γύρω από το κελί ABCD με την επιλογή ότι:

$$f_{AB} = \frac{1}{2}(f_A + f_B)$$

και τον υπολογισμό των παραγώγων $\frac{\partial U}{\partial x}$ και $\frac{\partial U}{\partial y}$ στις γωνίες A,B του κελιού ABCD σύμφωνα με την εξίσωση των πεπερασμένων όγκων:

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \sum_{\mathrm{ABCD}}[\mathrm{f_{AB}}(\mathrm{Y_B} - \mathrm{Y_A}) - \mathrm{g_{AB}}(\mathrm{X_B} - \mathrm{X_A})] = 0 \ \rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j} \Delta x \Delta y_x + (f_{AB} - f_{CD})\Delta y + (g_{BC} - g_{DA})\Delta x = 0$$

Για το σημείο A οι παράγωγοι του U λαμβάνονται σαν η μέση τιμή γύρω από το κελί 1678:

$$f_A = k\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\right)_{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{k}}{2\Delta x}\left(\mathrm{U_{i+1,j}} + \mathrm{U_{i+1,j+1}} - \mathrm{U_{i,j}} - \mathrm{U_{i,j-1}}\right)$$

$$f_B = k\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\right)_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{k}}{2\Delta x}\left(\mathrm{U_{i+1,j}} + \mathrm{U_{i+1,j+1}} - \mathrm{U_{i,j}} - \mathrm{U_{i,j-1}}\right)$$

και η συνεισφορά της ροής διαμέσου της πλευράς AB δίνεται από το άθροισμα:

$$\Delta x \cdot f_{AB} = \frac{1}{2}(\mathrm{f_A} + \mathrm{f_B}) \cdot \Delta y$$

Παρόμοια για τη πλευρά BC:

$$\Delta y \cdot g_{AB} = \frac{1}{2}(\mathrm{g_A} + \mathrm{g_B}) \cdot \Delta x$$

όπου:

$$\mathrm{g_B} = \mathrm{k}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}\right)_{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{k}}{2\Delta y}(\mathrm{U_{i+1,j+1}} + \mathrm{U_{i,j+1}} - \mathrm{U_{i,j}} - \mathrm{U_{i+1,j}})$$

$$g_C = k\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_C = \frac{k}{2\Delta y}(U_{i,j+1} + U_{i-1,j+1} - U_{i,j} - U_{i-1,j})$$

Υποθέτοντας για απλοποίηση του προβλήματος ότι $\Delta x = \Delta y$, η Μ.Δ.Ε. γίνεται:

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + k\frac{U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1} - 4U_{ij}}{4\Delta x^2} = 0$$

που αντιστοιχεί στη διακριτοποίηση του τελεστή Laplace.

Ας σημειωθεί ότι η εναλλακτική απλούστερη επιλογή:

$$f_{AB} = k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)AB = \frac{k}{\Delta x}(U_{i+1,j} - U_{i,j})$$

αντιστοιχεί στη κλασική διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών της εξίσωσης διάχυσης:

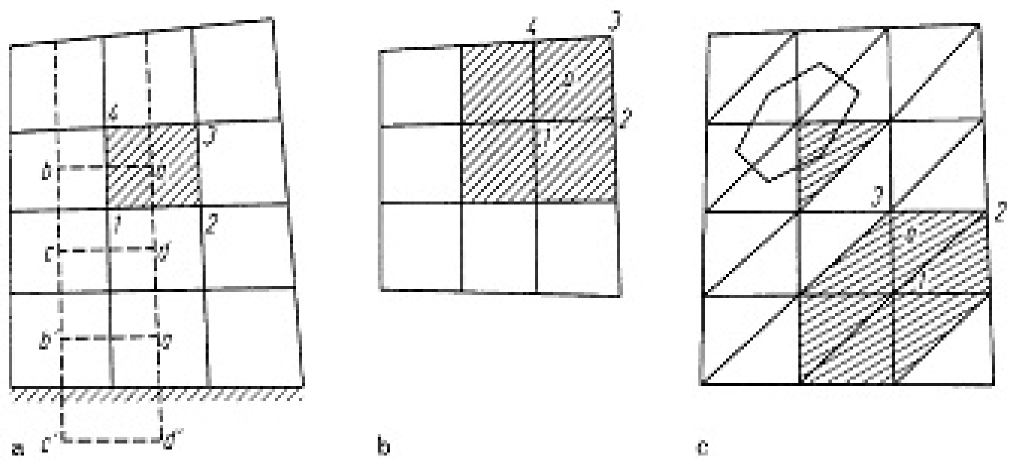
$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} - 4U_{ij}}{\Delta x^2} = 0$$

11.9 Μορφοποίηση στις Κορυφές των Κελιών (cell-vertex)

Στη μορφοποίηση στις κορυφές των κελιών, οι μεταβλητές αποθηκεύονται στις κορυφές του πλέγματος. Οι όγκοι ελέγχου, είτε συμπίπτουν με κελιά (περίπτωση μη επικάλυψης) ή αποτελούνται από μια ομάδα κελιών γύρω από έναν κόμβο (περίπτωση επικάλυψης). Το σχήμα 11.11 δείχνει μερικές πιθανότητες. Σε όλες τις περιπτώσεις, μια γραμμική παρεμβολή των ροών είναι πλέον δυνατή. Ως εκ τούτου, οι μορφοποιήσεις στις κορυφές των κελιών έχουν την δυνατότητα δεύτερης τάξης ακρίβειας στον χώρο, ανεξάρτητα από την ασυμετρία του πλέγματος.

11.9.1 Ολοκλήρωση ως προς τον Χρόνο Πολλαπλών Επιπέδων – Επικαλυπτόμενοι Όγκοι Ελέγχου

Για τις περιπτώσεις επικάλυψης, οι μέθοδοι που συζητήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες μπορούν να προσαρμοστούν άμεσα. Πολύ δημοφιλής στις μέρες μας είναι μορφοποίηση σχημάτων με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο με πολλαπλά ενδιάμεσα βήματα (multistep time stepping).

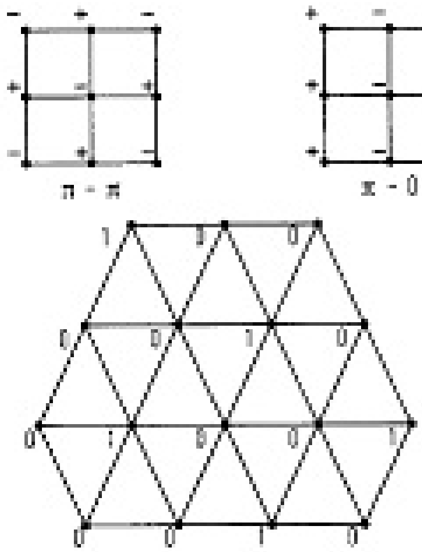


Σχήμα 11.11 Μορφοποίηση στις κορυφές των κελιών. (a): τετράπλευρα κελιά, μη-επικαλυπτόμενων όγκων (με εσωτερικό-κυματοειδής πλέγμα), (b): τετράπλευρα κελιά, επικαλυπτόμενων όγκων, (c): τριγωνικά κελιά, επικαλυπτόμενων και μη-επικαλυπτόμενων όγκων

Στα επιφάνειες στερεών σωμάτων, χρησιμοποιούνται μισοί όγκοι. Το γεγονός ότι το ρευστό δε μπορεί να διαπεράσει στερεές επιφάνειες (impermeability) μπορεί να εκφραστεί θέτοντας τις μεταφερόμενες ροές στο μηδέν. Μια άλλη προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε τον όγκο ελέγχου διαπερατό και να επιβάλλουμε σημείο επαφής. Αυτό σημαίνει ότι, μεταξύ των βημάτων, η κάθετη στην επιφάνεια συνιστώσα της ταχύτητας τίθεται ίση με το μηδέν.

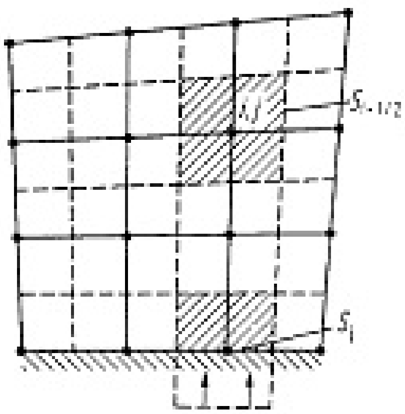
Προκειμένου να γίνει ευσταθές το αριθμητικό σχήμα, κάποια μορφή τεχνητού ιξώδους είναι απαραίτητη. Το τεχνητό ιξώδες είναι επίσης απαραίτητο για να εξαλειφθούν οι ψευδείς κόμβοι (spurious nodes) στη λύση.

Το σχήμα 11.12 δείχνει τις ψευδείς καταστάσεις που είναι πιθανές για τετράπλευρα και τρίγωνα πλέγματα.



Σχήμα 11.12 Ψευδείς καταστάσεις στις κορυφές κελιών κεντρικής διακριτοποίησης

Όπως και στη βασική μέθοδο του Jameson, σαν τεχνητό ιξώδες μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας συνδυασμός όρων δεύτερης και τέταρτης τάξης εξομάλυνσης (smoothing). Συχνά, χρησιμοποιείται ο ιξώδης (dissipative) χειρισμός της μεθόδου κεντροποιημένων κελιών (cell-centered).. Η μέθοδος χάνει τότε τον καθαρό χαρακτήρα της των κορυφών κελιών (cell-vertex). Τα αποτελέσματα ισοζύγιων των όρων μεταφοράς και των όρων διάχυσης είναι στη συνέχεια το ισοζύγιο σε έναν όγκο ελέγχου επικεντρωμένο γύρω από μια κορυφή, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.13.



Σχήμα 11.13 Κορυφές βασισμένες στη μέθοδο πεπερασμένων όγκων (FVM)

Ένας τέτοιος όγκος ελέγχου ονομάζεται *διπλός όγκος ελέγχου*. Το ισοζύγιο ροών καθαρής μεταφοράς (άτριβες ροές, inviscid) πάνω από το διπλό όγκο ελέγχου μπορεί να οριστεί ως το ένα τέταρτο του ισοζυγίου ροών πάνω από τον όγκο που σχηματίζεται από τέσσερα γειτονικά κελιά. Αυστηρά, η μέθοδος γίνεται τότε μια κεντρικής κορυφής (cell-vertex).
Μια καθαρά μέθοδος κορυφών κελιών μπορεί να επιτευχθεί με την αλλαγή της κατασκευής των όρων τεχνητής διάχυσης. Η ίδια μεθοδολογία όπως για την μέθοδο κεντροποιημένων κελιών (cell-centered) που χρησιμοποιείται, αλλά οι προσθέσεις τώρα καταλαμβάνουν τα κελιά που περιβάλλουν έναν κόμβο και όχι να περιβάλλονται οι κόμβοι.
Για παράδειγμα $U_j - U_i$ πρόκειται να αντικατασταθεί από:

$$\frac{U_{j1} + U_{j2}}{2} - U_i$$

ή

$$\frac{U_{j1}+U_{j2}+U_{j3}}{3} - U_i \quad \text{ή} \quad \frac{U_{j1}+U_{j3}}{2} - U_i$$

για τριγωνικά και τετράπλευρα κελιά αντίστοιχα, όπου $j1$, $j2$ και $j3$ υποδηλώνει τους κόμβους που δεν συμπίπτουν με τον κόμβο i των γειτονικών κελιών. Επίσης οι κλιμακωτοί παράγοντες $\sigma_{i,j}$ και οι παράγοντες βαρύτητας του τεχνητού ιξώδους, $\varepsilon_{i,j}^{(2)}$, $\varepsilon_{i,j}^{(4)}$ τώρα εμπεριέχουν μέγιστα σε όλους τους κόμβους ενός κελιού.

Η παραπάνω διαδικασία εξομάλυνσης (smoothing) είναι συντηρητική με την έννοια ότι το περιεχόμενο ενός κελιού δεν έχει αλλάξει από τους όρους τεχνητής διάχυσης. Η επικαιροποίηση των αγνώστων ενός κόμβου προκύπτει από το άθροισμα των εισφορών των γειτονικών κελιών. Η επικαιροποίηση προέρχεται από το ισοζύγιο ροών μεταφοράς (άτριβες ροές) για κάθε κελί έχουν τροποποιηθεί από τους όρους διάχυσης. Η τροποποίηση είναι τέτοια που το ισοζύγιο ροών σε κάθε κελί μπορεί να θεωρηθεί ως κατανεμημένο στις κορυφές του σε έναν άνισο τρόπο, αλλά με ένα σύνολο παραγόντων κατανομής ίσης με το ένα. Έτσι, οι όροι διάχυσης ενεργούν ως αναδιανομέας του ισοζυγίου ροών των κελιών.

Η καθαρή μέθοδος κορυφών κελιών (cell-vertex) δεν χρησιμοποιείται πολύ συχνά. Η καθαρή μέθοδος κορυφών κελιών έχει μια προφανή δυσκολία σε ένα τριγωνικό πλέγμα. Δεδομένου ότι υπάρχουν περίπου διπλάσια κελιά απ'ότι κόμβοι, δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθεί το ισοζύγιο ροής σε κάθε μεμονωμένο κελί και να φτάσει σε σταθερή κατάσταση σε υπολογισμούς μη-μεταβατικών ροών. Ακόμα και σε ένα δομημένο πλέγμα, είναι αρκετά δύσκολη η ικανοποίηση ισοζυγίων ροών σε κάθε μεμονωμένο κελί.

11.10 Μέθοδος των Πεπερασμένων Όγκων που μοιάζει με Πεπερασμένες Διαφορές (FDM like FVM)

Στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (FDM), οι κόμβοι είναι στις κορυφές του πλέγματος. Αυτό είναι ιδιαίτερα ελκυστικό σε σχέση με τα δεδομένα στα όρια του υπολογιστικού πεδίου. Έτσι δεν είναι απαραίτητες παρεκβολές (extrapolations) πίεσης επάνω στα όρια στερεών σωμάτων. Ένα κεντρικό κελί (cell-centered) με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (FVM) είναι λιγότερο ελκυστικό. Ένα κελί κορυφών (cell-verex) με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (FVM) δεν έχει αυτό το μειονέκτημα, αλλά από την άλλη πλευρά, η ροή μέσα από μια επιφάνεια όγκου είναι συνεχής. Αυτό δεν επιτρέπει έναν υπολογισμό ροϊκών πεδίων χρησιμοποιώντας μεθόδους ανάντη (προς τα πίσω) διαφορών.

Μεγαλύτερη ελευθερία στον υπολογισμό αριθμητικών ροών (fluxes), συνδυασμένη με κόμβους στις γωνίες του πλέγματος, μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας συμπλεκόμενο πλέγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.13. Το συμπλεκόμενο πλέγμα μπορεί να κατασκευαστεί με την σύνδεση των κέντρων των κελιών. Τα κελιά αυτής της συμπλοκής πλέγματος μπορούν πλέον να θεωρηθούν ως όγκοι ελέγχου για τους κόμβους στο εσωτερικό τους. Αριθμητικές ροές στις προσόψεις (faces) όγκων μπορούν, για παράδειγμα, να οριστούν ως μέσος όρος των ροών που υπολογίζονται με τις τιμές συναρτήσεων σε διπλανούς κόμβους. Η ημι-διακριτοποίηση είναι τότε πολύ κοντά σε μια πεπερασμένη ημι-διακριτοποίηση και μπορεί να χαρακτηριστεί ως συντηρητική *μέθοδος πεπερασμένων διαφορών* (conservative FDM). Μπορούμε να αποκαλούμε μια μέθοδο πεπερασμένων όγκων (FVM) αυτού του τύπου μια *βάση κορυφών μέθοδος πεπερασμένων όγκων* (vertex-based FVM) ή *μιας κεντρικής κορυφής μέθοδο πεπερασμένων όγκων* (vertex-centered FVM). Η μέθοδος έχει αποκτήσει μεγάλη δημοτικότητα τα τελευταία χρόνια. Η κεντρική τύπου διακριτοποίηση που λαμβάνεται με αυτό είναι η ίδια με την διακριτοποίηση με μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων του Galerkin (Galerkin Finite Element Method-FEM). Έτσι είναι πολύ εύκολο να φέρει κάποιος έννοιες από μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (FEM) σε αυτόν τον τύπο μεθόδου πεπερασμένων όγκων (FVM). Επιπλέον, είναι πολύ εύκολο στη χρήση αλγορίθμων με ανάντη (προς τα πίσω) διαφορές με αυτόν τον τύπο της μέθοδου πεπερασμένων όγκων (FVM).

11.10.1 Διακριτοποιήσεις Κεντρικών Διαφορών

Η προσαρμογή μιας ολοκλήρωσης ως προς το χρόνο με τη μέθοδο Lax-Wendroff ή μιας ολοκλήρωσης ως προς το χρόνο με πολλαπλά ενδιάμεσα βήματα (multistage time-stepping), όπως αναφέρεται για μέθοδο πεπερασμένων όγκων κορυφών κελιού (cell-centred FVM), σε μέθοδο πεπερασμένων όγκων βάση κορυφών (vertex-based FVM) μπορεί να γίνει άμεσα. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται με τις δύο μεθόδους είναι πολύ παρόμοιοι, εκτός από τους υπολογισμούς σε όρια στερεών σωμάτων.

11.10.2 Διακριτοποιήσεις που χρησιμοποιούν ανάντη (προς τα πίσω) διαφορές

Ως ένα παράδειγμα μιας διακριτοποίησης με προς τα πίσω διαφορές αντιμετωπίζουμε εδώ τη τεχνική χωρισμού διαφοράς ροής (flux difference splitting) όπως παρουσιάστηκε από τον Roe [9].

Η ροή μέσα από μια επιφάνεια $(i+{}^{1}/_{2})$ του όγκου ελέγχου στο σχήμα 11.13 μπορεί να γραφτεί ως:

$$F_{i+1/2} = \Delta y_{i+1/2} \cdot f_{i+1/2} - \Delta x_{i+1/2} \cdot g_{i+1/2} \tag{11.31}$$

όπου $f_{i+1/2}$ και $g_{i+1/2}$ πρέπει να ορίζονται με τις τιμές των διανυσμάτων ροής στους κόμβους (i,j) και $(i+1,j)$. Μεταβαίνουμε στην κλασσική παράσταση πεπερασμένων διαφορών με χωρίζοντας τους δείκτες για να δηλώσει ενδιάμεσα σημεία. Επίσης, μη μεταβαλλόμενοι δείκτες δεν είναι γραμμένοι.

Έχουμε δηλώσει μέσω F_i την τιμή του $F_{i+1/2}$ χρησιμοποιόντας τις τιμές συνάρτησης στην $(i+1,j)$. Η ροή (11.31) μπορεί να γραφτεί ως:

$$F_{i+1/2} = \Delta s_{i+1/2} \cdot (n_x \cdot f_{i+1/2} + n_y \cdot g_{i+1/2}) \tag{11.32}$$

με

$$n_x = \frac{\Delta y_{i+1/2}}{\Delta s_{i+1/2}}, \qquad n_y = -\frac{\Delta x_{i+1/2}}{\Delta s_{i+1/2}}, \qquad \Delta s^2_{i+1/2} = \Delta x^2_{i+1/2} + \Delta y^2_{i+1/2}$$

Προκειμένου να καθοριστεί μια αριθμητική ροή με προς τα πίσω διαφορές, θεωρούμε τη διαφορά ροής

$$\Delta F_{i,i+1} = \Delta s_{i+1/2} \cdot (n_x \cdot \Delta f_{i,j+1} + n_y \cdot \Delta g_{i,i+1}) \tag{11.33}$$

όπου

$$\Delta f_{i,j+1} = f_{i+1,j} - f_{i,j}, \qquad \Delta g_{i,i+1} = g_{i+1,j} - g_{i,j}$$

Για την κατασκευή της ροής, είναι απαραίτητο ότι γραμμικός συνδυασμός των παραμέτρων Δf και Δg στη (11.33) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Delta\varphi = n_x \cdot \Delta f + n_y \cdot \Delta g = A \cdot \Delta U \tag{11.34}$$

όπου A είναι ένας Ιακωβιανός πίνακας (Jacobi). Αυτό σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικές και ότι ο πίνακας έχει ένα πλήρες σύνολο από ιδιοτιμές. Φυσικά, για λόγους συνέπειας, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα πρέπει να γίνουν προσεγγίσεις των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του γραμμικού συνδυασμού της αναλυτικής μεθόδου Jacobi. Η κατασκευή του Ιακωβιανού πίνακα A δεν είναι μοναδική και πολλοί τύποι έχουν προταθεί μετά την πρώτη διατύπωση του Roe. Οι αλγεβρικοί χειρισμοί στην κατασκευή του πίνακα A δεν είναι σχετικοί για την κύρια συζήτηση της μεθοδολογίας και δεν περιγράφουν αυτά εδώ.

Ο πίνακας A μπορεί να χωριστεί σε θετικά και αρνητικά μέρη κατά:

$$A^{+} = R \cdot \Lambda^{+} \cdot L, \qquad A^{-} = R \cdot \Lambda^{-} \cdot L \tag{11.35}$$

όπου R και L δηλώνουν τους δεξιά και αριστερά πίνακες ιδιοτιμές σε ορθοκανονική μορφή και όπου:

$$\Lambda^{+} = diag(\lambda_1^{+}, \lambda_2^{+}, \lambda_3^{+}, \lambda_4^{+}), \qquad \Lambda^{-} = diag(\lambda_1^{-}, \lambda_2^{-}, \lambda_3^{-}, \lambda_4^{-})$$

με $\lambda_1^{+} = \max(\lambda_1, 0)\,, \lambda_1^{-} = \min(\lambda_1, 0)$.

Θετικές και αρνητικές πίνακες δηλώνουν πινακες με, αντίστοιχα, μη-αρνητικές και μη-θετικές ιδιοτιμές. Αυτό επιτρέπει τον διαχωρισμό της διαφοράς ροής (11.34) από:

$$\Delta\varphi = A^{+} \cdot \Delta U + A^{-} \cdot \Delta U$$

Κατά συνέπεια η (11.33) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Delta F_{i,j+1} = F_{i+1} - F_i = \Delta s_{i+1/2} \cdot A_{i,i+1} \cdot \Delta U_{i,i+1}$$

όπου ο πίνακας $A_{i,i+1}$ μπορεί να χωριστεί σε θετικά και αρνητικά σημεία.

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς ροής ορίζεται από:

$$\left|\Delta F_{i,j+1}\right| = \Delta s_{i+1/2} \cdot (A_{i,j+1}^{+} - A_{i,j+1}^{-}) \cdot \Delta U_{i,i+1} \tag{11.36}$$

Με βάση την (11.36) ένας προς τα πάνω ορισμός της ροής είναι:

$$F_{i+1/2} = \frac{\left[F_i + F_{i+1} - \left|\Delta F_{i,i+1}\right|\right]}{2} \tag{11.37}$$

Το γεγονός ότι αυτό αντιπροσωπεύει μια προς τα πάνω ροή μπορεί να επαληθευτεί με το γράψιμο της (11.37) με εναν από τους εξής δύο τρόπους, που είναι απολύτως ισοδύναμοι:

$$F_{i+1/2} = F_i + \frac{\Delta F_{i,j+1}}{2} - \frac{\left|\Delta F_{i,j+1}\right|}{2} = F_i + \Delta s_{i+1/2} \cdot A_{i,j+1}^{-} \cdot \Delta U_{i,j+1} \tag{11.38}$$

$$F_{i+1/2} = F_{i+1} - \frac{\Delta F_{i,j+1}}{2} - \frac{\left|\Delta F_{i,j+1}\right|}{2} = F_{i+1} - \Delta s_{i+1/2} \cdot A_{i,j+1}^{+} \cdot \Delta U_{i,j+1} \tag{11.39}$$

Πράγματι, όταν το στοιχείο $A_{i,j+1}$ έχει μόνο θετικές ιδιοτιμές, η αριθμητική ροή $F_{i+1/2}$ θεωρείται ότι είναι F_i και κατά το στοιχείο $A_{i,j+1}$ έχει μόνο αρνητικές ιδιοτιμές, η αριθμητική ροή $F_{i+1/2}$ θεωρείται ότι είναι F_{i+1}.

Οι ροές στις άλλες επιφάνειες του όγκου ελέγχου $S_{i-1/2}, S_{j+1/2}, S_{j-1/2}$ μπορεί να αντιμετοπίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως και η ροή στην επιφάνεια $S_{i+1/2}$. Με (11.38) και (11.39), το ισοζύγιο ροών του όγκου ελέγχου στο σχήμα 11.13 μπορούν να εισαχθούν στη σχέση:

$$\Delta s_{i+1/2} \cdot A_{i,i+1}^{-} \cdot [U_{i+1} - U_i] + \Delta s_{i-1/2} \cdot A_{i,i-1}^{+} \cdot [U_i - U_{i-1}] + \Delta s_{j+1/2} \cdot A_{j,j+1}^{-} \cdot \left[U_{j+1} - U_j\right] + \Delta s_{j-1/2} \cdot A_{j,j-1}^{+} \cdot \left[U_j - U_{j-1}\right] = 0 \tag{11.40}$$

ή

$$C \cdot U_{i,j} = \Delta s_{i-1/2} \cdot A_{i,i-1}^{+} \cdot U_{i-1,j} + \Delta s_{i+1/2} \cdot \left(-A_{i,j+1}^{-}\right) \cdot U_{i+1,j} + \Delta s_{j-1/2} \cdot A_{j,j-1}^{+} \cdot U_{i,j-1} + \Delta s_{j+1/2} \cdot \left(-A_{j,j+1}^{-}\right) \cdot U_{i,j+1} \tag{11.41}$$

όπου C είναι το άρθροισμα των συντελεστών των πινάκων στη δεξιά μεριά της ισότητας.

Οι συντελεστές του πίνακα στη (11.41) έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές. Η θετικότητα των συντελεστών στη δεξιά μεριά της ισότητας της (11.41) και την (αδύναμη) κυριαρχία του κεντρικού συντελεστή εγγυείται ότι η λύση μπορεί να επιτευχθεί με μια ομαδική διαφορά οποιαδήποτε μονόμετρου μεθόδου χαλάρωσης. Με μια ομαδική μεταβλητή σημαίνει ότι σε κάθε κόμβο όλα τα στοιχεία του διανύσματος των εξαρτημένων μεταβλητών U είναι χαλαρές ταυτόχρονα.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τους χειρισμούς στα όρια του πεδίου, θεωρούμε πλέον τη μισή ποσότητα όγκου σε όριο στερεού σώματος όπως φαίνεται στο σχήμα 11.13. Αυτός ο μισός όγκος μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο ενός πλήρους όγκου στον οποίο μια από τις πλευρές έχει τάση προς το όριο.

Η ροή από την πλευρά S_j του όγκου ελέγχου στο στερεό όριο μπορεί να εκφραστεί με:

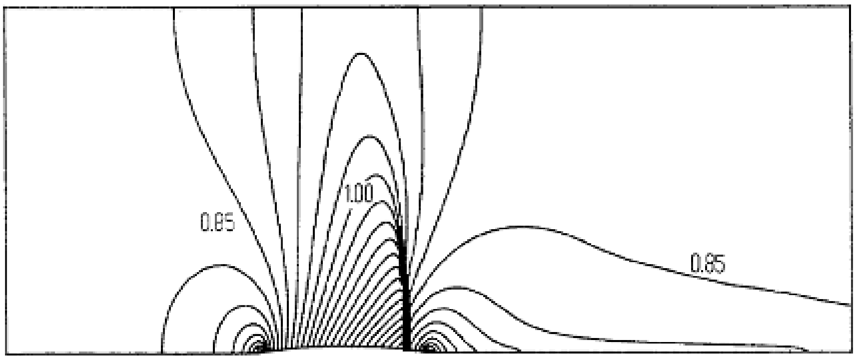
$$F_j - \Delta s_j \cdot A^{+}_{i,j} \cdot (U_j - U_{j-1}) \tag{11.42}$$

όπου ο πίνακας $A_{i,j}$ υπολογίζεται με τις τιμές συνάρτησης στον κόμβο (i, j).

Με τον ορισμό (11.42), το ισοζύγιο ροών με τον όγκο ελέγχου παίρνει τη μορφή (11.40) στην οποία ένας κόμβος εκτός του τομέα εισέρχεται. Αυτός ο κόμβος, ωστόσο, μπορεί να αποκλειστεί.

Είναι εύκολο κάποιος να δει σε ένα όριο στερεού σώματος, τρεις συνδυασμούς του (11.42) που υπάρχουν, αποκλείοντας τον εξωτερικό κόμβο. Οι συνδυασμοί είναι εναπομείναντα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές στο $A^{+}_{i,j}$. Αυτές οι εξισώσεις συμπληρώνονται από την οριακή κατάσταση της επαφής.

Ως επεξήγηση, το σχήμα 11.14 δείχνει τη ανάλυση που επιτυγχάνεται από την προηγούμενη μέθοδο Σύγκριση του αποτελέσματος χρησιμοποιώντας προς τα πίσω διαφορές, με αποτελέσματα κεντρικών διαφορών δείχνει την ανωτερότητα του από πάνω υπολογισμού αναφορικά με την οξύτητα και την ανάλυση υπολογισμού του κρουστικού κύματος.



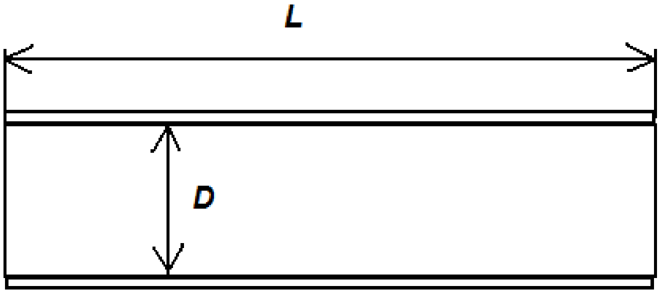
Σχήμα 11.14 Γραμμές σταθερού αριθμού Mach που επιτυγχάνονται με αλγόριθμο προς τα πίσω (upwind) διαφορών βάσει της μεθόδου πεπερασμένων όγκων (vertex-based upwind FVM)

Στα παραπάνω, διακριτοποίηση με προς τα πίσω διαφορές χρησιμοποιείται σε μορφή πρώτης τάξης ακρίβειας. Για πιο περίπλοκες ροές, απαιτείται τουλάχιστον δεύτερης τάξης ακρίβεια.

12. ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΤΡΙΒΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

12.1Εξισώσεις που διέπουν τη ροή

Ο κρουστικός σωλήνας (shock tube) είναι ένας σωλήνας σταθερής δύναμης ο οποίος έχει μήκος L πολύ μεγαλύτερο από την διάμετρο του, D, δηλαδή ισχύει ότι L>>D καθώς φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 12.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά μονοδιάστατης ροής σε κρουστικό σωλήνα

Το ένα άκρο του σωλήνα συνδέεται με δοχείο υψηλής πίεσης και θερμοκρασίας, ενώ το άλλο άκρο με δοχείο χαμηλότερης πίεσης και θερμοκρασίας ή εναλλακτικά τοποθετείται στο άκρο αυτό στερεό τοίχωμα. Η περιοχή της υψηλής πίεσης και θερμοκρασίας διαχωρίζεται από την περιοχή της χαμηλής πίεσης και θερμοκρασίας με μια λεπτή μεμβράνη. Την χρονική στιγμή $t=0$ σπάει η μεμβράνη και το αέριο υψηλής πίεσης περνά στην περιοχή της χαμηλής πίεσης. Έτσι ένα κύμα πίεσης προχωρά προς την πλευρά χαμηλής πίεσης δημιουργώντας ένα κρουστικό κύμα που κινείται προς την μια κατεύθυνση και ένα κύμα εκτόνωσης που κινείται προς την αντίθετη διεύθυνση.
Το ροϊκό πεδίο που προκύπτει κατά την θραύση της μεμβράνης είναι μη μόνιμο (unsteady flow) και εξαρτάται από τον χρόνο (time dependent) διότι το κύμα πίεσης καθώς και το κύμα εκτόνωσης διαρκώς κινούνται (προς αντίθετες κατευθύνσεις) και αλληλεπιδρούν με την πάροδο του χρόνου, μέχρι να υπάρξει τελικά εξομάλυνση της ροής.
Η αριθμητική μελέτη του φαινομένου μπορεί να γίνει επιλύοντας τις εξισώσεις του Euler στη μία διάσταση (δηλαδή κατά μήκος του κρουστικού σωλήνα). Αυτό σημαίνει ότι τα ροϊκά μεγέθη (ταχύτητα, πυκνότητα, πίεση κλπ.) είναι συνάρτηση του χρόνου t και της διάστασης x κατά μήκος του σωλήνα.
Σε διανυσματική μορφή οι εξισώσεις Euler σε μία διάσταση και για σωλήνα σταθερής διατομής, γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho\,\vec{\mathrm{u}})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{\mathrm{u}}\otimes\vec{\mathrm{u}} + p\ \vec{\mathrm{I}}\,) = 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\,(\rho\,\vec{\mathrm{u}}\,H) = 0 \end{aligned}\right\}$$

ή σε ποιό συμπυκνωμένη μορφή :

$$\frac{\partial\vec{\mathrm{u}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{F}} = 0$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν

$$\frac{\partial\vec{\mathrm{u}}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{f}}{\partial x} = 0$$

όπου

$$\vec{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} \qquad\qquad \vec{f} = \begin{bmatrix} \rho\, u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u(E + {}^{P}/_{\rho}) \end{bmatrix}$$

Οι ατριβές ροές (όπως αυτές περιγράφονται από τις εξισώσεις του Euler)μπορούν να περιέχουν ασυνέχειες λόγω της εμφάνισης κρουστικών κυμάτων ή κυμάτων εκτόνωσης. Οι καταστάσεις αυτές της ροής μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας την συντηρητική μορφή των εξισώσεων Euler(που παρουσιάστηκαν παραπάνω).

Οι σχέσεις μεταξύ των δυο περιοχών εκατέρωθεν της ροϊκής ασυνέχειας που κινείται με ταχύτητα $\vec{\mathrm{C}}$ ονομάζονται σχέσεις Rankine-Hugoniot.

12.2 Η ημιγραμμική μορφή των εξισώσεων Euler

Για την μελέτη και διερεύνηση των μαθηματικών ιδιοτήτων του συστήματος των εξισώσεων Euler,είναι αναγκαίο να γραφούμε τις εξισώσεις σε ημιγραμμική μορφή, που είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{\mathrm{F}}}{\partial \vec{\mathrm{u}}}\right) \vec{\nabla}\, \vec{\mathrm{u}} = 0 \qquad ή$$

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial t} + \vec{A}\, \nabla\, \vec{\mathrm{u}} = 0 \qquad ή$$

όπου το A ονομάζεται Ιακωβιανό μητρώο (ή πίνακας)του διανύσματος ροών $\vec{\mathrm{F}}$ και

$$\vec{\mathrm{A}} = \frac{\partial\, \vec{\mathrm{F}}}{\partial\, \vec{\mathrm{u}}}$$

Ο πίνακας A για την περίπτωση των μονοδιάστατων εξισώσεων Euler, είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma)\frac{U^2}{2} & (3-\gamma)u & \gamma - 1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma u E & \gamma E - 3\frac{\gamma-1}{2}u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι στην παραπάνω εξίσωση, το διάνυσμα $\vec{\mathrm{u}}$ παραμένει να είναι αυτό των συντηρητικών μεταβλητών.

Για τον υπολογισμό και την μελέτη των ιδιοτιμών του συστήματος των εξισώσεων Euler,γράφονται οι εξισώσεις σε μη συντηρητική μορφή σαν συνάρτηση των βασικών μεταβλητών $\rho,\ \vec{u}, P$.
Η μορφή αυτή των εξισώσεων είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\mathrm{u}}\vec{\nabla})\rho + \rho(\vec{\nabla}\vec{\mathrm{u}}) = 0$$

$$\frac{\partial\, \vec{\mathrm{u}}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{u}}\vec{\nabla})\vec{\mathrm{u}} + \frac{1}{\rho}\nabla P = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{\mathrm{u}}\vec{\nabla})P + \rho c^2(\vec{\nabla}\vec{\mathrm{u}}) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial\, \vec{\mathrm{u}}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{A}}\, \vec{\nabla})\vec{\mathrm{u}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial t} + \vec{A}\frac{\partial\, \vec{\mathrm{u}}}{\partial x} = 0$$

όπου

$$\vec{\mathrm{u}} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} \quad , \qquad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα $\vec{\mathrm{u}}$ ονομάζεται διάνυσμα βασικών (primitive) μεταβλητών και ο πίνακας A ονομάζεται ιακωβιανή (jacobian) του συστήματος.

12.3 Χαρακτηριστική μορφή των εξισώσεων Euler

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η μη συντηρητική μορφή των εξισώσεων Euler είναι:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{A}\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{x}} = 0$$

Υποθέτουμε ότι το παραπάνω σύστημα των υπερβολικών εξισώσεων θα έχει κυματοειδείς λύσεις της μορφής:

$$U = \widehat{U}\, e^{i(kx-\omega t)} \qquad \text{όπου } i = \sqrt{-1}$$

Η συνάρτηση $\mathrm{S(x,t)} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{x} - \omega \cdot t$ εκφράζει τη φάση της μετάδοσης του κύματος στη διεύθυνση *k* με κυματισμό *ω*.
Κυματοειδείς λύσεις θα υπάρχουν αν οι ιδιοτιμές του πινάκα $K = [A] \cdot \vec{K}$, για κάθε $\vec{K}$, είναι πραγματικοί αριθμοί με γραμμική εξάρτηση των αντίστοιχων αριστερών ιδιοδιανυσμάτων $\vec{l}$.

Αν με λj συμβολίζονται οι ιδιοτιμές του πινάκα K, τότε:

$$\det|\lambda \cdot I - A \cdot K| = 0$$

όπου *det* δηλώνει την ορίζουσα του πίνακα , *I* είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Τα αριστερά ιδιοδιανύσματα $\vec{l}$ είναι διανύσματα σε μορφή γραμμών, δηλαδή $\vec{l} = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]$
και είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\vec{l} \cdot K = \lambda \cdot I \quad \text{ή}$$

$$\vec{l} \cdot (A \cdot K) = \lambda \cdot I$$

Από τη παραπάνω εξίσωση, μπορεί να αποδειχτεί ότι μπορεί να υπάρξει πίνακας L^{-1} που να διαγωνιοποιεί τον πίνακα *K* (δηλαδή που να ορίζεται από την εξίσωση):

$$L^{-1} \cdot K = \Lambda \cdot L^{-1}$$

όπου Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας που ορίζεται ως εξής :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πίνακας Λ μπορεί να υπολογιστεί από:

$$K = L \cdot L^{-1} \Rightarrow \Lambda = L^{-1} \cdot (A \cdot K) \cdot L$$

Τη στιγμή που ο πίνακας *K* δεν είναι συμμετρικός μπορούν να ορισθούν τα δεξιά ιδιοδιανύσματα (right eigenvectors) $\vec{r}$ που συνδέονται και αυτά με ιδιοτιμές λ_j.

Αυτά, είναι ιδιοδιανύσματα σε μορφή στήλης, δηλαδή

$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ και μπορούν να υπολογισθούν από:

$$K \cdot \vec{r} = \lambda_j \, \vec{r}$$

Συγκρίνοντας με τις εξισώσεις των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων, τα δεξιά ιδιοδιανύσματα μπορούν να φτιάξουν ένα πίνακα R ο οποίος να αποτελείται από τα δεξιά ιδιοδιανύσματα ως εξής:

$$K \cdot R = R \cdot \Lambda \Rightarrow K = R \cdot \Lambda \cdot R^{-1}$$

Αυτά τα παραπάνω μπορεί να συμπεράνει κάνεις ότι ο αντίστροφος πίνακας του L^{-1} , είναι ο πίνακας R, δηλαδή

$$R = L$$

Με των πινάκων L^{-1} και L, οι εξισώσεις του Euler σε μη-συντηρητική μορφή μπορούν να γράφουν:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow L^{-1}\frac{\partial U}{\partial t} + (L^{-1} \cdot A)\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + L^{-1} \cdot A \cdot L \cdot L^{-1}\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + (L^{-1} \cdot A \cdot L)\frac{\partial \vec{c}}{\partial x} = 0$$

όπου $\delta\vec{c} = L^{-1} \cdot \delta\vec{U}$ ή $\delta\vec{U} = L \cdot \delta\vec{c}$

Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζουν ότι οι μεταβλητές $\delta\vec{c}$ που ονομάζονται χαρακτηριστικές μεταβλητές αποτελούν γραμμικό συνδυασμό των βασικών μεταβλητών $\delta\vec{U}$, με συντελεστές που είναι τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του συστήματος .

12.4 Χαρακτηριστικές μεταβλητές και ιδιοτιμές μονοδιάστατων ροών Euler

Η συντηρητική μορφή του συστήματος των μονοδιάστατων εξισώσεων του Euler είναι:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} & + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} & = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} & + \dfrac{\partial(\rho u^2 + P)}{\partial x} & = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho E)}{\partial t} & + \dfrac{\partial[\rho u(E + P/\rho)]}{\partial x} & = 0 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τις βασικές (primitive) μεταβλητές το σύστημα σε μη-συντηρητική μορφή γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} & + & u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} & + & \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} & + & u\dfrac{\partial u}{\partial x} & + & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial t} & + & u\dfrac{\partial P}{\partial x} & + & \rho c^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A δίνονται από την εξίσωση:

$$\det|\lambda\cdot I-A|=0$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Η παραπάνω ορίζουσα γίνεται:

$$\begin{vmatrix}u-\lambda&\rho&0\\0&u-\lambda&{}^{1}/_{\rho}\\0&\rho c^2&u-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\begin{bmatrix}\lambda_1&=&u\\\lambda_2&=&u+c\\\lambda_3&=&u-c\end{bmatrix}$$

και τα αντίστοιχα αριστερά ιδιοδιανύσματα (left eigenvectors) του A, είναι:

$$l^{(1)}=\begin{pmatrix}a&0&-\frac{a}{c^2}\end{pmatrix}$$
$$l^{(2)}=\begin{pmatrix}0&\beta&\frac{\beta}{\rho c}\end{pmatrix}$$
$$l^{(3)}=\begin{pmatrix}0&\delta&-\frac{\delta}{\rho c}\end{pmatrix}$$

όπου α,β,δ είναι σταθεροί συντελεστές .

Οι ιδιοτιμές (eigenvalues) λ_j του πίνακα A προσδιορίζονται από:

$$l^{(j)}\cdot A=\lambda_j\cdot I\Rightarrow(l_1\quad l_2\quad l_3)\begin{vmatrix}u&\rho&0\\0&u&{}^{1}/_{\rho}\\0&\rho c^2&u\end{vmatrix}=\lambda(l_1,\quad l_2,\quad l_3)$$

Θεωρώντας ότι οι σταθερές $\alpha=\beta=\delta=1$,προσδιορίζονται τα ιδιοδιανύσματα $l^{(j)}$ και οι πίνακες L^{-1}και L.

$$L^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&{}^{-1}/_{C^2}\\0&1&{}^{1}/_{\rho c}\\0&1&{}^{-1}/_{\rho c}\end{bmatrix}\qquad L=\begin{bmatrix}1&\frac{\rho}{2c}&-\frac{\rho}{2c}\\0&{}^{1}/_{2}&{}^{1}/_{2}\\0&\frac{\rho c}{2}&-\frac{\rho c}{2}\end{bmatrix}$$

Έχοντας προσδιορίσει τους πίνακες L^{-1} και L ,πολλαπλασιάζουμε από αριστερά το σύστημα των εξισώσεων του Euler και έχουμε:

$$L^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}+(\,L^{-1}*A*L)\,L^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}=0\Rightarrow\ L^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}+\Lambda*\ L^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

όπου $\Lambda=\begin{bmatrix}u&0&0\\0&u+c&0\\0&0&u-c\end{bmatrix}$

είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του συστήματος .

Αναλυτικά , το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial t} & - & \frac{1}{c^2}\frac{\partial P}{\partial t} & + & u\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} & + & \frac{1}{\rho c}\cdot\frac{\partial P}{\partial t} & + & (u+c)\cdot(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho c}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}) & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} & - & \frac{1}{\rho c}\cdot\frac{\partial P}{\partial t} & + & (u-c)\cdot(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{\rho c}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}) & = & 0 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των χαρακτηριστικών μεταβλητών $\delta\,\vec{c}= L^{-1}\delta\vec{U}$, έχουμε ότι οι χαρακτηριστικές μεταβλητές του συστήματος είναι:

$$\delta c_1 = \delta\rho - \frac{1}{c^2}\delta P$$
$$\delta c_2 = \delta u + \frac{1}{\rho c}\delta P$$
$$\delta c_3 = \delta u - \frac{1}{\rho c}\delta P$$

και οι μονοδιάστατες εξισώσεις Euler παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial\vec{c}}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial\vec{c}}{\partial x} = 0$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$$

που ονομάζεται εξισώσεις συμβατότητας (compatibility equations).

12.5 Μεταβλητές Riemann

Οι παραπάνω εξισώσεις των μεταβλητών δc_1,δc_2,δc_3 δείχνουν ότι οι ποσότητες c_i μεταδίδονται κατά μήκος των αντίστοιχων χαρακτηριστικών με ταχύτητες λ_ι.
Έτσι η πρώτη χαρακτηριστική

$$\delta c_1 = \delta\rho - \frac{1}{\rho c}\,\delta P$$

μεταδίδεται με ταχύτητα *u* κατά μήκος της χαρακτηριστικής γραμμής c_0 που ορίζεται από $\frac{dx}{dt} = u$
Αυτή η χαρακτηριστική ονομάζεται ροϊκή διαδρομή.

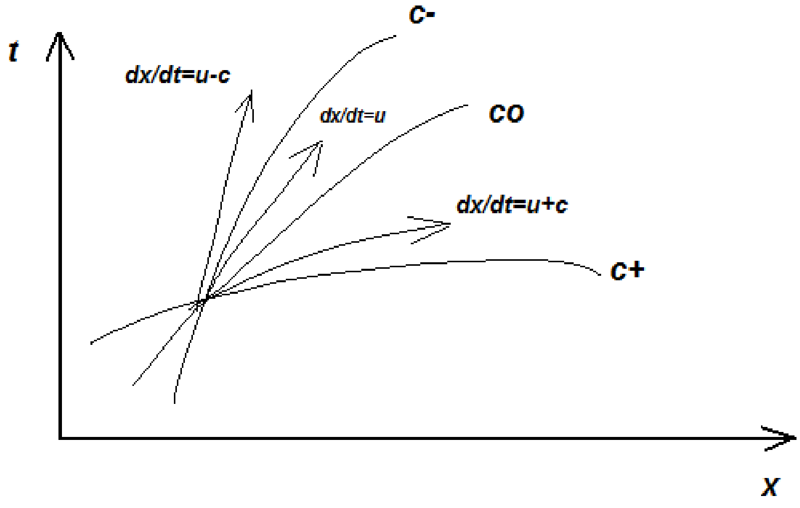
Η ποσότητα $\delta c_2 = \delta u + \frac{1}{\rho c}\delta P$ ονομάζεται δεξιοκλινής χαρακτηριστική ,ή χαρακτηριστική που μεταφέρεται με ταχύτητα u+c κατά μήκος της χαρακτηριστικής γραμμής c_+ που ορίζεται από $\frac{dx}{dt} = u + c$

Η ποσότητα $\delta c_3 = \delta u - \frac{1}{\rho c}\delta P$ μεταφέρεται με ταχύτητα u-c κατά μήκος της χαρακτηριστικής γραμμής c_- που ορίζεται από τη $\frac{dx}{dt} = u - c$. Η παραπάνω ποσότητα ονομάζεται αριστεροκλινής χαρακτηριστική.

Οι χαρακτηριστικές μεταβλητές $\delta c_1, \delta c_2, \delta c_3$ παραμένουν αμετάβλητες κατά την διάρκεια της διάδοσης του κύματος κατά μήκος της χαρακτηριστικής ποσότητας c, ικανοποιώντας την εξίσωση:

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{c}}{\partial x} = 0$$

Οι ποσότητες c_1, c_2, c_3 παραμένουν σταθερές κατά μήκος των αντίστοιχων χαρακτηριστικών που ορίζεται από $\frac{dx}{dt} = \lambda$



Σχήμα 12.2: Χαρακτηριστικές καμπύλες μονοδιάστατων εξισώσεων Euler στο επίπεδο *(x,t)*

Δηλαδή στη χαρακτηριστική

$$c_0 \;, \frac{dx}{dt} = u$$
$$c_+ \;, \frac{dx}{dt} = u + c$$
$$c_- \;, \frac{dx}{dt} = u - c$$

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι η πρώτη χαρακτηριστική δc_1 εκφράζει τη σταθερή μεταφορά εντροπίας κατά μήκος της χαρακτηριστικής γραμμής $\frac{dx}{dt} = u$.

Η εντροπία δίνεται από τη θερμοδυναμική εξίσωση:

$$ds = C_p \cdot lnT - R * lnP = C_v \cdot ln\left({}^{P}/_{\rho^{\gamma}}\right) \;\Rightarrow\; ds = -\frac{\gamma C_v}{\rho}(d\rho - \frac{dP}{c^2})$$

όπου $c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right) = \gamma RT = \frac{\gamma P}{\rho}$ η ταχύτητα του ήχου στο τετράγωνο.

Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με *ds=0* κατά μήκος της $\frac{dx}{dt} = u$ ή $\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} = 0$

πράγμα που σημαίνει ότι η εντροπία διαδίδεται κατά μήκος της γραμμής $\frac{dx}{dt} = u$ και παραμένει σταθερή κατά μήκος της χαρακτηριστικής c_0 όταν δεν υπάρχουν ασυνέχειες (όπως κρουστικά κύματα) στο ροϊκό πεδίο.

Για ισεντροπικές ροές οι χαρακτηριστικές μεταβλητές ή χαρακτηριστικές Riemann μπορούν να υπολογισθούν με ολοκλήρωση κατά μήκος των χαρακτηριστικών c_+ ή c_- .

Για παράδειγμα για τη χαρακτηριστική c_+ ,έχουμε ότι :

$$\left.\begin{array}{c} c_+ = u + \int \frac{dP}{\rho c} = u + \int c(\rho)\frac{d\rho}{\rho} \\ \text{αλλά } c^2 = \gamma\rho^{\gamma-1}, \qquad P = \rho^{\gamma}\cdot\kappa \\ \kappa = \text{σταθερά} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad c_+ = u + \frac{2}{\gamma-1}c$

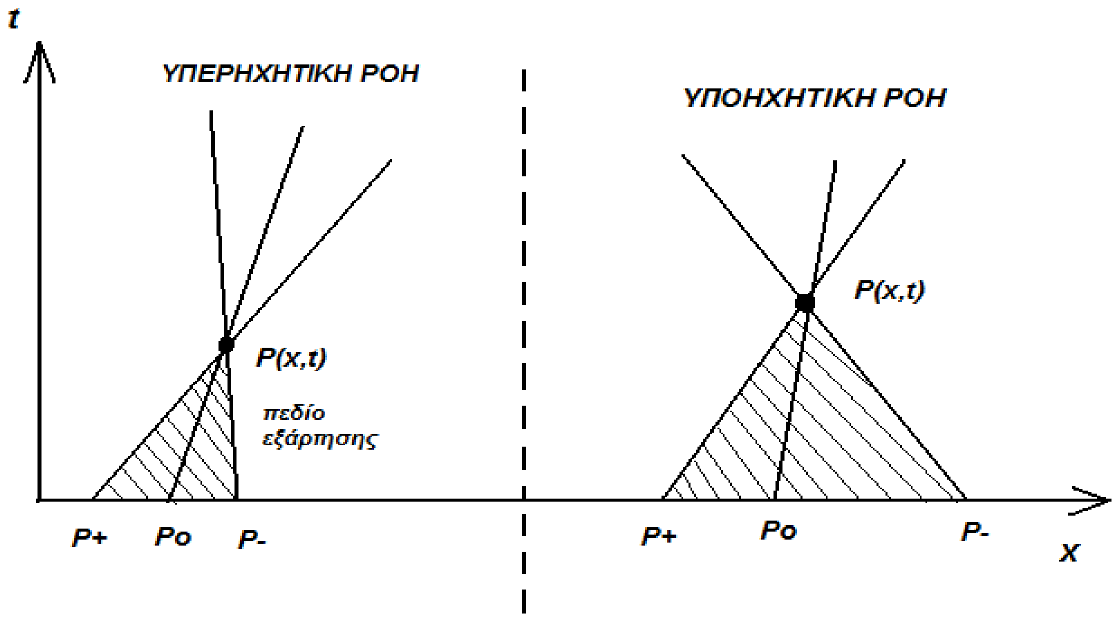
Όμοια $c_- = u - \frac{2}{\gamma-1}c$

Για τις δυο μεταβλητές Riemann (ή χαρακτηριστικές μεταβλητές) κατά μήκος των χαρακτηριστικών γραμμών c_+ και c_- .
Έτσι ,το σύστημα των μονοδιάστατων εξισώσεων Euler είναι ισοδύναμο με το παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} & + & u\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{2c}{\gamma-1}\right) & + & (u+c)\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{2c}{\gamma-1}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(u - \frac{2c}{\gamma-1}\right) & + & (u-c)\frac{\partial}{\partial x}\left(u - \frac{2c}{\gamma-1}\right) = 0 \end{bmatrix}$$

12.6 Χαρακτηριστικές στο επίπεδο *x-t*

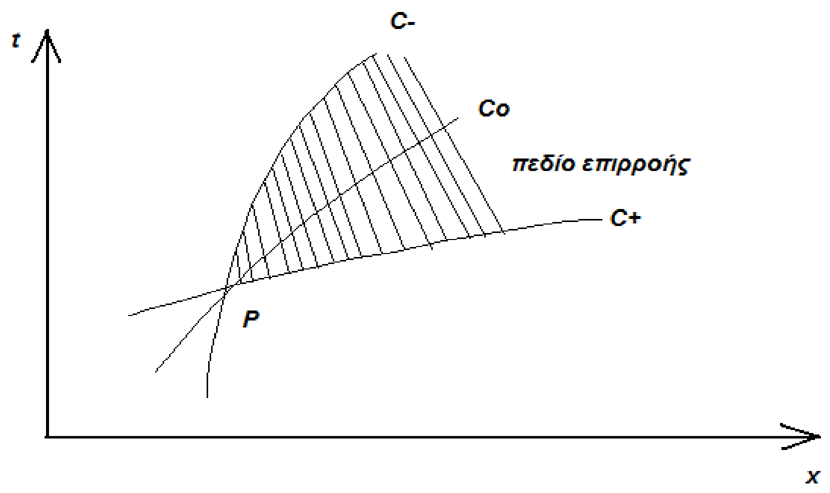
Η φυσική ροϊκή κατάσταση ενός σημείου (δηλαδή η πίεση ,ταχύτητα ,θερμοκρασία),σε μονοδιάστατη ισεντροπική ροή Euler προκύπτει από τις ποσότητες που μεταφέρονται κατά μήκος χαρακτηριστικών γραμμών.
Η εντροπία μεταφέρεται κατά μήκος της χαρακτηριστικής c_0 με ροϊκή ταχύτητα u,δηλαδή κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής. Η ταχύτητα και η πίεση ή η πυκνότητα προσδιορίζονται από τις ποσότητες $u \pm \frac{2c}{\gamma-1}$ που μεταφέρονται με ταχύτητα $u \pm c$ κατά μήκος των χαρακτηριστικών c_+ ή c_- αντίστοιχα.
Έτσι για το σημείο *P(x,t)* του σχήματος που ακολουθεί:



$$\left\{\begin{array}{c} \left(u + \frac{2c}{\gamma-1}\right) = \left(u + \frac{2c}{\gamma-1}\right) \\ \left(u - \frac{2c}{\gamma-1}\right) = \left(u - \frac{2c}{\gamma-1}\right) \\ S_p = S_{p0} \end{array}\right\}$$

Το αριστερό μέρος του σχήματος ισχύει για την περίπτωση υπερηχητικής ροής, ενώ το δεξί μέρος για την περίπτωση υποηχητικής ροής .(όπου η χαρακτηριστική c_- έχει αρνητική κλίση αφού *u-1<0*)

Σε κάθε σημείο P*(x,t)* του ροϊκού πεδίου περνά κάθε μια από τις χαρακτηριστικές και έτσι οι ροϊκές μεταβλητές (πυκνότητα ,πίεση ,θερμοκρασία ταχύτητα)σε κάθε σημείο για κάθε χρονική στιγμή εξαρτώνται μόνο από την περιοχή μεταξύ σημείων P_+ και P_- του σχήματος .Αυτό ονομάζεται <u>πεδίο εξάρτησης</u> του P . Αντίθετα ,αναφερόμενοι στο πιο κάτω σχήμα ,η περιοχή που περιλαμβάνεται ανάμεσα στις χαρακτηριστικές που ξεκινούν από το P,ονομάζεται <u>πεδίο επιρροής</u> του P (domain of influence).



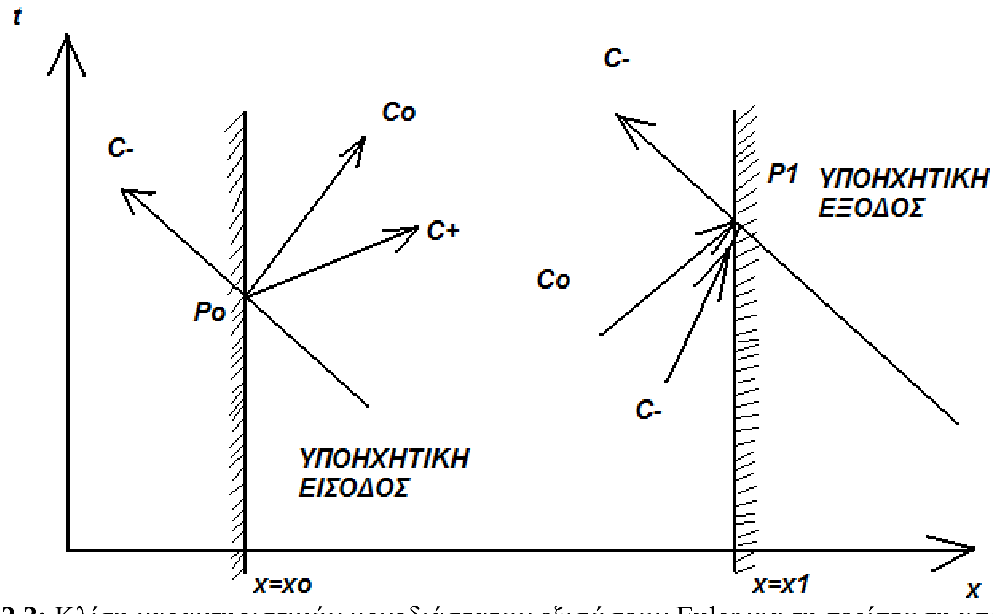
<u>Φυσικές Οριακές Συνθήκες</u>

Οι παραπάνω θεωρήσεις σχετικά με τα πεδία εξάρτησης και επιρροής έχουν άμεση σχέση με τον αριθμό των οριακών συνθηκών που πρέπει να εφαρμοστούν σε προβλήματα μονοδιάστατης ροής Euler.

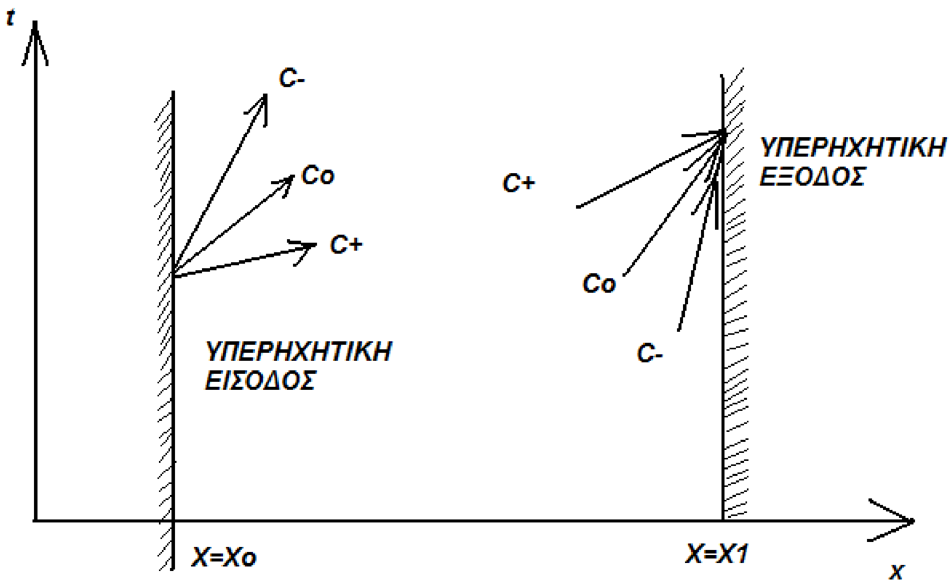
Θεωρείστε τα σημεία P_0 ή P_1 στο επίπεδο εισόδου x=x_0 και εξόδου $x = x_1$ αντίστοιχα για μια δεδομένη χρονική στιγμή *t*.

Ο αριθμός των οριακών συνθηκών που πρέπει να εφαρμοστούν σε αυτά τα όρια (δηλαδή $x = x_0$ και $x = x_1$) εξαρτάται από τον τρόπο που μεταφέρονται οι πληροφορίες του ροϊκού πεδίου καθώς οι χαρακτηριστικές τέμνουν τα όρια του πεδίου.

Σε κάθε σημείο στο όριο εισόδου, οι χαρακτηριστικές c_0 και c_1 με κλίσεις *u* και *u+c*, έχουν κλίση πάντα θετική για μια ροή με διεύθυνση προς τη *x* διεύθυνση.



Σχήμα 12.3: Κλίση χαρακτηριστικών μονοδιάστατων εξισώσεων Euler για τη περίπτωση υποηχητικής εισόδου και υποηχητικής εξόδου σε αγωγό



Σχήμα 12.4: Κλίση χαρακτηριστικών μονοδιάστατων εξισώσεων Euler για τη περίπτωση υπερηχητικής εισόδου και υπερηχητικής εξόδου σε αγωγό

Αυτό σημαίνει ότι οι χαρακτηριστικές αυτές θα μεταφέρουν πληροφορίες από τα όρια προς το εσωτερικό του ροϊκού πεδίου.
Η Τρίτη χαρακτηριστική c_- έχει κλίση που εξαρτάται από τον αριθμό *Mach* εισόδου της ροή. Για υπερηχητική είσοδο, η c_- έχει θετική κλίση ,ενώ για υποηχητική είσοδο θα έχει αρνητική κλίση.
Στην περίπτωση χαρακτηριστικών με θετική κλίση ,οριακές συνθήκες (μια για κάθε χαρακτηριστική)από το εξωτερικό του πεδίου πρέπει να προσδιοριστούν. Στην περίπτωση χαρακτηριστικών με αρνητική κλίση, δεν πρέπει να προσδιοριστούν οριακές συνθήκες, αλλά η c_- προσδιορίζεται αυθαίρετα από τιμές εσωτερικών σημείων.
Παρόμοιες θεωρήσεις γίνονται για την έξοδο του ροϊκού πεδίου .Εκεί δύο χαρακτηριστικές, η c_0 και η c_+ έχουν πάντα θετικές κλίσεις ενώ η κλίση της τρίτης χαρακτηριστικής (της c_-) εξαρτάται από τον αριθμό *Mach* της εξόδου. Στην περίπτωση υπερηχητικής εξόδου δεν πρέπει να προσδιοριστεί οριακή συνθήκη ,ενώ στην περίπτωση υποηχητικής εξόδου πρέπει να προσδιοριστεί μια οριακή συνθήκη. Τα παραπάνω παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

<u>ΠΙΝΑΚΑΣ 12.1</u>

Φυσικές Οριακές Συνθήκες για μονοδιάστατη ροή Euler

	Υποηχητική	Υπερηχητική
Είσοδος	Δυο φυσικές οριακές συνθήκες με τις εισερχόμενες χαρακτηριστικές c_0 και c_+	Τρεις φυσικές οριακές συνθήκες με τις εισερχόμενες χαρακτηριστικές c_0,c_+,c_-.
Έξοδος	Μια φυσική οριακή συνθήκη με την εισερχόμενη χαρακτηριστική c_-.	ία φυσική οριακή συνθήκη.

Επιπρόσθετα, μπορούμε να επισημάνουμε δύο θέματα:

Α)Οι φυσικές οριακές συνθήκες που πρέπει να προσδιοριστούν είναι η εντροπία και οι χαρακτηριστικές (ή *Riemann*) μεταβλητές. Αυτό δεν είναι πρακτικό ,διότι οι ποσότητες αυτές δεν είναι γνωστές.

Αντίθετα ,οι γνωστές ποσότητες είναι φυσικά μεγέθη που μετρώνται σε πειράματα και έτσι οι χαρακτηριστικές μεταβλητές προσδιορίζονται με επαναληπτικές ή προσεγγιστικές μεθόδους στα όρια ,ειδικά στην περίπτωση υποηχητικών ροών στα όρια εισόδου /εξόδου.

Β)Τα αριθμητικά σχήματα γενικά απαιτούν το προσδιορισμό όλων των μεταβλητών στα όρια εισόδου εξόδου. Έτσι επιπρόσθετες συνθήκες αριθμητικής (και όχι φυσικής)προέλευσης πρέπει να προστεθούν στις φυσικές οριακές συνθήκες για να ορίσουν επακριβώς το οριακό πρόβλημα. Αυτές οι συνθήκες ονομάζονται αριθμητικές οριακές συνθήκες και αντιστοιχούν στις μεταβλητές όπως ορίζονται από την ροή των εσωτερικών σημείων. Αυτές οι οριακές πρέπει να είναι συμβατές με τη φυσική συμπεριφορά της ροής και δεν πρέπει να επηρεάζουν τις φυσικές οριακές συνθήκες.

13. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ Μ.Δ.Ε. : ΑΓΩΓΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

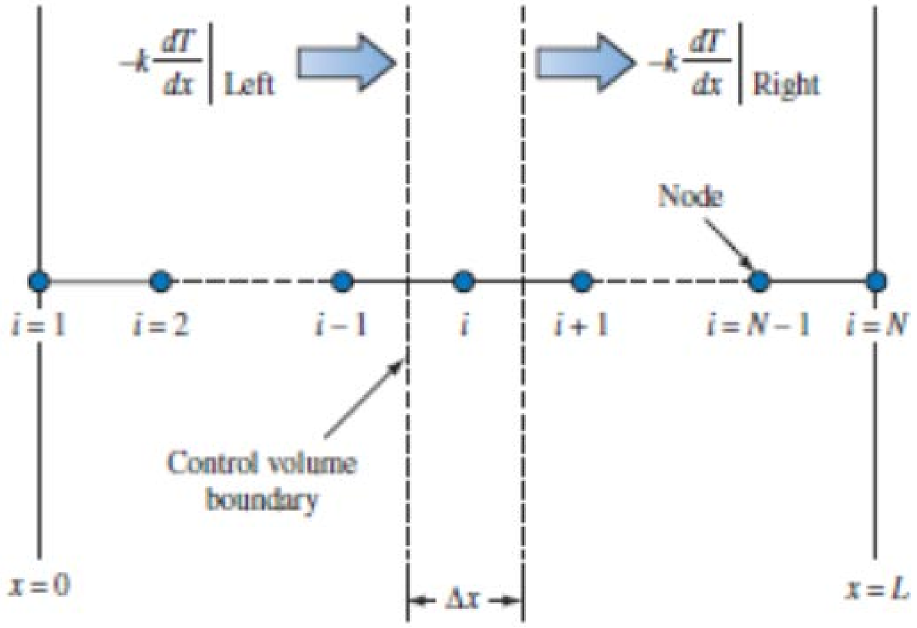
13.1 Μονοδιάσταση μόνιμη αγωγή

Αρχικά θα θεωρήσουμε την μόνιμη αγωγή με παραγωγή θερμότητας σε μία ήμι-άπειρη πλάκα (το πάχος της πλάκας L είναι τάξη μεγέθους μικρότερο από το μήκος ή το ύψος και πλάτος). Συνεπώς, η μονοδιάστατη, μόνιμη (χρονικά) κατάσταση ενδιαφέροντος είναι $0 \leq \; x \; \leq \; L$ όπως προκύπτει από το σχήμα 13.1. Για αυτή τη γεωμετρία, η γενική εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας, είναι η παρακάτω:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q_G}}{k} = 0 \qquad (13.1)$$

Για να διακριτοποιήσουμε την εξίσωση αυτή και να εφαρμόσουμε την μέθοδο όγκου ελέγχου και αρχικά χωρίζουμε το χώρο σε N *-1* ίσα τμήματα μήκους *Δx = L / (N-1)* όπως φαίνεται στο σχήμα 13.1. Με αυτό το τρόπο, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τα όρια του κάθε τμήματος με:

$$x_i = (i-1) \cdot \Delta x, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$



Σχήμα 13.1: Όγκος ελέγχου για μονοδιάστατη αγωγή

Οι θέσεις x_i ονομάζονται κόμβοι, και οι κόμβοι 1 και N ονομάζονται οριακοί κόμβοι. Μπορούμε να συμβολίσουμε την θερμοκρασία κάθε κόμβου ως $T(x_i)$, ή εν συντομία, T_i. Τώρα θεωρούμε ένα τμήμα μήκους Δx διαμοιρασμένο σε έναν από τους εσωτερικούς κόμβους όπως φαίνεται στο σχήμα 13.1. Δεδομένου ότι θεωρούμε πως έχουμε μονοδιάστατη αγωγή, μπορούμε να πάρουμε μία μονάδα μήκους 1 στις διευθύνσεις y και z κατευθύνσεις της πλάκας αυτής. Προκύπτει πως αυτή η πλάκα έχει διαστάσεις Δx επί 1 επί 1 και διαμορφώνεται ο όγκος ελέγχου μας.
Θεωρούμε το ενεργειακό ισοζύγιο σε αυτό τον όγκο ελέγχου που είναι:

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός θερμότητας με} \\ \text{αγωγή μέσα} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός της παραγωγής} \\ \text{θερμότητας} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός της θερμότητας με} \\ \text{αγωγή έξω από} \\ \text{τον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix}$$

(13.1β)

Ο πρώτος όρος στην αριστερή πλευρά της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{bmatrix} \text{ρυθμός θερμότητας με} \\ \text{αγωγή μέσα} \\ \text{στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} = -k\frac{dT}{dx}\bigg|_{left}$$

όπου η βαθμίδα θερμοκρασίας πρέπει να υπολογιστεί στην αριστερή επιφάνεια (face) του όγκου ελέγχου. Ο απώτερος στόχος είναι να προσδιορίσουμε τις τιμές του T_i σε όλα τα σημεία των κόμβων. Δεν μας αφορά ιδιαίτερα η κατανομή θερμοκρασίας ανάμεσα στους κόμβους; οπότε είναι εύλογο να υποθέσουμε πως οι η θερμοκρασία διαφέρει γραμμικά ανάμεσα στους κόμβους. Με αυτή την υπόθεση, η βαθμίδα θερμοκρασίας στην αριστερή επιφάνεια του όγκου ελέγχου είναι:

$$k\frac{dT}{dx}\bigg|_{left} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$$

Εάν μας δοθεί ο χρονικός ρυθμός μεταφοράς θερμότητας με αγωγή, $\dot{q}_G(x)$, τότε ο δεύτερος όρος στην αριστερή πλευρά της προηγούμενης εξίσωσης είναι $\dot{q}_G(x_i)\Delta x$ ή απλούστερα $\dot{q}_{G,i}\Delta x$. Εδώ υποθέτουμε πως ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας είναι σταθερός σε όλο τον όγκο ελέγχου. Τελικά ο όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης είναι:

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός της θερμότητας με} \\ \text{αγωγή έξω από} \\ \text{τον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} = -k\frac{dT}{dx}\bigg|_{right}$$

Με σκεπτικό ανάλογο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε τη ποσότητα $-k\frac{dT}{dx}\Big|_{left}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$k\frac{dT}{dx}\bigg|_{right} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

Αναφορικά με τις θερμοκρασίες κόμβων, μπορούμε να γράψουμε το ισοζύγιο ενέργειας στον όγκο ελέγχου ως:

$$-k\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + \dot{q}_{Gi}\Delta x = -k\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης διά $k \cdot \Delta x$ έχουμε ότι:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{\dot{q}_{Gi}}{k} = 0 \tag{13.2}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω συνθήκη με την εξ. (13.1) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως πρόκειται για μία διακριτοποιημένη μορφή της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών, όπου η παράγωγος δεύτερης τάξης της θερμοκρασίας σε σχέση με το x εκφράζεται τώρα σε όρους διακριτών τιμών του T στο διάστημα $i = 1, 2, \ldots, N$ για $0 \le x \le L$.

Στην παραπάνω θεώρηση, η θερμότητα που άγεται *μέσα* αριστερή επιφάνεια είναι στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης του ενεργειακού ισοζυγίου, ενώ η θερμότητα που άγεται *έξω* από το δεξιό πρόσωπο βρίσκεται στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης. Ουσιαστικά, η επιλογή κατεύθυνσης της θερμοροής στα όρια του όγκου ελέγχου είναι τυχαία αρκεί να υπολογίζεται σωστά για την εξίσωση της ενεργειακής ισορροπίας. Για τον όρο «ρυθμός θερμότητας με αγωγή έξω από τον όγκο ελέγχου» στην εξ. (13.1) μπορούσαμε να είχαμε γράψει:

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός θερμότητας} \\ \text{με αγωγή} \\ \text{μέσα στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} = k\frac{dT}{dx}\bigg|_{right} = -\begin{bmatrix} \text{ρυθμός θερμότητας} \\ \text{με αγωγή} \\ \text{έξω από τον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix}$$

Οπότε το ενεργειακό ισοζύγιο στον όγκο ελέγχου θα είναι:

$$k\frac{T_{i-1} - T_i}{\Delta x} + k\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + \dot{q}_{G,i}\Delta x = 0$$

το οποίο είναι ισοδύναμε με την εξ. (13.2). Αυτή η μορφή είναι πολύ ευκολότερο να τη θυμάται κανείς, καθώς μπορούμε να σκεφτούμε για όλους τους αγώγιμους όρους να είναι θετικοί όταν η θερμορροή είναι *μέσα* στον όγκο ελέγχου. Οι όροι αγωγιμότητας θα είναι πάντα στην ίδια πλευρά της εξίσωσης. Επιπροσθέτως, θα είναι αναλογικοί της θερμοκρασίας των κόμβων T_i αφαιρεμένους από τη θερμοκρασία του κόμβου έξω από την επιφάνεια.
Η εξ. (13.2) ονομάζεται *εξίσωση πεπερασμένων διαφορών* και αναπαριστά το ενεργειακό ισοζύγιο σε ένα πεπερασμένο όγκο ελέγχου μήκους Δx.

Αν δεν υπάρχει ο όρος παραγωγής θερμότητας $\dot{q}_{G,i}$ τότε η εξ. (13.2) γίνεται:

$$\frac{T_{i-1} - T_i}{\Delta x} + k\frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} = 0 \Rightarrow (T_{i-1} - T_i) + (T_{i+1} - T_i) = 0 \Rightarrow T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = 0 \qquad (13.3)$$

Συνεπώς, η θερμοκρασία σε κάθε κόμβο είναι απλά ο μέσος όρος της θερμοκρασίας όλων των γειτονικών αν δεν υπάρχει παραγωγή θερμότητας.
Εάν η θερμική αγωγιμότητα *k* δεν είναι σταθερή, *αλλά* είναι συνάρτηση της θερμοκρασία, αν για παράδειγμα, $k = k[T(x)]$, πρέπει να αλλάξουμε τον υπολογισμό των όρων:

$$k_{left} = \frac{2k_i \cdot k_{i-1}}{k_i + k_{i+1}}$$

Ανάλογα, στο δεξιό άκρο χρησιμοποιούμε:

$$k_{right} = \frac{2k_i \cdot k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}}$$

.
Πώς επιλέγουμε το μέγεθος του όγκου ελέγχου Δx; Γενικά μία μικρή τιμή του Δx θα μας δώσει μία περισσότερο ακριβή λύση αλλά θα αυξήσει τον υπολογιστικό χρόνο που χρειάζεται για την εύρεση της λύσης. Βασικά, η κατανομή θερμοκρασίας μπορεί να αναπαραστήσει με περισσότερη ακρίβεια μία μη γραμμική κατανομή όταν μειώσουμε το Δx. Μερικές δοκιμές (trial and error) μπορεί να χρειάζονται για να καθορίσουν την επιθυμητή ακρίβεια για ένα εύλογο υπολογιστικό χρόνο. Συνήθως μία σειρά από υπολογισμούς διεξάγονται για μικρότερες και ακόμα μικρότερες τιμές Δx. Ως ένα σημείο, περεταίρω μείωση του Δx θα δεν θα παράξει σημαντική αλλαγή στην επίλυση. Δεν είναι απαραίτητο να μειωθεί το Δx περισσότερο από αυτή την τιμή.
Σε μερικές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να επιτρέπεται ο χώρος των κόμβων, Δx, να διαφέρει κατά το χώρο του προβλήματος. Ένα παράδειγμα μίας τέτοιας κατάστασης συμβαίνει όταν μία μεγάλη θερμορή υποβάλλεται σε οριακή και μία μεγάλη βαθμίδα θερμοκρασίας αναμένεται κοντά σε αυτό το όριο. Κοντά στην επιφάνεια, μικρές τιμές του Δx θα χρησιμοποιηθούν ώστε αυτή η μεγάλη βαθμίδα θερμοκρασίας μπορεί να αναπαρασταθεί με ακρίβεια. Πέρα από τα όρια, όπου η βαθμίδα θερμοκρασίας είναι μικρή, το Δx μπορεί να γίνει ακόμα μεγαλύτερο, γιατί η μικρή βαθμίδα θερμοκρασίας μπορεί να παρουσιαστεί με ακρίβεια από μεγάλα Δx. Αυτό το τέχνασμα μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μικρό αριθμό κόμβων ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια χωρίς να χρησιμοποιηθεί υπερβολικός υπολογιστικός χρόνος ή υπολογιστική μνήμη.
Αναφέρθηκε προηγουμένως πως ένα πλεονέκτημα της προσέγγισης με όγκο ελέγχου είναι ότι η ενέργεια διατηρείται ανεξάρτητα από το μέγεθος του όγκου ελέγχου. Αυτό το στοιχείο κάνει βολικό να ξεκινήσει κανείς με ένα αραιό πλέγμα, δηλαδή, σχετικά λίγους όγκους ελέγχου, για να αναπτύξει μία αριθμητική λύση. Σε αυτή την περίπτωση ο υπολογιστής εκτελεί απαραίτητα για να μπορεί να γίνει debugging (εύρεση λαθών) του προγράμματος εξαιρετικά γρήγορα και δεν καταναλώνει πολύ μνήμη. Όταν εξαλειφθούν τα λάθη, ένα καλύτερο πλέγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί η λύση στην επιθυμητή ακρίβεια.

Μια τελική υπόθεση είναι αυτή της στρογγυλοποίησης σφάλματος. Επειδή ο υπολογιστής διαπραγματεύεται με ένα πεπερασμένο αριθμό ψηφίων, κάθε μαθηματική πράξη οδηγεί σε μία στρογγυλοποίηση της λύσης. Όσο ο αριθμός των μαθηματικών πράξεων που απαιτούνται για να παραχθεί μία αριθμητική λύση αυξάνεται, τόσο αυτά τα λάθη στρογγυλοποίησης μπορούν να συσσωρευτούν και υπό μερικές καταστάσεις, επηρεάζουν δυσμενώς τη λύση.
Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο για να αναπτύξουμε την εξίσωση διαφορών θα χρησιμοποιηθεί σε αυτό το κεφάλαιο. Ανεξάρτητα με το αν το πρόβλημα που εξετάζεται είναι σταθερό, ασταθές, μονοδιάστατο, δυσδιάστατο, καρτεσιανό, κυλινδρικό, εμείς θα προσδιορίσουμε αρχικά τον κατάλληλο σχήμα του όγκου ελέγχου. Κατόπιν θα προσδιορίσουμε όλες τις θερμορροές, εντός και εκτός από τα όρια του όγκου ελέγχου και θα γράψουμε τη συνάρτηση της ενεργειακής ισορροπίας. Για σταθερά προβλήματα, το άθροισμα όλων των θερμορροών μέσα στον όγκο ελέγχου με τη θερμότητα που παράγεται μέσα στον όγκο ελέγχου πρέπει να είναι ίσο με το άθροισμα όλων των θερμορροών εκτός του όγκου ελέγχου. Για μη σταθερά προβλήματα, η διαφορά ανάμεσα, στη θερμορροή εντός και εκτός του όγκου ελέγχου, αθροισμένη με τη θερμότητα που παράγεται εντός του όγκου ελέγχου πρέπει να ισοδυναμεί με το ρυθμό στον οποίο η ενέργεια αποθηκεύεται εντός του όγκου ελέγχου.

13.2 Οριακές Συνθήκες

Ανατρέχουμε στο ότι η λύση μίας εξίσωσης διαφορών απαιτεί την εφαρμογή οριακών συνθηκών. Ανάλογη περίπτωση στην αριθμητική ανάλυση, και έτσι για να ολοκληρώσουμε μία έκφραση ενός προβλήματος, πρέπει να εφαρμόσουμε οριακές συνθήκες στη μέθοδο του όγκου ελέγχου. Οι παρακάτω τρεις οριακές συνθήκες συζητήθηκαν μπορούν να εφαρμοσθούν:

(α) καθορισμός θερμοκρασίας (συνθήκη Dirichlet),
(β) καθορισμός θερμορροής (συνθήκη Neumann) και
(γ) καθορισμός συναγωγής (συνθήκη Robin).

Οι τεχνικές που μπορούν να υιοθετηθούν στη μέθοδο ελέγχου όγκου περιγράφονται παρακάτω:

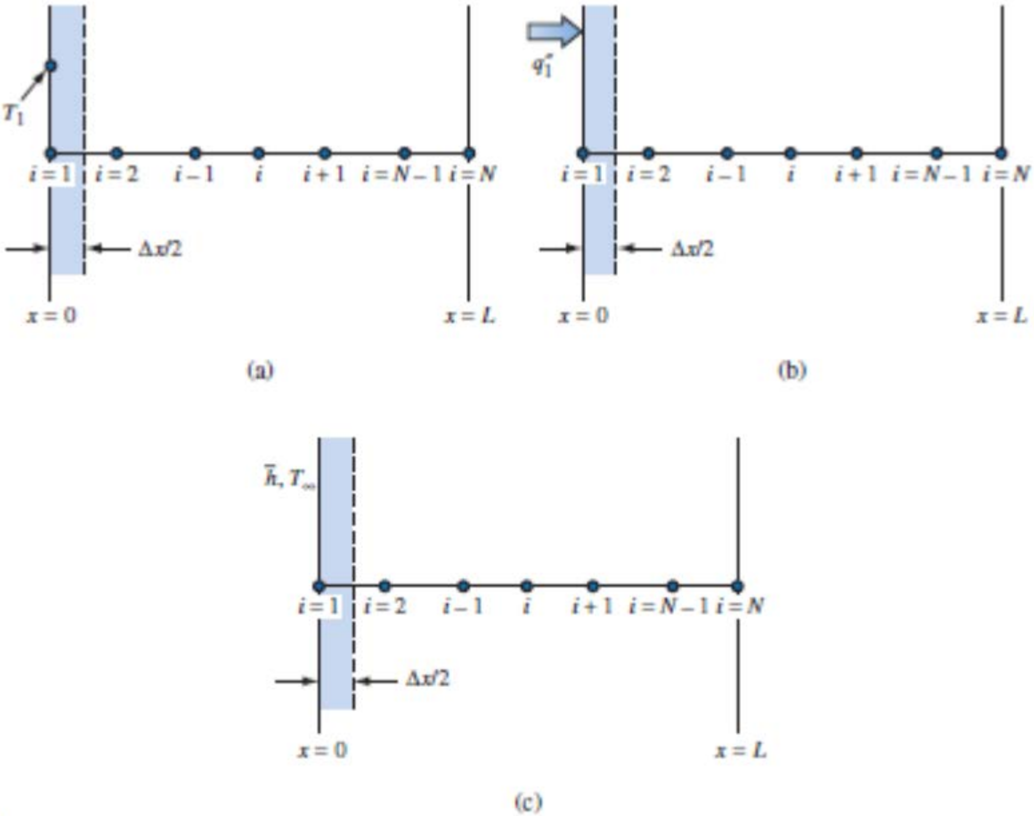
(α) Η απλούστερη από αυτές τις τρεις οριακές συνθήκες είναι ο καθορισμός θερμοκρασίας στην επιφάνεια για την οποία:

$$T(x_1) = T_1 \qquad T(x_N) = T_N \tag{13.4}$$

όπου T_1 και T_N είναι οι *θερμοκρασίες επιφάνειας* στα αριστερά και δεξιά όρια, αντίστοιχα. Η ειδική οριακή θερμοκρασία επιφάνειας απεικονίζεται στο σχήμα 3.2(a). Αυτή η οριακή συνθήκη είναι πολύ απλό να την υλοποιηθεί γιατί απλά αναθέτουμε τις δοθείσες θερμοκρασίες επιφάνειας στους οριακούς κόμβους. Δε χρειαζόμαστε να γράψουμε μία ενεργειακή ισορροπία σε έναν επιφανειακό κόμβο όπου η θερμοκρασία έχει οριστεί έτσι ώστε να λύσουμε το πρόβλημα. Ωστόσο, σε προβλήματα όπου η θερμοκρασία επιφάνειας είναι ορισμένη, συχνά χρειαζόμαστε να καθορίσουμε τη θερμορροή σε αυτό το όριο, και σε αυτή την κατάσταση μία ενεργειακή ισορροπία, όπως περιγράφεται παρακάτω, απαιτείται.

(β) Εάν η οριακή συνθήκη αποτελείται από μία *θερμορροή* στο όριο, q_1'', μπορούμε να υπολογίσουμε τη θερμοκρασία στο όριο σε σχέση με τη θερμορροή με το να θεωρήσουμε ένα ενεργειακό ισοζύγιο στον όγκο ελέγχου επεκτείνοντας από $x = 0$ σε $x = \Delta x/2$, όπως φαίνεται στο σχήμα 13.2(β). Παρατηρούμε πως αυτός ο οριακός όγκος ελέγχου έχει ένα μήκος το μισό από τον εσωτερικό όγκο ελέγχου.

$$q_1'' + \dot{q}_{G,i}\frac{\Delta x}{2} = -k\frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \tag{13.5}$$



Σχήμα 13.2: Όγκος ελέγχου στο άκρο για μονοδιάστατη αγωγή, (a) Καθορισμός θερμοκρασίας στα όρια, (b) Καθορισμός θερμοροής στα όρια, (c) Καθορισμός συναγωγής στα όρια.

Λύνοντας ως προς T_1προκύπτει ότι:

$$T_1 = T_2 + \frac{\Delta x}{k}\left(q_1'' + \dot{q}_{G,1}\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Η εξ. (13.5) μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί λύνοντας ως προς τη θερμορροή σε προβλήματα στα οποία καθορίζεται η θερμοκρασία. Σε αυτή την περίπτωση οι θερμοκρασίες T_1 και T_2 όπως και ο όρος παραγωγή θερμότητας είναι γνωστά και υπολογίζουμε τη θερμορροή.
Όταν τα άκρα είναι θερμικά μονωμένα, τότε η οριακή συνθήκη είναι $q_1'' = 0$ και η Εξ. (13.5) δίνει

$$T_1 = T_2 + \left(\dot{q}_{G,1}\frac{\Delta x^2}{2k}\right)$$

Αν η συναγωγή είναι ορισμένη στο αριστερό άκρο (ή επιφάνεια), εφαρμόζοντας την εξ. (13.1β) στον όγκο ελέγχου που απεικονίζεται στο σχήμα 13.2(c) δίνει:

$$\bar{h}(T_\infty - T_1) + \dot{q}_{G,1}\frac{\Delta x}{2} = -k\frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \qquad (13.6)$$

όπου T_∞ είναι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος ρευστού σε επαφή με το αριστερό άκρο και $\bar{h}$ ο συντελεστής συναγωγής του ρευστού που είναι σε επαφή με το αριστερό άκρο. Λύνοντας την Εξ. (3.5) ως προς T_1, έχουμε ότι:

$$T_1 = \frac{T_2 + \frac{\Delta x}{k}\left(\bar{h}T_\infty + \dot{q}_{G,1}\frac{\Delta x}{2}\right)}{1 + \frac{\bar{h}\Delta x}{k}} \qquad (13.7)$$

Παρατηρούμε πως εάν ο συντελεστής συναγωγής θερμότητας είναι πολύ μεγάλος τότε ο T_1 προσεγγίζει το T_∞. Εάν ο συντελεστής συναγωγής θερμότητας είναι πολύ μικρός, παίρνουμε την οριακή συνθήκη για

μονωμένο άκρο. Μία μεταβολή της οριακής αυτής συνθήκης είναι να προδιαγράψουμε τη θερμορροή από ακτινοβολία αντί από συναγωγή στο αριστερό άκρο. Τότε ο συντελεστής μετάδοσης θερμότητας με συναγωγή θα αντικατασταθεί από τον συντελεστή μετάδοσης θερμότητας με ακτινοβολία.
Για όλους τους τύπους οριακών συνθηκών, η θερμοκρασία στο άκρο μπορεί να εκφραστεί σε όρους γνωστής θερμορροής ή γνωστών συνθηκών συναγωγής ($\bar{h}$ και T_∞) και της θερμοκρασίας του κόμβου T_2. Έτσι μπορούμε να γράψουμε όλες τις τρεις οριακές συνθήκες ως:

$$a_1 T_1 = b_1 T_2 + d_1 \tag{13.8}$$

Οριακή συνθήκη με καθορισμένη θερμοκρασία

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 0 \qquad d_1 = T_1$$

Οριακή συνθήκη με καθορισμένη θερμοροή

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1 \qquad d_1 = \frac{\Delta x}{k}\left(q_1'' + \dot{q}_{G,1}\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Οριακή συνθήκη για τη συναγωγή

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = \frac{1}{1 + \frac{\bar{h}\Delta x}{k}} \qquad d_1 = \frac{\Delta x}{k}\frac{\left(\bar{h}T_\infty + \dot{q}_{G,1}\frac{\Delta x}{2}\right)}{1 + \frac{\bar{h}\Delta x}{k}}$$

Ανάλογα, συνθήκες στο δεξί όριο μπορούν να γραφούν ως:

$$a_N T_N = c_N T_{N-1} + d_N \tag{13.9}$$

Οι συντελεστές a_N, c_N, d_N δίνονται στον πίνακα 13.1.

Πίνακας 13.1 Συντελεστές πίνακα για μονοδιάστατη μόνιμη συναγωγή [εξ. (13.11)]

	a_i	b_i	c_i	d_i
$i = 1$, specified surface temperature	1	0	0	T_i
$i = 1$, specified heat flux	1	1	0	$\frac{\Delta x}{k}\left(q_1'' + \dot{q}_{G,1}\frac{\Delta x}{2}\right)$
$i = 1$, specified surface convection	1	$\left(1 + \frac{\bar{h}_1\Delta x}{k}\right)^{-1}$	0	$\dfrac{\frac{\Delta x}{k}\left(\bar{h}_1 T_{\infty,1} + \dot{q}_{G,1}\frac{\Delta x}{2}\right)}{1 + \frac{\bar{h}_1\Delta x}{k}}$
$1 < i < N$	2	1	1	$\frac{\Delta x^2}{k}\dot{q}_{G,i}$
$i = N$, specified surface temperature	1	0	0	T_N
$i = N$, specified heat flux	1	0	1	$\frac{\Delta x}{k}\left(q_N'' + \dot{q}_{G,N}\frac{\Delta x}{2}\right)$
$i = N$, specified surface convection	1	0	$\left(1 + \frac{\bar{h}_N\Delta x}{k}\right)^{-1}$	$\frac{\Delta x}{k}\left(\dfrac{\bar{h}_N T_{\infty,N} + \dot{q}_{G,N}\frac{\Delta x}{2}}{1 + \frac{\bar{h}_N\Delta x}{k}}\right)$

Note: q_A'' is the heat flux *into* surface *A*.

13.3 Μέθοδοι Επίλυσης

Η εξίσωση διαφορών, εξ. (13.2), μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που χρησιμοποιήθηκαν στις παραπάνω εξισώσεις οριακών συνθηκών:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i, \quad 1 < i < N \qquad (13.11)$$

όπου

$$a_i = 1 \qquad b_i = 1 \qquad c_i = 1 \qquad d_i = \frac{\Delta x^2}{k}\dot{q}_{G,i}$$

Δεδομένου ότι $c_1 = b_N = 0$, η Εξ. (13.10) αναπαριστά την εξίσωση διαφορών για όλους τους κόμβους, συμπεριλαμβανομένου των οριακών κόμβων.
Ολόκληρο το σετ των ταυτόχρονων εξισώσεων διαφορών μπορεί τελικά να εκφραστεί στον παρακάτω πίνακα που ακολουθεί:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & & & \\ -c_2 & a_2 & -b_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & -c_{n-1} & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ & & & -c_N & -a_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \qquad (13.11)$$

Τα κενά σημεία στον πίνακα αντιπροσωπεύουν τα μηδενικά. Μπορούμε να γράψουμε τώρα την εξ. (13.11) ως

$$\boldsymbol{A \cdot T = D}$$

και αντιστρέφοντας τον πίνακα **A**, η λύση για το διάνυσμα θερμοκρασίας **T** είναι:

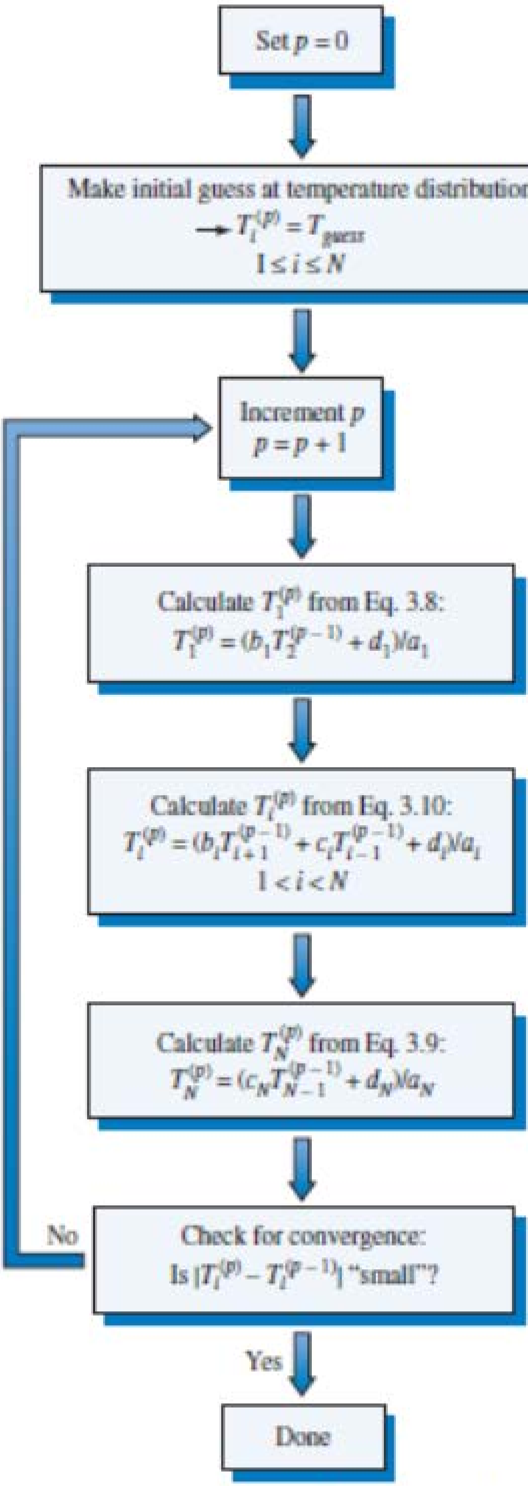
$$\boldsymbol{T = A^{-1} \cdot D}$$

Εφόσον όλοι οι συντελεστές πίνακα a_i, b_i, c_i, d_i είναι γνωστοί, το πρόβλημα έχει τώρα μειωθεί στο να βρούμε τον αντίστροφο ενός πίνακα με γνωστούς συντελεστές, μία διαδικασία η οποία εύκολα αναλαμβάνει να εκτελέσει ένας υπολογιστής. Για παράδειγμα, τα περισσότερα προγράμματα διαχείρισης φύλλων εργασίας υποστηρίζουν *αντιστροφή πίνακα* και *πολλαπλασιασμό πινάκων* και για πολλά προβλήματα αυτό κρίνεται επαρκώς ικανοποιητικό. Συντελεστές για τον πίνακα **A** και το διάνυσμα **D** στην Εξ. (13.11) συνοψίζονται στον πίνακα 13.1 για όλες τις τρεις οριακές συνθήκες και για τους εσωτερικούς κόμβους.
Για ένα πρόβλημα με ένα μεγάλο αριθμό κόμβων, η χρήση φύλλων εργασίας μπορεί να αποδειχθεί όχι πρακτική ή χρήσιμη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε ενός χαρακτηριστικού του πίνακα **A**. Όπως μπορεί να δει κανείς στην Εξ. (13.11), κάθε γραμμή του πίνακα έχει το πολύ τρία μη μηδενικά στοιχεία και για αυτό το λόγο ο πίνακας **A**, ονομάζεται *τριγωνικός πίνακας*. Ειδικές μέθοδοι που είναι ιδιαίτερα αποδοτικές έχουν αναπτυχθεί για να λύνουν τριγωνικά συστήματα.
Μία εναλλακτική μέθοδος επίλυσης ονομάζεται *επανάληψη* και μπορεί να χρησιμοποιηθεί εάν δεν υπάρχει λογισμικό για την αντιστροφή πίνακα. Σε αυτή τη μέθοδο ξεκινάμε με μία αρχική υπόθεση ολόκληρης της κατανομής της θερμοκρασίας για το δοθέν πρόβλημα. Δηλώνομε την αρχική υπόθεση της κατανομής θερμοκρασίας με το σημείο μηδέν, δηλ $T_i^{(0)}$. Αυτή η κατανομή θερμοκρασίας χρησιμοποιείται στην δεξιά πλευρά των (13.8, 13.9, 13.10). Η αριστερή πλευρά σε κάθεμια από αυτές τις εξισώσεις θα δώσει μία αναθεωρημένη εκτίμηση της κατανομής θερμοκρασίας. Η εξίσωσης (13.8) δίνει την αναθεωρημένη θερμοκρασία στο αριστερό όριο, T_1. Η εξίσωση (13.9) δίνει την αναθεωρημένη θερμοκρασία στο δεξιό όριο T_N. Η εξίσωση (13.10) δίνει την αναθεωρημένη θερμοκρασία για όλους τους εσωτερικούς κόμβους. Καλούμε αυτή την κατανομή θερμοκρασίας $T_i^{(1)}$ διότι είναι η πρώτη αναθεώρηση μίας αρχικής υπόθεσης. Αυτό τελειώνει την πρώτη επανάληψη. Η αναθεωρημένη κατανομή της θερμοκρασίας εισέρχεται στη δεξιά πλευρά των ίδιων εξισώσεων ώστε να παραχθεί η επόμενη αναθεώρηση $T_i^{(2)}$. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι η κατανομή θερμοκρασίας πάψει να

αλλάζει σημαντικά ανάμεσα στις επαναλήψεις. Το σχήμα 13.3 δείχνει τη διαδικασία σε μορφή διαγράμματος.
Η επαναληπτική μέθοδος του σχήματος 13.3 λέγεται *Επανάληψη Jacobi*. Κοντινή επιθεώρηση της διαδικασίας δείχνει ότι μετά τον υπολογισμό της πρώτης θερμοκρασίας $T_1^{(1)}$, έχουμε μία ενημερωμένη θερμοκρασία κόμβου, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση της $T_1^{(0)}$ στη δεξιά πλευρά της εξ. (13.9) καθώς υπολογίζουμε την $T_2^{(1)}$.

$$T_2^{(1)} = \left(b_2 T_3^{(0)} + c_2 T_1^{(1)} + d_2\right)/a_2$$

Η εξίσωση για $T_3^{(1)}$ μπορεί τώρα να χρησιμοποιήσει τις ενημερωμένες τιμές $T_1^{(1)}$ και $T_2^{(1)}$ αντί της $T_1^{(0)}$ και $T_2^{(0)}$. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να γενικευτεί για κάθε επανάληψη p: η εξίσωση για $T_i^{(p)}$ μπορεί να χρησιμοποιήσει $T_j^{(p)}$ για $j < i$ και $T_j^{(p-1)}$ για $j > i$. Επειδή χρησιμοποιούμε τις ενημερωμένες θερμοκρασίες κόμβων άμεσα μόλις είναι διαθέσιμες, η σύγκλιση είναι ταχύτερη. Αυτή η βελτιωμένη έκδοση της Επανάληψης Jacobi ονομάζεται ***Επανάληψη Gauss-Siedel*** και οι δύο είναι, ωστόσο, επαναληπτικοί τρόποι για υπολογισμούς σημείου – σημείου ή κόμβου – κόμβου. Για πολύ μεγάλους πίνακες υπάρχουν άλλες ταχύτερες εκδόσεις επαναληπτικών σχημάτων, γνωστές ως γραμμή – γραμμή ή μέθοδοι επανάληψης μπλοκ.



Σχήμα 13.3: Ροϊκό διάγραμμα για την επαναληπτική επίλυση (κόμβο προς κόμβο) ενός προβλήματος μονοδιάστατης μόνιμης αγωγής

Θα έπρεπε να είναι προφανές ότι όσο καλύτερη είναι η πρώτη υπόθεση, $T_1^{(0)}$, τόσο γρηγότερα θα συγκλίνει η λύση. Συνήθως μπορούμε να κάνουμε μία αξιόλογη πρώτη πρόβλεψη βασιζόμενοι στις οριακές συνθήκες.
Όταν είτε η επαναληπτική μέθοδος χρησιμοποιείται, είτε η κατανομή θερμοκρασίας θα συγκλίνει στη σωστή λύση, εάν μία συνθήκη ικανοποιηθεί, όπως και να έχει θα πρέπει να ορίσουμε τη θερμοκρασία για έναν τουλάχιστον οριακό κόμβο ή θα πρέπει να ορίσουμε μία οριακή συνθήκη μεταγωγής με δεδομένη την διάχυτη θερμοκρασία υγρού επάνω σε ένα τουλάχιστον οριακό κόμβο. Οι εναπομείναντες κόμβοι μπορούν να έχουν μετά οποιαδήποτε οριακή συνθήκη. Αυτός ο περιορισμός είναι λογικός καθώς οι εξισώσεις διαφορών δεν μπορούν από μόνες τους να πετύχουν μία απόλυτη θερμοκρασία σε οποιονδήποτε κόμβο; μπορούν μόνο να πετύχουν σχετικές διαφορές θερμοκρασιών ανάμεσα στους κόμβους. Με το να ορίσουμε τουλάχιστον μία οριακή θερμοκρασία ή μία θερμοκρασία περιβάλλοντος υγρού για την οριακή συνθήκη μεταγωγής, μπορούμε να δέσουμε την απόλυτη θερμοκρασία για το πρόβλημα.
Η μέθοδος για την αντιμετώπιση της μεταβλητής θερμικής αγωγής περιγράφεται στο τμήμα 3.2.1 θα κατέληγε σε συντελεστές d_i που εξαρτώνται από τη θερμοκρασία σε αυτόν τον κόμβο και στους περικλείοντες κόμβους. Έτσι μία επαναληπτική διαδικασία επίλυσης *πρέπει* να χρησιμοποιείται σε αυτού του είδος το πρόβλημα. Μία αρχική πρόβλεψη στη θερμοκρασία κατανομής, T_i, πρέπει να γίνεται ώστε να επιτρέπει στο συντελεστή d_i να υπολογιστεί. Μία ενημερωμένη κατανομή θερμοκρασίας μπορεί να προσδιοριστεί από τη μέθοδο που περιγράφηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Αυτή η ενημερωμένη θερμοκρασία κατανομής χρησιμοποιείται για να αναθεωρήσει το d_i, και η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου η θερμοκρασία κατανομής παύει να αλλάζει.

13.4 Μονοδιάστατη Μη μόνιμη Αγωγή

Για να αναπτύξουμε μία εξίσωση διαφορών για προβλήματα μη σταθερής αγωγής πρέπει να λάβουμε υπόψη τον όρο ενέργειας. Αρχικά, ορίζουμε ένα διακριτό βήμα χρόνου Δt ανάλογο με το διακριτό διάχυτο βήμα Δx που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα:

$$t_m = m\,\Delta t \qquad m = 0,1,\ldots$$

Οι θερμοκρασίες κόμβων τώρα εξαρτώνται σε δύο δείκτες, I και m, οι οποίοι αντιστοιχούν στις χωρικές και χρονικές εξαρτήσεις, αντίστοιχα:

$$T_{i,m} = T_{(x_i,t_m)}$$

Εφόσον Δy = Δz = 1, ο ενεργειακός όρος στην εξ. (13.1) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{bmatrix} \text{ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας} \\ \text{μέσα στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} = \rho \cdot c \cdot \Delta x \, \frac{T_{i,m+1} - T_{i,m}}{\Delta t} \tag{13.12}$$

Αυτός ο όρος αντιπροσωπεύει την ενέργεια που αποθηκεύεται από χρόνο t_m σε χρόνο t_{m+1} σε μία πλάκα πάχους Δx διαιρεμένη με χρονικό βήμα $\Delta t = t_{m+1} - t_m$. Όπως επιτρέπουμε την θερμοκρασία να ποικίλει γραμμικά ανάμεσα στους χωρικούς κόμβους στο εδάφιο 13.2, έτσι και εδώ επιτρέπουμε τη θερμοκρασία να διαφέρει γραμμικά ανάμεσα στα χρονικά βήματα.
Προσθέτουμε αυτόν τον ενεργειακό όρο στη δεξιά πλευρά της εξ. (13.1) γιατί οι όροι στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης αναπαριστούν την ενέργεια που ρέει μέσα στον όγκο ελέγχου και τείνει να αυξάνει την θερμοκρασία κόμβου ανά το χρόνο. Αυτό δίνει, μετά από μία αλγεβρική ανακατάταξη, την ακόλουθη έκφραση:

$$-k\frac{T_{i,m} - T_{i-1,m}}{\Delta x} + \dot{q}_{G,i,m}\Delta x = -k\frac{T_{i+1,m} - T_{i,m}}{\Delta x} + \rho c\,\Delta x\,\frac{T_{i,m+1} - T_{i,m}}{\Delta t} \tag{13.13}$$

Η εξ. (13.13) είναι η διακριτοποιημένη μορφή της εξ.(13.5) και η ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας και όλα εκτός μίας θερμοκρασίας στην έκφραση υπολογίζονται σε χρόνο t_m. Μία θερμοκρασία στην Εξ. (13.13) υπολογίζεται σε χρόνο $t_{m+1} = t_m + \Delta t$. Επιλύοντας για αυτή την θερμοκρασία έχουμε:

$$T_{i,m+1} = T_{i,m} + \frac{\Delta t}{\rho \cdot c \cdot \Delta x}\left\{\frac{k}{\Delta x}\left(T_{i+1,m} - 2T_{i,m} + T_{i-1,m}\right) + \dot{q}_{G,i,m}\Delta x\right\} \qquad (13.14)$$

Η Εξ. (13.14) ονομάζεται *ρητή εξίσωση διαφορών* διότι η κατανομή θερμοκρασίας στο νέο χρονικό σημείο t_{m+1} μπορεί να προσδιοριστεί εάν η ολική κατανομή θερμοκρασίας στο χρονικό σημείο t_m είναι γνωστή. Καθώς κάθε μή σταθερό πρόβλημα πρέπει να εμπεριέχει μία αρχική συνθήκη T_i, 0 για όλο το i. Η Εξ. (13.14) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί T_i, 1, T_i, 2 κ.ο.κ για όλα τα απαιτούμενα χρονικά βήματα. Αυτή η διαδικασία καλείται *βηματισμός* καθώς η λύση βασικά βηματίζει προς τα εμπρός από το ένα χρονικό βήμα στο άλλο.

Έτσι, η λύση της ρητής εξίσωσης είναι πολύ ευθύς. Υπάρχει ωστόσο, ένας περιορισμός στο μέγεθος του χρονικού βήματος Δt. Απαιτούμε:

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2a} \qquad (13.15)$$

Εάν ένα χρονικό βήμα μεγαλύτερο από αυτό που περιγράφεται στην εξ. (13.15) χρησιμοποιηθεί, η λύση θα ξεκινήσει να επιδεικνύει αυξανόμενες αριθμητικές ταλαντώσεις. Σε αυτή την περίπτωση η επίλυση πρέπει να θεωρείται *ασταθής*. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί τόσο μαθηματικά όσο και φυσικά. Έτσι, αναδιατάσσοντας την εξ. (13.14):

$$T_{i,m+1} = T_{i,m}\left\{1 - \frac{\Delta t}{\left(\frac{\Delta x^2}{2a}\right)}\right\} + \frac{\Delta t}{pc\,\Delta x}\left\{\frac{k}{\Delta x}\left(T_{i+1,m} + T_{i-1,m}\right) + \dot{q}_{G,i,m}\Delta x\right\}$$

Να παρατηρήσουμε πως αν η συνθήκη που εκφράζεται από την εξ. (13.15) παραβιαστεί, ο συντελεστής $T_{i,m}$ σε αυτή την εξίσωση γίνεται αρνητικός. Αυτό θα οδηγήσει σε ταλαντώσεις στην επίλυση γιατί η θερμοκρασία στον κόμβο i για τη νέο βήμα χρόνου m + 1 θα έχει μία αρνητική εξάρτηση στην τιμή στον κόμβο στο χρονικό βήμα m. Φυσικά, η δεξιά πλευρά της εξ. (13.15) μπορεί να θεωρηθεί ως το χρόνο που χρειάζεται για το πεδίο της θερμοκρασίας ώστε διαρρέει στον όγκο ελέγχου Δx. Εάν η μέθοδος επίλυσης μας χρησιμοποιεί βήματα χρόνου μεγαλύτερα από το χρόνο διάχυσης, μη πραγματικά αποτελέσματα είναι πιθανόν να εμφανιστούν μετά από μερικά βήματα χρόνου.

Μπορούμε να εξαλείψουμε αυτές τις ταλαντώσεις με το να κάνουμε όλα τα βήματα χρόνου επαρκώς μικρά. Ωστόσο, πολύ μικρά βήματα χρόνου είναι μη επιθυμητά γιατί απαιτούν περισσότερο υπολογιστικό χρόνο για ένα δοσμένο συνολικό χρόνο. Επίσης παρατηρούμε ότι αν θέλουμε να αυξήσουμε την ακρίβεια επίλυσης με το να χρησιμοποιούμε μικρότερες τιμές Δx , αναγκαζόμαστε από την Εξ. (13.15) να χρησιμοποιήσουμε πολύ μικρότερα βήματα χρόνου. Αυτό αυξάνει τον υπολογιστικό χρόνο.

Στην πράξη, το βήμα χρόνου Δt θα τίθεται σε μία τιμή μικρότερη από αυτή που προδιαγράφτηκε από την Εξ. (13.15). Η τελική τιμή του Δt που θα χρησιμοποιηθεί στην τελική αριθμητική επίλυση μπορεί να προσδιοριστεί με την τεχνική δοκιμής - σφάλματος (trial and error), όπως η προτεινόμενη τιμή του Δx είχε καθοριστεί για τα σταθερής κατάστασης προβλήματα. Μία σειρά από λύσεις υπολογίζονται για φθίνουσες τιμές Δt μέχρις ότου περαιτέρω μειώσεις στο Δt παύουν να επηρεάζουν την κατανομή θερμοκρασίας. Η στρογγυλοποίηση σφάλματος εδώ είναι μία θεώρηση όπως ήταν και για τα σταθερής-κατάστασης προβλήματα γιατί καθώς το Δt μειώνεται, περισσότερες μαθηματικές διαδικασίες χρειάζονται ώστε να παραχθεί η επίλυση.

13.5 Δισδιάστατη μόνιμη και μη μόνιμη αγωγή

Με τη μέθοδο του όγκου ελέγχου η επέκταση σε δύο- ή τρία-διάστατα συστήματα είναι ευθύς. Θεωρούμε το Σχήμα 3.11, το οποίο δείχνει έναν όγκο ελέγχου για ένα δισδιάστατο πρόβλημα. Δεδομένου ότι το πρόβλημα είναι δισδιάστατο, έστω $\Delta z = 1$. Όπως στην Ενότητα 3.2, οι κόμβοι x χαρακτηρίζονται από:

$$x_i = (i-1)\Delta x \qquad i = 1, \dots, M$$

Κατά παρόμοιο τρόπο οι y κόμβοι αναπαριστώνται ως

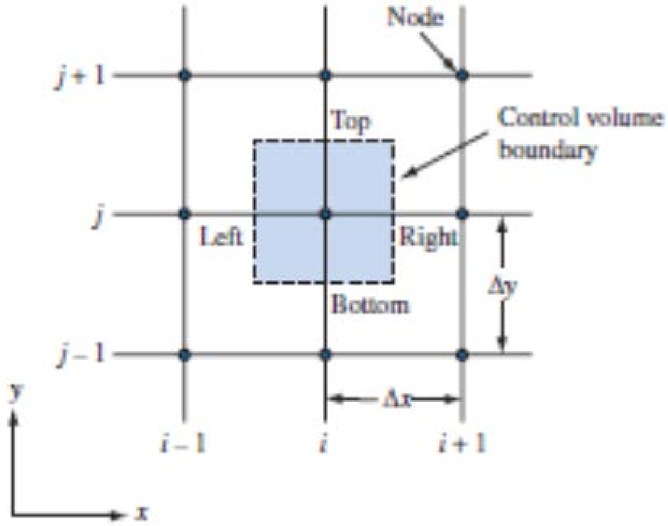
$$y_j = (j-1)\Delta y \qquad j = 1, \dots, M$$

Το μέγεθος του όγκου ελέγχου είναι Δx διά Δy και είναι κεντραρισμένο περίπου στον κόμβο, i, j. Τώρα εφαρμόζοντας την Εξ. (13.1β) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός θερμότητας με αγωγή} \\ \text{μέσα στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{left} \cdot \Delta y - k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{bottom} \cdot \Delta x$$

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός θερμότητας με αγωγή} \\ \text{έξω από τον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{right} \cdot \Delta y - k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{top} \cdot \Delta x$$

όπου “*left*”, “*right*”, “*top*” και “*bottom*” αναφέρονται στις επιφάνειες (faces) του όγκου ελέγχου που φαίνονται στο σχήμα 13.11. Παρατηρούμε ότι η περιοχή της επιφάνειας του όγκου ελέγχου κανονικοποιημένη στη βαθμίδα θερμοκρασίας έχει ληφθεί υπόψη για το Δy στους αριστερούς και δεξιούς όρους και υπό Δx στους κάτω και πάνω όρους.



Σχήμα 13.4 Όγκος Ελέγχου για δισδιάστατη αγωγή.

Οι βαθμίδες θερμοκρασίας στις επιφάνειες των όγκων ελέγχου υπολογίζονται ως:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{left} = \frac{T_{i,j,m} - T_{i-1,j,m}}{\Delta x} \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{right} = \frac{T_{i+1,j,m} - T_{i,j,m}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{bottom} = \frac{T_{i,j,m} - T_{i,j-1,m}}{\Delta y} \qquad\qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{top} = \frac{T_{i,j+1,m} - T_{i,j,m}}{\Delta y}$$

Εάν ο ρυθμός της εθελοντικής παραγωγής θερμότητας είναι $\dot{q}_G(x, y, t)$, τότε

$$\textit{ρυθμός παραγωγής θερμότητας μέσα στον όγκο ελέγχου} = \dot{q}_{G,i,j,m}\Delta x \Delta y$$

Συμπερασματικά,

$$\begin{bmatrix} \textit{ρυθμός παραγωγής θερμότητας} \\ \textit{μέσα στον όγκο ελέγχου} \end{bmatrix} = \rho \cdot c \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{T_{i,j,m+1} - T_{i,j,m}}{\Delta t}$$

Η γενική θερμική ισορροπία μέσα στον όγκο ελέγχου είναι συνεπώς:

$$-k\left(\frac{T_{i,j,m} - T_{i-1,j,m}}{\Delta x}\Delta y + \frac{T_{i,j,m} - T_{i,j-1,m}}{\Delta y}\Delta x\right) + \dot{q}_{G,i,j,m}\Delta x \Delta y$$
$$= -k\left(\frac{T_{i+1,j,m} - T_{i,j,m}}{\Delta x}\Delta y + \frac{T_{i,j+1,m} - T_{i,j,m}}{\Delta y}\Delta x\right) \qquad (13.22)$$
$$+ pc\,\Delta x\,\Delta y - \frac{T_{i,j,m+1} - T_{i,j,m}}{\Delta t}$$

Διαιρώντας με το $k\ \Delta x\ \Delta y$ παίρνουμε την επιθυμητή εξίσωση διαφορών:

$$\frac{{}_{i,m} - 2T_{i,j,m} + T_{i-1,j,m}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,m} - 2T_{i,j,m} + T_{i,j-1,m}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{q}_{G,i,j,m}}{k} \qquad 1(3.23)$$
$$= \frac{\rho \cdot c}{k} \cdot \frac{T_{i,j,m+1} - T_{i,j,m}}{\Delta t}$$

Για σταθερή δισδιάστατη αγωγή χωρίς παραγωγή θερμότητας η Εξίσωση (13.23) γίνεται:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0 \qquad (13.24)$$

Επιλύοντας για $T_{i,j}$ έχουμε:

$$T_{i,j} = \frac{\Delta y^2\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}\right) + \Delta x^2\left(T_{i,j+1} + T_{i,j-1}\right)}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

Εάν τώρα Δx = Δy, τότε έχουμε

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}\right)$$

Όπως στην σταθερή μονοδιάστατη αγωγή χωρίς παραγωγή θερμότητας, η θερμοκρασία σε κάθε εσωτερικό κόμβο i, jείναι ο μέσος όρος των θερμοκρασιών των γειτονικών κόμβων.
Αναφορικά με την Εξίσωση (3.23), παρατηρούμε ότι η κατανομή θερμοκρασίας στο χρονικό σημείο $m + 1$ καθορίζεται εύκολα από την κατανομή στο χρονικό σημείο m. Με άλλα λόγια η Εξίσωση (13.23) είναι στην ρητή της μορφή. Είναι σταθερή μόνο όταν

$$\Delta t < \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)^{-1}$$

Η ρητή μορφή της εξίσωσης διαφορών είναι:

$$\frac{T_{i+1,j,m+1} - 2T_{i,j,m+1} + T_{i-1,j,m+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,m+1} - 2T_{i,j,m+1} + T_{i,j-1,m+1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{q}_{G,i,j,m+1}}{k} = \frac{pc}{k}\frac{T_{i,j,m+1} - T_{i,j,m}}{\Delta t} \tag{13.25}$$

Η θερμική αγωγή κατάλληλη για να καθοριστεί η αριθμητική ροή στην αριστερή και δεξιά επιφάνεια του όγκου ελέγχου στο σχήμα 13.11 μπορεί να υπολογιστεί από:

$$k_{left} = \frac{2\,k_{i,j}k_{i-1,j}}{k_{i,j} + k_{i-1,j}}$$

$$k_{right} = \frac{2\,k_{i,j}k_{i+1,j}}{k_{i,j} + k_{i+1,j}}$$

και για τα κάτω και επάνω επιφάνειες του όγκου ελέγχου:

$$k_{bottom} = \frac{2\,k_{i,j}k_{i,j-1}}{k_{i,j} + k_{i,j-1}}$$

$$k_{top} = \frac{2\,k_{i,j}k_{i,j+1}}{k_{i,j} + k_{i,j+1}}$$

13.6 Οριακές Συνθήκες

Αναπτύσσοντας εξισώσεις διαφορών για τους οριακούς κόμβους σε πολλαπλές διαστάσεις είναι παρόμοιο με το να τις αναπτύσσει κανείς στη μία διάσταση. Αρχικά ορίζουμε τον όγκο ελέγχου που περιέχει τον οριακό κόμβο. Μετά ορίζουμε όλες τις ενεργειακές ροές εντός και εκτός των ορίων του όγκου ελέγχου και τους ογκομετρικούς όρους, συμπεριλαμβανομένου της παραγωγής θερμότητας και όρους ενεργειακής αποθήκευσης.

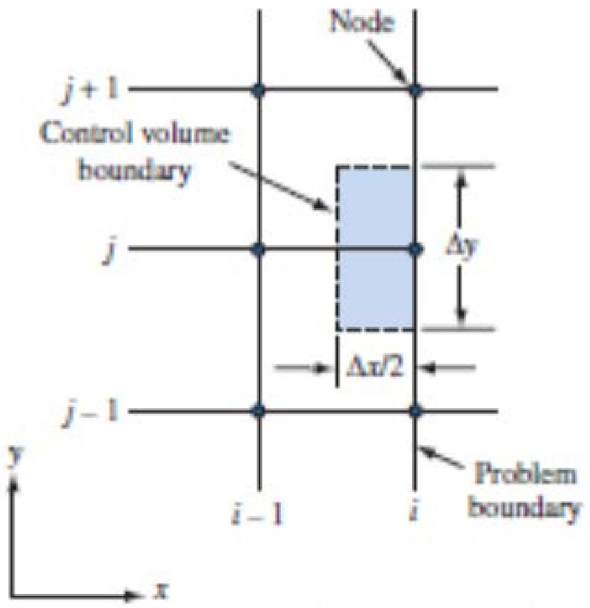
Θεωρούμε την κάθετη ακμή ενός δισδιάστατου γεωμετρικού σχήματος όπως απεικονίζεται στο σχήμα 13.5. Ένας όγκος ελέγχου με πλάτος $\frac{\Delta x}{2}$ και ύψος Δy απεικονίζεται στην γραμμοσκιασμένη περιοχή. Η θερμοκρασία στον οριακό κόμβο είναι $T_{i,j,m}$. Το μέγεθος και το σχήμα αυτού του όγκου ελέγχου επιλέχθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε εάν οι εσωτερικοί όγκοι ελέγχου είναι όπως φαίνονται στο σχήμα 13.5 και οι εναπομείναντες ακριανοί όγκοι ελέγχου είναι όπως φαίνονται στο σχήμα 13.5

Θεωρούμε ισοζύγιο θερμότητας στον όγκο ελέγχου στο σχήμα 13.5:

$$\begin{bmatrix} \text{ροή θερμότητας στην αριστερή} \\ \text{επιφάνεια του όγκου ελέγχου} \\ \text{με αγωγή} \end{bmatrix} = k\frac{T_{i-1,j,m} - T_{i,j,m}}{\Delta x}$$

$$\begin{bmatrix} \text{ροή θερμότητας στη δεξιά} \\ \text{επιφάνεια του όγκου ελέγχου} \end{bmatrix} = q''_{x,i,j,m}\Delta y$$

όπου $q''_{x,i,j,m}$είναι μία ειδικά ορισμένη θερμική ροή στην + x κατεύθυνση στη θέση i, j στην ακμή τη χρονική στιγμή m.



Σχήμα 13.5 Οριακός Κόμβος Ελέγχου για δισδιάστατη αγωγή – κάθετη ακμή.

$$\begin{bmatrix} \text{ροή θερμότητας στη κάτω επιφάνεια} \\ \text{του όγκου ελέγχου με αγωγή} \end{bmatrix} = k\frac{T_{i,j-1,m} - T_{i,j,m}}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \text{ροή θερμότητας στην επάνω επιφάνεια} \\ \text{του όγκου ελέγχου με αγωγή} \end{bmatrix} = k\frac{T_{i,j,m} - T_{i,j+1,m}}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{2}$$

Εάν ο ρυθμός ογκομετρικής παραγωγής θερμότητας είναι $\dot{q}_{G,i,j,m}$ τότε ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας μέσα στον όγκο ελέγχου είναι:

$$\dot{q}_{G,i,j,m} = \frac{\Delta x\, \Delta y}{2}$$

Ο ρυθμός κατά τον οποίο η ενέργεια αποθηκεύεται στον όγκο ελέγχου ανά ένα χρονικό βήμα Δt είναι:

$$\rho c\, \frac{\Delta x\, \Delta y}{2}\, \frac{\mathrm{T_{i,j,m+1}} - \mathrm{T_{i,j,m}}}{\Delta t}$$

και η ενεργειακή ισορροπία του όγκου ελέγχου είναι:

$$k\frac{T_{i-1,j,m} - T_{i,j,m}}{\Delta x}\Delta y + k\frac{T_{i,j-1,m} - T_{i,j,m}}{\Delta y}\frac{\Delta x}{2} + \dot{q}_{G,i,j,m}\,\frac{\Delta x\, \Delta y}{2}$$
$$= q''_{x,i,j,m}\Delta y + k\frac{T_{i,j,m} - T_{i,j+1,m}}{\Delta y}\frac{\Delta x}{2} + \rho \cdot c\,\frac{\Delta x\, \Delta y}{2} \cdot \frac{T_{i,j,m+1} - T_{i,j,m}}{\Delta t}$$

το οποίο μπορεί να αναπροσαρμοστεί για να δώσει την οριστική εξίσωση για την οριακή θερμοκρασία στο επόμενο χρονικό βήμα, $T_{i,j,m+1}$:

$$T_{i,j,m+1} = T_{i,j,m}\left[1 - 2\alpha\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)\right] + T_{i-1,j,m}\left(\frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\right) + \left(T_{i,j-1,m} + T_{i,j+1,m}\right)\left(\frac{a\Delta t}{\Delta y^2}\right)$$
$$+ \dot{q}_{G,i,j,m}\left(\frac{a\Delta t}{k}\right) - q''_{x,i,j,m}\left(\frac{2a\Delta t}{k\Delta x}\right) \tag{13.26}$$

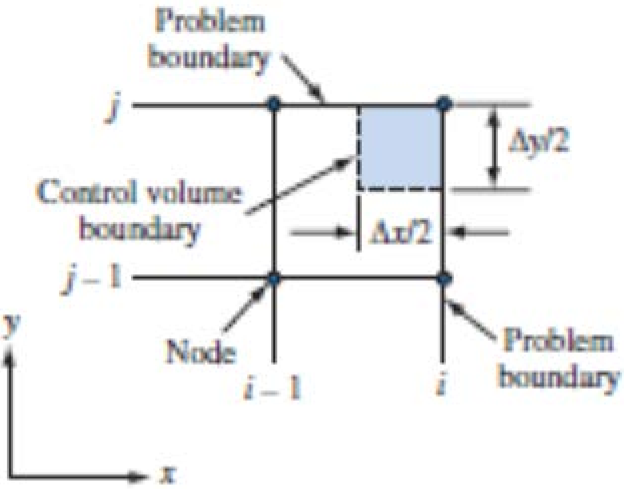
Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την εξωτερική γωνία, σχήμα 13.6, βρίσκουμε:

$$T_{i,j,m+1} = T_{i,j,m}\left[1 - 2\alpha\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)\right] + T_{i-1,j,m}\left(\frac{2a\Delta t}{\Delta x^2}\right) + T_{i,j-1,m}\left(\frac{2a\Delta t}{\Delta y^2}\right) + \left(\frac{a\Delta t}{k}\right) - \left(\frac{2a\Delta t}{k}\right)\left(q''_{x,i,j,m}\frac{1}{\Delta x} + q''_{y,i,j,m}\frac{1}{\Delta y}\right) \quad (13.27)$$

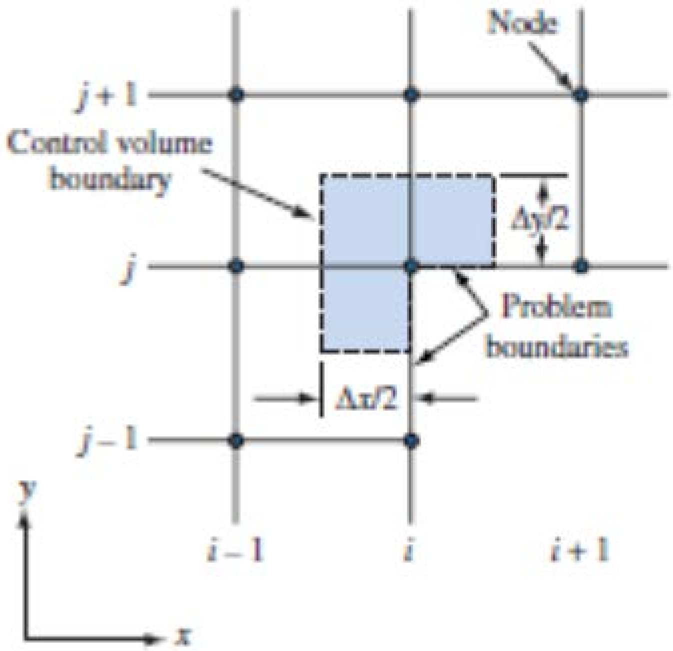
Όπου $q''_{y,i,j,m}$ είναι μία ειδικά ορισμένη ροή θερμότητας στην +y διεύθυνση στην άνω επιφάνεια του όγκου ελέγχου στον κόμβο i, j τη χρονική στιγμή m.

Συμπερασματικά, για την έσω γωνία όπως στο σχήμα 3.6

$$T_{i,j,m+1} = T_{i,j,m}\left[1 - 2\alpha\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)\right] + T_{i-1,j,m}\left(\frac{4}{3}\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) + T_{i+1,j,m}\left(\frac{2}{3}\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) + T_{i,j+1,m}\left(\frac{4}{3}\frac{a\Delta t}{\Delta y^2}\right) + T_{i,j-1,m}\left(\frac{2}{3}\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\right) + \dot{q}_{G,i,j,m}\left(\frac{a\Delta t}{k}\right) + \left(\frac{2}{3}\frac{a\Delta t}{k}\right)\left(-q''_{x,i,j,m}\frac{1}{\Delta x} + q''_{y,i,j,m}\frac{1}{\Delta y}\right) \quad (13.28)$$



Σχήμα 13.6 Οριακός Όγκος Ελέγχου για δισδιάστητη αγωγή – εξωτερική γωνία.



Σχήμα 13.7 Οριακός Όγκος Ελέγχου για δισδιάστητη αγωγή – εσωτερική γωνία.

Παρατηρούμε πως με την σύμβαση πρόσημου στις συγκεκριμένες οριακές ροές θερμότητας, μία θετική τιμή του $q''_{y,i,j,m}$ αυξάνει την θερμοκρασία στον κόμβο i, j, ενώ μία θετική τιμή του $q''_{x,i,j,m}$ μειώνει την θερμοκρασία στον κόμβο i, j.

Στην εξίσωση (13.26) μέχρι την (13.28) οι δείκτες i, j του οριακού όγκου ελέγχου εξαρτώνται από την θέση του οριακού όγκου ελέγχου μέσα στο πρόβλημα γεωμετρίας. Για παράδειγμα, για μία τριγωνική γεωμετρία, η γωνία και η ακμή όγκου ελέγχου στη δεξιά πλευρά του τριγώνου θα έχει i = M, η επάνω γωνία θα έχει j = N, η κάτω γωνία θα έχει j = 1, έτσι και η τέταρτη.

Η εξισώσεις ενεργειακής ισορροπίας για αυτούς τους οριακούς όγκους ελέγχου επιδεικνύουν τα δικά τους κριτήρια σταθερότητας όπως αναπαριστώνται από τους συντελεστές των $T_{i,j,m}$. Επειδή έχουμε επιλέξει την συγκεκριμένη οριακή συνθήκη ροής θερμότητας, αυτά τα κριτήρια είναι πανομοιότυπα με τα κριτήρια για τους εσωτερικούς όγκους ελέγχου. Όπως προτάθηκε από τις μονοδιάστατες ενεργειακές εξισώσεις οριακών όγκων ελέγχου για οριακές συνθήκες επιφανειακής αγωγής, θα περιμέναμε ότι η οριακή συνθήκη επιφανειακής αγωγής θα απαιτούσε περισσότερο περιορισμένα κριτήρια σταθερότητας για τα δισδιάστατα προβλήματα.

Οριακές συνθήκες εκφραζόμενες από τις (3.26) μέχρι (3.28) είναι ρητά ορισμένες. Υποθετικές εκδόσεις μπορούν να κληρονομηθούν σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία. Αντικαθιστούμε τον υποδείκτη m με τον $m+1$ σε όλα εκτός $T_{i,j,m}$ όρων στη δεξιά πλευρά των εξισώσεων. Για τον $T_{i,j,m}$ όρο, διατηρεί ο υποδείκτης m για τον όρο 1 μέσα στην αγκύλη και χρησιμοποιείται το m+1 για τον δεύτερο όρο μέσα στην αγκύλη. Για την υποθετική εξίσωση, υπολογίζουμε την αλλαγή θερμοκρασίας $T_{i,j,m+1} - T_{i,j,m}$ από τις θερμοκρασίες στο νέο χρονικό βήμα m+1 σε αντίθεση με το να υπολογίσουμε την αλλαγή θερμοκρασίας από τις θερμοκρασίες στο χρονικό βήμα m για τη ρητή εξίσωση.

Για οριακές εξισώσεις σταθερής κατάστασης, ο όρος που αναπαριστά τον ρυθμό της ενεργειακής αποθήκευσης

$$\rho c \ \frac{\mathrm{T_{i,j,m+1}} - \ \mathrm{T_{i,j,m}}}{\Delta t}$$

είναι, εξ ορισμού, μηδέν. Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα στις εξ. (13.26) με (13.28) με το να διαιρέσουμε με Δt με $\Delta t \rightarrow \infty$. Τότε οι δύο όροι σε κάθε εξίσωση που δεν είναι ανάλογοι του Δt αφαιρούνται. Για παράδειγμα η εξ. (13.26) γίνεται:

$$T_{i,j} = \frac{\frac{2a}{\Delta x^2} T_{i-1,j} + \frac{a}{\Delta y^2}\left(T_{i,j+1} + T_{i,j-1}\right) + \frac{a}{k}\dot{q}_{G,i,j} - \ q''_{x,i,j} \left(\frac{2a}{k\Delta x}\right)}{2\alpha\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)}$$

13.7 Μέθοδοι Επίλυσης για Μόνιμη Δισδιάστατη Αγωγή

Για σταθερή, δισδιάστατη αγωγή με παραγωγή θερμότητας, η εξ. (13.23) γίνεται:

$$\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}}{\Delta y^2}+\frac{\dot{q}_{G,i,j}}{k}=0 \qquad (13.29)$$

Παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία κάθε εσωτερικού κόμβου $T_{i,j}$ εξαρτάται από τους τέσσερις γειτονικούς του. Επιλύοντας για $T_{i,j}$ δίνει:

$$T_{i,j}=\frac{\Delta y^2(T_{i+1,j}+T_{i-1,j})+\Delta x^2(T_{i,j+1}+T_{i,j-1})+\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{k}\dot{q}_{G,i,j}}{2\Delta x^2+2\Delta y^2} \qquad (13.30)$$

$$1<i<M, \qquad 1<j<N$$

Οι δείκτες i, j περιορίζονται στα προτεινόμενα εύρη γιατί ειδικές εξισώσεις διαφορών σαν και αυτές που αναπτύχθηκαν στην Ενότητα 3.4.2 χρειάζονται στα όρια.
Η επαναληπτική μέθοδος που παρουσιάστηκε στην ενότητα 13.2 είναι ευθύτερη μέθοδος για την επίλυση της εξ.(13.30). Για να εφαρμόσει κανείς την επανάληψη Jacobi, αρχίζουμε με μία υπόθεση της κατανομής θερμοκρασίας για το πρόβλημα. Ονομάζουμε αυτή την υπόθεση της κατανομής θερμοκρασίας:

$$T_{i,j}{}^{(0)} \qquad 1\le i\le M,\;\; 1\le j\le N$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την δεξιά πλευρά της εξ.(13.30) και στις κατάλληλες οριακές συνθήκες, μπορούμε να υπολογίσουμε μία νέα τιμή $T_{i,j}$ για κάθε κόμβο. Δηλώνουμε αυτή την νέα κατανομή θερμοκρασίας με τον εκθέτη l, ή

$$T_{i,j}{}^{(l)} \qquad l\le i\le M,\;\; l\le j\le N$$

καθώς είναι η πρώτη αναθεώρηση στην αρχική μας υπόθεση, $T_{i,j}{}^{(0)}$. Η νέα κατανομή θερμοκρασίας είναι $T_{i,j}{}^{(1)}$ και τώρα χρησιμοποιείται στη δεξιά πλευρά της εξ, (13.30) για να δώσει μία νέα κατανομή θερμοκρασίας, $T_{i,j}{}^{(2)}$. Εάν συνεχίσουμε αυτή την επαναληπτική διαδικασία, η κατανομή της θερμοκρασίας θα συγκλίνει στην σωστή λύση δεδομένου ότι συναντούμε τα ίδια κριτήρια που ορίστηκαν στην ενότητα 13.2: Πρέπει να ορίσουμε τη θερμοκρασία για τουλάχιστον έναν οριακό κόμβο ή θα πρέπει να ορίσουμε μία οριακή συνθήκη τύπου σύγκλισης με δεδομένη διάχυτη θερμοκρασία ροής σε ένα τουλάχιστο κόμβο. Οι εναπομείναντα όρια μπορούν να έχουν οποιοδήποτε τύπο οριακής συνθήκης.

14. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΩΝ Μ.Δ.Ε.

14.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιαστούν βασικά αριθμητικά σχήματα επίλυσης υπερβολικών Μ.Δ.Ε. χρησιμοποιώντας τη πρότυπη παραβολική εξίσωση-μοντέλο που εκφράζει τη μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε μία διάσταση, τυπική παραβολική Μ.Δ.Ε.:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (9.66)$$

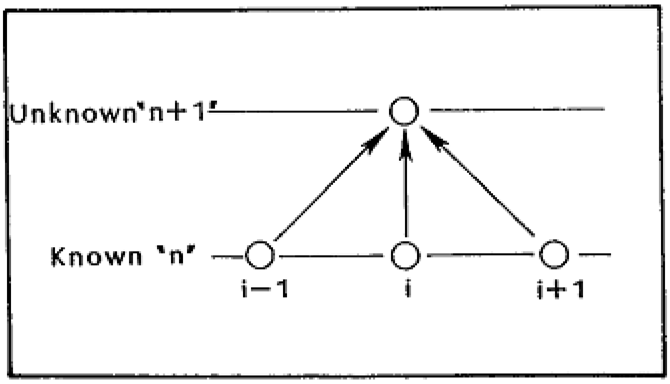
όπου το α είναι σταθερά.

14.2 Άμεση μέθοδος FTCS

Η μέθοδος αυτή συνίσταται από προς τα εμπρός διαφορές για τη χρονική παράγωγο (Forward in Time) και κεντρικές διαφορές για τη χωρική παράγωγο (Centered in Space). Έτσι η εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, γίνεται:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \qquad (9.67)$$

Το σχήμα αυτό είναι ευσταθές για $\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$. Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται γι'αυτή τη μέθοδο στην εξίσωση (9.57) φαίνεται στο σχήμα 9.14



Σχήμα 14.1: Σημεία Υπολογιστικού Πλέγματος για την άμεση μέθοδο FTCS

14.3 Άμεση Μέθοδος Richardson

Σε αυτή τη προσέγγιση, οι κεντρικές διαφορές χρησιμοποιούνται σε χρονικές και χωρικές παραγώγους. Για τη παραβολική εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών που προκύπτει είναι:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2 \cdot \Delta t} = \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Η οποία είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας, δηλαδή το σφάλμα που προκύπτει είναι $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$. Αποδεικνύεται πως αυτή η μέθοδος είναι άνευ όρων ασταθής, επομένως, δεν έχει πρακτική αξία.

14.4 Άμεση Μέθοδος DuFort-Frankel

Εφαρμόζεται επίσης για τη παραβολική εξίσωση $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Με αυτή τη μέθοδο η χρονική παράγωγος $\vartheta u / \vartheta t$ υπολογίζεται προσεγγιστικά από κεντρικές διαφορές της τάξης ακρίβειας $(\Delta t)^2$. Η δεύτερης τάξης χρονική παράγωγος επίσης προσεγγίζεται από μια κεντρική διαφορά της τάξης ακρίβειας $(\Delta x)^2$ όμως, λόγω ζητημάτων ευστάθειας, ο όρος u_i^n είναι ο όρος διάχυσης που αντικαθιστάται από τον μέσο όρο των u_i^{n+1} και u_i^{n-1}. Αυτή η διατύπωση είναι μια τροποποίηση της μεθόδου Richardson η εξίσωση πεπερασμένων διαφορών που προκύπτει είναι η:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2\frac{u_i^{n+1}+u_i^{n-1}}{2} + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{9.68}$$

Από την οποία λύνοντας ως προς u_i^{n+1}, προκύπτει:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}[u_{i+1}^n - u_i^{n+1} - u_i^{n-1} + u_{i-1}^n] \tag{9.69}$$

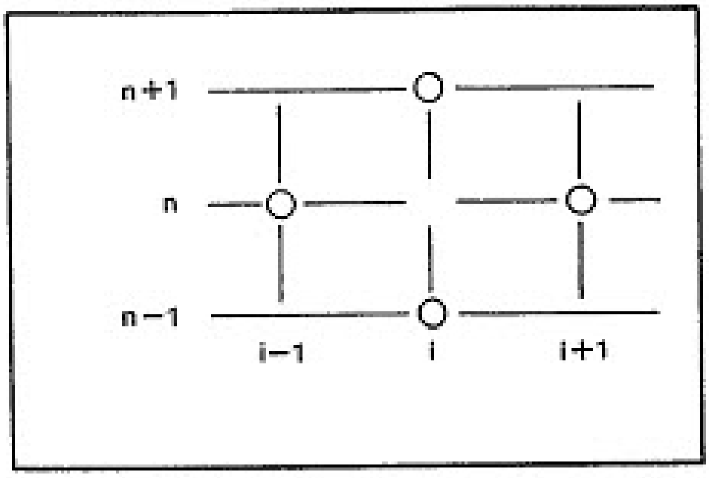
Παρόλο που η τιμή στο χρονικό επίπεδο *n+1* εμφανίζεται και στο δεξί μέρος της εξίσωσης, αυτή αναφέρεται είναι μόνο στο σημείο i και για το λόγο αυτό η εξίσωση μπορεί να λυθεί ρητά για τον άγνωστο u_i στο χρονικό επίπεδο *n+1*. Επομένως,

$$\left[1 + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right] u_i^{n+1} = \left[1 - 2\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right] u_i^{n-1} + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}[u_{i+1}^n + u_{i-1}^n] \tag{9.70}$$

Η μέθοδος είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας, πράγμα που σημαίνει ότι το σφάλμα είναι $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta t / \Delta x)^2]$. Είναι αρκετά ενδιαφέρον πως αυτή η μέθοδος είναι άνευ όρων ευσταθής! Ο επιπλέον όρος $(\Delta t / \Delta x)^2$ περιλαμβάνεται στον όρο σφάλματος σαν αποτέλεσμα της ανάλυσης ευστάθειας.
Οι τιμές του u_i στα χρονικά επίπεδα n και $n-1$ απαιτούνται για να ξεκινήσει ο υπολογισμός. Συνεπώς, είτε 2 σύνολα δεδομένων πρέπει να προσδιοριστούν, ή, από πρακτική άποψη, μια μέθοδος ενός βήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν εκκίνηση της επαναληπτικής διαδικασίας (δηλ. για $n = 1$. Βεβαίως, για την αρχική υπόθεση της λύσης βήματος Δt, μόνο ένα σύνολο αρχικών δεδομένων, για παράδειγμα στο $n-1$, απαιτείται για να παράγει την λύση στο n. Με τις τιμές των u_i να είναι ορισμένες στα n και $n-1$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος DuFort-Frankel. Δύο σημεία πρέπει να λάβουμε υπόψη σχετικά με αυτό το σύστημα:

- Πρώτον, η ακρίβεια της λύσης που παρέχεται από τη μέθοδο DuFort-Frankel επηρεάζεται από την ακρίβεια της αρχικής λύσης.
- Δεύτερον, δεδομένου ότι η λύση στον άγνωστο σταθμό απαιτεί δεδομένα από 2 προηγούμενα σημεία, οι απαιτήσεις αποθήκευσης του υπολογιστή θα αυξηθούν.

Τα σημεία του υπολογιστικού πλέγματος που εμπλέκονται στην εξίσωση (9.11) εμφανίζονται στο σχήμα 9.15.



Σχήμα 14.2: Σημεία Υπολογιστικού Πλέγματος για την μέθοδο Du Fort-Frankel

14.5 Σύνθετη μέθοδος Crank-Nicolson

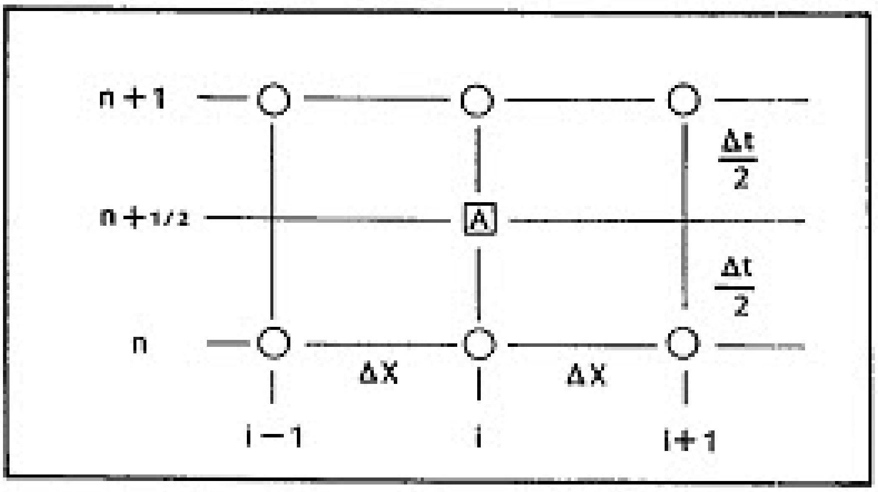
Αν ο όρος διάχυσης στην εξίσωση (6.76) αντικατασταθεί από τον μέσο όρο των κεντρικών διαφορικών στα χρονικά επίπεδα n και n+1, η διακριτοποιημένη εξίσωση θα ήταν της μορφής:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{(\Delta t)} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left[\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i+1}^{n}-2u_i^{n}+u_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right] \qquad (9.71)$$

Να σημειωθεί ότι η αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι κεντρικές διαφορές τάξης $\Delta t/2$, δηλαδή,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{2(\frac{\Delta t}{2})}$$

που είναι της τάξης ακρίβειας $(\Delta t)^2$. Όσον αφορά τα υπολογιστικά σημεία του πλέγματος (βλέπε σχήμα 9.16) η αριστερή πλευρά μπορεί να ερμηνευθεί ως η κεντρική διαφορικά αναπαράσταση των $\vartheta u/_{\vartheta t}$ στο σημείο A, ενώ η δεξιά πλευρά είναι ο μέσος του όρου διάχυσης στο ίδιο σημείο.



Σχήμα 14.3: Σημεία υπολογιστικού πλέγματος για τη μέθοδο Crank-Nicolson

Η μέθοδος μπορεί να θεωρηθεί ως η προσθήκη των δύο βαθμίδων υπολογισμού ως ακολούθως. Χρησιμοποιώντας την ρητή μέθοδο

$$\frac{u_i^{n+\frac{1}{2}}-u_i^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \alpha \frac{u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{9.72}$$

Ενώ χρησιμοποιώντας την πεπλεγμένη μέθοδο,

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \alpha \frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{9.73}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (9.72) και (9.73), παίρνουμε

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2}\cdot\left[\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right] \tag{9.65}$$

Να σημειωθεί ότι με αυτή τη διατύπωση είναι δύσκολο να αναγνωριστεί η τάξη ακρίβειας $(\Delta t)^2$ της χρονικής παραγώγου. Αυτή η έμμεση μέθοδος είναι άνευ όρων ευσταθής και είναι της τάξης ακρίβειας $[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$, δηλαδή ένα σύστημα δεύτερης τάξης.

14.6 Η Διατύπωση Βήτα

Μια γενική μορφή της πεπερασμένης διαφορικής εξίσωσης για την εξίσωση (9.56) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \alpha[\beta \frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\beta)\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}] \tag{9.66}$$

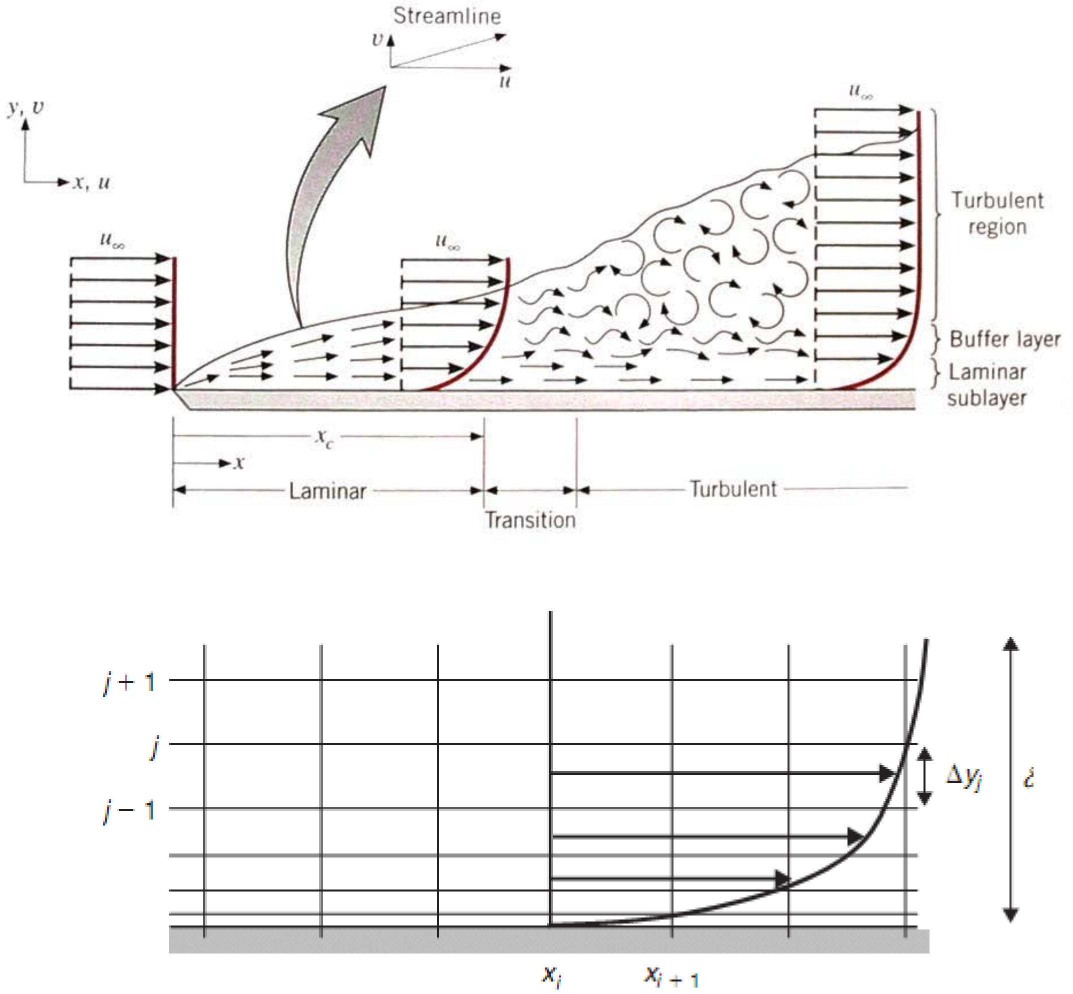
Για τιμές $1/2 \leq \beta \leq 1$, η μέθοδος είναι άνευ όρων ευσταθής. Να σημειωθεί για β= 1/2, η διατύπωση είναι η πεπλεγμένη μέθοδος Crank-Nicolson. Για $0 \leq \beta < 1/2$, η διατύπωση είναι υπό όρους ευσταθής. Για β=0, η διατύπωση είναι με προς τα εμπρός διαφορές ως προς το χρόνο και κεντρικές διαφορές ως προς το χώρο (FTCS), δηλαδή είναι ρητή.

15. ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ

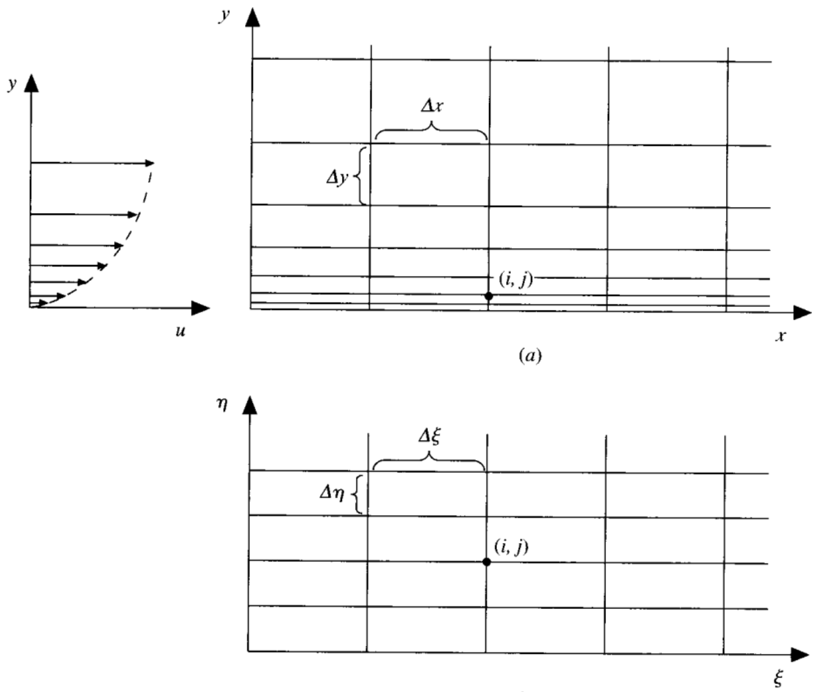
15.1 Ποιοτική περιγραφή Οριακού Στρώματος

Κατά τη θεωρία του Prandtl, η περίπτωση κίνησης πραγματικών ρευστών επάνω από στερεά σώματα συνοδεύονται από την εμφάνιση ενός πολύ λεπτού στρώματος κοντά στην επιφάνεια του στερεού σώματος.

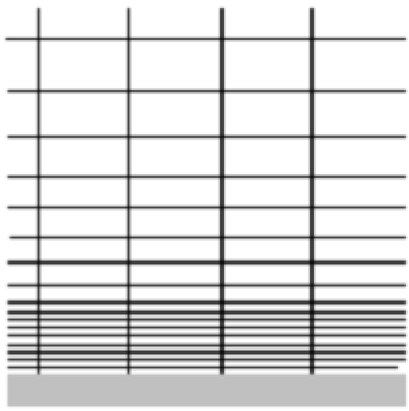
Στο στρώμα αυτό που ονομάζεται *οριακό στρώμα*, το ιξώδες της ροής κάνει αισθητή τη παρουσία του, ενώ εκτός της περιοχής αυτής, το ιξώδες παύει να αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για τη διαμόρφωση της ροής. Στη περιοχή εκτός οριακού στρώματος η ροή ελέγχεται από δυνάμεις αδράνειας και δυνάμεις πίεσης και μπορεί να θεωρηθεί άτριβη (και μπορεί να υπολογισθεί επιλύοντας τις εξισώσεις Euler). Αντίθετα εκτός της περιοχής του οριακού στρώματος η ροή ελέγχεται, εκτός από τις δυνάμεις αδράνειας και από τις δυνάμεις πίεσης και τις δυνάμεις τριβής.



Σχήμα 15.1: Οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα (άνω) και πλέγμα με πύκνωση κοντά στο τοίχωμα (κάτω).



Σχήμα 15.2: Πλέγμα με πύκνωση στη περιοχή του οριακού στρώματος. (α) Φυσικό ροϊκό πεδίο, (β) Μετασχηματισμός στο αριθμητικό πεδίο



Σχήμα 15.3: Λεπτομέρεια πλέγματος με πύκνωση στη περιοχή του οριακού στρώματος

15.2 Εξισώσεις οριακού στρώματος

Το 1904 ο Prandtl έκανε μια σημαντική συμβολή για τον υπολογισμό του συγκεκριμένου τύπου ροή για πολύ μεγάλους ο αριθμού Reynolds.

Ο αδιάστατος αριθμός Reynolds έχει τη μορφή:

$$Re = \frac{L \cdot u}{\nu} = \frac{\rho \cdot L \cdot u}{\mu} \tag{15.1}$$

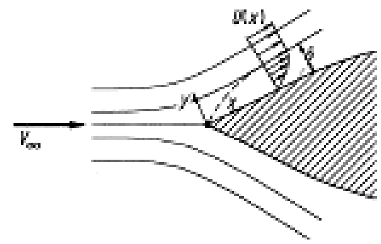
όπου L είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος, συνήθως το μήκος του σώματος θεωρείται, u είναι η ταχύτητα της αδιατάραχτης ροής μακριά από την επιφάνεια του σώματος που εξετάζουμε. Το κινηματικό και δυναμικό ιξώδες δηλώνονται με ν και μ, αντίστοιχα. Η πυκνότητα του ρευστού είναι ρ. Η φυσική σημασία του αριθμού Reynolds είναι ότι εκφράζει τον λόγο δυνάμεων αδράνειας προς δυνάμεις τριβής:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot \frac{\vartheta u}{\vartheta x}}{\mu \cdot \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x^2}} = \frac{\Delta υνάμεις\ αδράνειας}{\Delta υνάμεις\ τριβής} \qquad (15.2)$$

Η ταχύτητα u, σε κάποιο σημείο στον ροϊκού πεδίου είναι ανάλογη με την ταχύτητα της ελεύθερης ροής U (που είναι η ταχύτητα εκτός της περιοχής του οριακού στρώματος). Η βαθμίδα της ταχύτητας $\partial u/\partial x$ είναι ανάλογη του λόγου U/L και παρόμοια η δεύτερη παράγωγος $\partial^2 u/\partial x^2$ είναι ανάλογη της ποσότητας U/L^2. Έτσι ο αριθμός Reynolds που δίνεται από την εξίσωση (15.2) μπορεί να γραφεί:

$$Re = \frac{\frac{\rho \cdot U^2}{L}}{\frac{\mu \cdot U}{L^2}} = \frac{\rho \cdot L \cdot U}{\mu} \qquad (15.3)$$

Δύο ροϊκά πεδία είναι όμοια και από την άποψη της αναλογίας αδρανειακών δυνάμεων και δυνάμεων ιξώδους αν οι αριθμοί Reynolds των δύο αυτών ροών είναι ίσοι μεταξύ τους. Ας θεωρήσουμε τώρα το ροϊκό πεδίο υψηλό αριθμό Reynolds γύρω από αξονοσυμμετρικό σώμα που φαίνεται στο σχήμα 15.4.



Σχήμα 15.4: Ροϊκό πεδίο οριακού σώματος κατά μήκος σώματος

Με εξαίρεση την περιοχή του ρευστού κοντά στην επιφάνεια του σώματος, η ταχύτητα του ροϊκού πεδίου είναι συγκρίσιμη με την ταχύτητα της ελεύθερης ροής U. Αυτή η περιοχή της ροής μακριά από την επιφάνεια του σώματος (ελεύθερη ροή) είναι σχεδόν χωρίς τριβή είναι δυναμική ροή (potential flow). Λαμβάνοντας υπόψη ότι στη περιοχή κοντά στην επιφάνεια του σώματος υπάρχει τριβή στη ροή, αυτό σημαίνει ότι το ρευστό επιβραδύνεται μέχρι να ακουμπήσει την επιφάνεια του σώματος. Στο σημείο ακριβώς που ακουμπά το ρευστό την επιφάνεια του σώματος η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδέν. Η μετάβαση από ταχύτητα μηδέν στην επιφάνεια έως το πλήρες μέγεθος της ταχύτητας της ελεύθερης ροής σε κάποια απόσταση από την επιφάνεια του σώματος, λαμβάνει χώρα σε ένα πολύ λεπτό στρώμα, που ονομάζεται «οριακό στρώμα» (*boundary layer*).
Το πάχος του οριακού στρώματος, δ, είναι συνάρτηση της συντεταγμένης x κατά μήκος του σώματος. Υποτίθεται ότι το πάχος του οριακού στρώματος, δ, είναι πολύ μικρό σε σχέση με το μήκος του σώματος L.
Στην κάθετη διεύθυνση y στο εσωτερικό του λεπτού οριακού στρώματος η βαθμίδα $\partial u/\partial y$ είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με βαθμίδες κατά μήκος της ροής $\partial u/\partial x$. Αν και το ιξώδες του ρευστού είναι μικρό, η διατμητική τάση που ορίζεται ως:
$\tau = \mu \cdot (\partial u/\partial x)$ μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές. Έξω από τη λεπτή περιοχή του οριακού στρώματος οι βαθμίδες της ταχύτητας είναι πολύ μικρές και η επιρροή του ιξώδους είναι ασήμαντη. Η ροή εκεί είναι άτριβη και δυναμική.
Οι παραπάνω παραδοχές που χρησιμοποιούνται τώρα για την απλούστευση των εξισώσεων Navier-Stokes για χρονικά μόνιμη δισδιάστατη στρωτή ροή και ασυμπίεστο ρευστό, γράφονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \qquad (15.4)$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) \qquad (15.5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \qquad (15.6)$$

Εδώ οι συνιστώσες $\bar{u}$ και $\bar{v}$ της ταχύτητας ενός σημείου κατευθύνονται προς κύρια x-διεύθυνση της ροής και στη κάθετη y-διεύθυνση, αντίστοιχα. Η στατική πίεση συμβολίζεται με $\bar{P}$ η πυκνότητα συμβολίζεται με ρ και μ είναι το δυναμικό ιξώδες του ρευστού.
Κάποιοι από τους όρος των εξισώσεων (15.4), (15.5), (15.6) μπορούν να παραλειφθούν κάνοντας διαστατική ανάλυση.
Για την καλύτερη διαχείριση, το παραπάνω σύστημα των διαφορικών εξισώσεων αδιαστατοποιείται με τις παρακάτω παραμέτρους:

$$x = \frac{\bar{x}}{L} = O(1)$$

$$y = \frac{\bar{y}}{L} = O(\varepsilon) \qquad (15.7)$$

$$u = \frac{\bar{u}}{U} = O(1)$$

Η συνιστώσα $\bar{u}$ της ταχύτητας κατά μήκος της πλάκας μεταβάλλεται από τη τιμή 0 επάνω στην επιφάνεια της πλάκας έως τη τιμή U στο εξωτερικό άκρο του οριακού στρώματος. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε σαν μέγεθος αναφοράς τη ταχύτητα της ελεύθερης ροής U. Άρα η αδιάστατη συνιστώσα u είναι τάξης μεγέθους 1.
Ο ορισμός του πάχους του οριακού στρώματος δ είναι η απόσταση από το τοίχωμα όπου η τοπική ταχύτητα του ρευστού εντός του οριακού στρώματος διαφέρει κατά 1% από την εξωτερική ταχύτητα ελεύθερης ροής.

$$v = \frac{\bar{v}}{U} \cdot \frac{L}{\delta} = O(\varepsilon)$$

Η αδιάστατη συνιστώσα v της ταχύτητας πρέπει να είναι τάξης ε όπως προκύπτει από την εξίσωση συνέχειας.

Η παράγωγος $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = O\left(\frac{U}{L}\right)$ Η παράγωγος $\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = O\left(\frac{U}{L}\right)$ Η παράγωγος $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = O\left(\frac{U}{\delta}\right)$

Ο όρος $\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = O\left(\frac{U^2}{L}\right)$ Ο όρος $\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = O\left(\frac{U^2}{L}\right)$

Ο όρος $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = O\left(\frac{U}{L^2}\right)$ Ο όρος $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = O\left(\frac{U}{\delta^2}\right)$

$$P = \frac{\bar{P}}{\bar{\rho} \cdot U^2} = O(1)$$

$$Re = \frac{\bar{\rho} \cdot L \cdot U}{\bar{\mu}} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\bar{v} = O\left(\frac{\delta}{L}\right) << \bar{u}$$

Όπως προαναφέρθηκε το πάχος οριακού στρώματος, δ, είναι πολύ μικρό, όπως μικρή είναι η απόσταση y σε σχέση με το μήκος του σώματος L. Συνεπώς η απόσταση y είναι της τάξης ε που έχει μια τιμή πολύ μικρότερη από ότι τη τάξη μεγέθους 1.

Επίσης η παράγωγος $\partial u/\partial x$ είναι της τάξης 1, επειδή η μέγιστη τιμή του x είναι το μήκος L, τότε ο δεύτερος όρος στην εξίσωση συνέχειας $\partial v/\partial y$ πρέπει επίσης να είναι της τάξης 1.

Κατά συνέπεια, συνιστώσα v της ταχύτητας δεν είναι μεγαλύτερη από το ε. Τώρα με τις παραπάνω υποθέσεις, μπορεί να γίνει η διαστατική ανάλυση του προβλήματος. Όπως προκύπτει από την πρώτη εξίσωση της κίνησης (ορμής), ότι μέσα στο οριακό στρώμα οι δυνάμεις αδράνειας μπορούν να έχουν την ίδια τάξη μεγέθους με τις δυνάμεις τριβής, μόνο αν ο αριθμός Reynolds είναι της τάξης $1/\varepsilon^2$.
Η εξίσωση της συνέχειας παραμένει αναλλοίωτη για πολύ μεγάλους αριθμούς Reynolds. Η εξίσωση της ορμής στη x-διεύθυνση μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο, θεωρώντας ότι η δεύτερη παράγωγος της συνιστώσας u της ταχύτητας $\partial^2 u/\partial x^2$ που πολλαπλασιάζεται επί $1/Re$ έχει την μικρότερη τάξη μεγέθους σε αυτήν την εξίσωση και άρα επειδή είναι πολύ μικρή ποσότητα, απλοποιείται.

Επίσης έχουμε ότι $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} << \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}$ και για αυτό το λόγο μπορούμε να αμελήσουμε τον όρο $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}$ από την εξίσωση της ορμής στη x-διεύθυνση.
Στην εξίσωση (15.4) x-διεύθυνση ορμής, η τάξη μεγέθους των όρων στο αριστερό μέρος της εξίσωσης πρέπει να είναι ίδια με τη τάξη μεγέθους των όρων στο δεξί μέρος της εξίσωσης. Άρα:

$$\frac{U^2}{L} = O\left(\frac{U}{\delta^2}\right) \qquad \text{ή} \qquad \frac{\delta}{L} = O\left(\sqrt{\frac{\mu}{\rho UL}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πάχος του οριακού στρώματος είναι μικρό σε σχέση με τη χαρακτηριστική διάσταση της πλάκας σε υψηλούς αριθμούς Reynolds.

Χρησιμοποιώντας τη παραπάνω συσχέτιση του πάχους δ με τον αριθμό Reynolds, γ εξίσωση της ορμής στη y-διεύθυνση (εξ. (15.5)) μας δίνει ότι τρεις από τους όρους που εμφανίζονται δηλ. οι όροι:

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}},\ \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}},\ \frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2} = O\left(\frac{U^2\delta}{L^2}\right) >> \frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}$$

Σύγκριση αυτού του αποτελέσματος με το ότι

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} = O\left(\frac{U^2}{L}\right),\ \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = O\left(\frac{U^2}{L}\right),\ \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} = O\left(\frac{U}{L^2}\right),\ \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} = O\left(\frac{U}{\delta^2}\right)$$

Μας δείχνει ότι $\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{y}} << \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{x}}$ πράγμα που σημαίνει ότι η εξίσωση της ορμής στη y-διεύθυνση δεν χρησιμεύει και κατά συνέπεια η πίεση είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x. Άρα $\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{x}} = \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}}$

Μέσα στη περιοχή του οριακού στρώματος οι δυνάμεις ιξώδους (συνεκτικότητας) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις δυνάμεις αδράνειας. Αυτό σημαίνει ότι μέσα στο οριακό στρώμα έχουμε ότι:

$$\frac{\mu}{\rho UL}\cdot\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 = O(1) \Rightarrow \delta = O\left(Re^{-1/2}L\right)$$

Αντικαθιστώντας τα διαστατικά μεγέθη που έχουν παύλα $\bar{}$ με τα αδιάστατα μεγέθη, έχουμε:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (15.8)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (15.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (15.10)$$

Όλοι οι όροι της εξίσωση ορμής στη κάθετη διεύθυνση y της ροής (εξίσωση (15.9)) είναι μία τάξη μεγέθους μικρότεροι από εκείνες της κύριας x-διεύθυνσης της ροής (εξίσωση (15.8)). Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί παρά να είναι σε ισορροπία, αν ο όρος πίεση είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τους υπόλοιπους όρους. Ως εκ τούτου, αυτή η εξίσωση παρέχει πληροφορίες της αμελητέας διαφοράς πίεσης κατά τη κάθετη y-διεύθυνση της ροής, δηλαδή

$$\frac{\partial p}{\partial y}=O(\varepsilon) \qquad (15.11)$$

Η σημασία αυτής της εξίσωσης είναι ότι η πίεση είναι πρακτικά σταθερή κατά πλάτος του οριακού στρώματος. Ως εκ τούτου, η πίεση P είναι μόνο συνάρτηση του x.

Αν η κατανομή της ταχύτητας στο εξωτερικό άκρο του οριακού στρώματος όπου η ροή είναι άτριβη (έξω από το οριακό στρώμα) είναι γνωστή, $U(x)=\bar{u}(x)/V$ η παραγώγιση της εξίσωσης (15.8) δίνει:

$$U\cdot\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dx} \qquad (15.12)$$

Οι όροι που περιέχουν τη ποσότητα $\partial u/\partial y$ είναι μηδέν, διότι δεν υπάρχει μεγάλη βαθμίδα της ταχύτητας έξω από το οριακό στρώμα. Μετά την ολοκλήρωση της (15.12) βρίσουμε τη γνωστή εξίσωση του Bernoulli

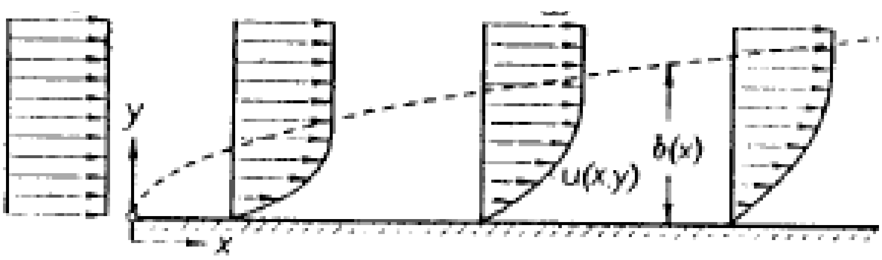
$$P+\frac{1}{2}\rho U^2=\sigma\tau\alpha\theta. \qquad (15.13)$$

Καθώς ο αριθμός $Re\rightarrow\infty$, οι εξισώσεις Navier-Stokes (15.8) και (15.9) καθώς και η εξίσωση της συνέχειας (15.10) απλοποιούνται. Οι εξισώσεις που προέκυψαν είναι γνωστές σαν «εξισώσεις του οριακού στρώματος του Prandtl», που είναι:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (15.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (15.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (15.16)$$



Οι οριακές συνθήκες είναι:
Στην επιφάνεια του σώματος:

Για $\quad y = 0 \quad$ έχουμε ότι $\quad u = 0, \quad v = 0 \qquad (15.15)$

Στην εξωτερική πλευρά του οριακού στρώματος:

$$y = \delta = \frac{\bar{\delta}}{L} \qquad u = U(x) \tag{15.18}$$

Αυτό το σύνολο των εξισώσεων μειώνεται σε έναν άγνωστο που είναι η πίεση P, η οποία, μπορεί να προσδιοριστεί με την εξίσωση Bernoulli (15.13), αρκεί να είναι δεδομένη η κατανομή της ταχύτητας της άτριβης ροής *U(x)* στην εξωτερική επιφάνεια του οριακού στρώματος. Εξακολουθούμε όμως να έχουμε ένα συνδεδεμένο σύστημα μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

Η διαστατική ανάλυση που περιγράφεται επίσης από τον Schlichting είναι κατάλληλη για την ανάλυση των πιο περίπλοκων ροών που διέπονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes σε επιφάνειες σωμάτων με καμπύλη επιφάνεια δημιουργούνται δυνάμεις Coriolis καθώς και φυγόκεντρες δυνάμεις. Η διαστατική ανάλυση μας παρέχει πληροφορίες για το κατά πόσο οι εξισώσεις οριακού στρώματος και οι πιο περίπλοκες επεκτάσεις τους μπορούν να προσεγγίσουν τις πλήρεις εξισώσεις Navier – Stokes.

Η διατμητική τάση επάνω στο τοίχωμα (y=0) ορίζεται ως:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

Μέσα στο οριακό στρώμα, οι δυνάμεις αδράνειας είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις δυνάμεις τριβής. Έτσι έχουμε ότι:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu \cdot \frac{U}{\delta^2}$$

Οι δυνάμεις αδράνειας όπως ο όρος $\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$ είναι ανάλογες του $\sim \rho \frac{U^2}{L}$

Έτσι μέσα στο οριακό στρώμα έχουμε ότι

$$\rho \frac{U^2}{L} \sim \mu \cdot \frac{U}{\delta^2} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\mu \cdot L}{\rho \cdot U}} \sim \sqrt{\frac{\nu \cdot L}{U}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

Η διατμητική τάση στο τοίχωμα είναι

$$\tau_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \sim \left(\frac{U}{\delta}\right)$$

Αλλά $\delta \sim \sqrt{\frac{\mu \cdot L}{\rho \cdot U}}$ ή $\delta \sim \sqrt{\nu}$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι

$$\tau_0 \sim \mu \cdot U \sqrt{\frac{\rho \cdot U}{\mu \cdot L}} \sim \sqrt{\frac{\rho \cdot \mu \cdot U^3}{L}} \Rightarrow \tau_0 \sim U^{3/2}$$

Άρα η διατμητική τάση επάνω στο τοίχωμα (y=0) είναι ανάλογη της ταχύτητας της ελεύθερης ροής στη δύναμη 3/2.

Αδιαστατοποιώντας τη διατμητική τάση διά τη δυναμική πίεση έχουμε ότι:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho \cdot U \cdot L}} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

Εντός του οριακού στρώματος, η πίεση στη κάθετη διεύθυνση κάθετη προς αυτή της κύριας ροής (δηλ. κατά τον άξονα y) είναι σταθερή και ίση με τη πίεση έξω από το οριακό στρώμα εκεί όπου η ροή είναι δυναμική και άτριβη. Η πίεση της δυναμική ροής «επιβάλλεται» στο οριακό στρώμα. Μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί γνωστή και είναι συνάρτηση μόνο της κύριας διεύθυνσης x της ροής και του χρόνου t.
Εξωτερικά του οριακού στρώματος η ταχύτητα του ρευστού που είναι παράλληλη με τον άξονα x συμβολίζεται με $U(x,t)$. Επειδή στην εξωτερική περιοχή δεν υπάρχουν μεγάλες βαθμίδες ταχύτητας, οι όροι ιξώδους μπορούν να παραλειφθούν για μεγάλες τιμές του αριθμού Reynolds

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Στη περίπτωση μόνιμης ροής, η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται περισσότερο και έρχεται στη μορφή

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} \Rightarrow \rho U dU = -dP \Rightarrow \frac{1}{2}\rho U^2 + P = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

που είναι η εξίσωση του Bernoulli.

Πάχος Ορμής
Η επιβραδυνόμενη ροή εντός του οριακού στρώματος εκτός από την επιβράδυνση μάζας και μείωση της εισροής της ορμής στο οριακό στρώμα.
Έτσι κατ' αναλογία με το πάχος δ_1 μπορεί να οριστεί ένα άλλο πάχος δ_2 ως μέτρο απώλειας ορμής εντός του οριακού στρώματος.

$$\delta_2 \cong \int_0^{\delta} \frac{U_x}{U_\infty}\left(1 - \frac{U_x}{U_\infty}\right) dy$$

Ο λόγος πάχους μετατόπισης δ_1 προς το πάχος ορμής δ_2 ονομάζεται παράγοντας σχήματος (shape factor) Θ

$$\Theta = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

Οπισθέλκουσα δύναμη

$$D = C_D \frac{\rho\, U_\infty^2}{2} A$$

όπου:
A: επιφάνεια όπου αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις
C_D: συντελεστής οπισθέλκουσας
C_f = συντελεστής τριβής, $\tau_w = C_f \frac{\rho\, U_\infty^2}{2}$

Πάχος μετατόπισης
Συμβολίζεται με δ_1 και μπορεί να θεωρηθεί ως η απόσταση κατά την οποία πρέπει να μετατοπιστεί το στερεό τοίχωμα ώστε παροχή μάζας του ρευστού να παραμένει η ίδια σε μία υποθετική άτριβη ροή γύρω από το σώμα.

Εντός του οριακού στρώματος υπάρχει επιβράδυνση της ροής ($U_x < U_\infty$) η οποία οφείλεται στις διατμητικές τάσεις και έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της εισροής μάζας σε αυτό, σε σύγκριση με την εισροή μάζας που θα παρατηρείται δίχως την ανάπτυξη οριακού στρώματος.

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U_x}{U_\infty}\right) dy$$

Επειδή για $y \geq \delta \quad \rightarrow U_x \approx U_\infty$, τότε $\delta_1 \cong \int_0^\delta \left(1 - \frac{U_x}{U_\infty}\right) dy$

Το πάχος μετατόπισης δ_1 μας λέει το πόσο πρέπει να μετατοπιστούν οι ροϊκές γραμμές της εξωτερικής δυναμικής ροής λόγω της τριβής με το τοίχωμα του σώματος.

<u>Πάχος Οριακού Στρώματος</u>

Συνήθως, το πάχος οριακού στρώματος ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ της επιφάνειας του στερεού και του σημείου του πεδίου ροής, στο οποίο η ταχύτητα έχει τιμή ίση με το 99% της ταχύτητας της ελεύθερης ροής μακριά από το στερεό.

Δηλ.

$$\delta = {}^{y}/_{U_x} \qquad \text{όπου } U_x = 0{,}99 \cdot U_\infty$$

Ένας άλλος ορισμός του πάχους του οριακού στρώματος είναι ότι αυτό είναι το τριπλάσιο του πάχους μετατόπισης δ_1

Δηλ. $\delta = 3 \cdot \delta_1$

Για το οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα οι δυνάμεις αδράνειας είναι:

$$\rho\, U_x \frac{\vartheta U_x}{\vartheta_x} \sim \rho \frac{U_\infty^2}{x}$$

Οι δυνάμεις ιξώδους είναι

$$\mu \frac{\vartheta^2 U_x}{\vartheta y^2} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

Οπότε αφού οι δυνάμεις αδράνειας είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις δυνάμεις τριβής, τότε:

$$\rho \frac{U_\infty^2}{x} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\mu\, x}{\rho\, U_\infty}} \text{ ή } \delta \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

Η σταθερή αναλογία μεταξύ δ και ${}^{x}/_{\sqrt{Re_x}}$ εξαρτάται από τη μορφή της κατανομής της ταχύτητας εντός του οριακού στρώματος.

Ο συντελεστής άντωσης ορίζεται ως:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας ορίζεται ως:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

Η συνολική δύναμη οπισθέλκουσας στην επίπεδη πλάκα είναι:

$$D = b \cdot L \cdot \tau_0$$

όπου b το πάτος της επίπεδης πλάκας και L το μήκος της.

Με τη χρήση της εξίσωσης που δίνει τη διατμητική τάση, έχουμε ότι η οπισθέλκουσα είναι:

$$D \sim b \cdot \sqrt{\rho \cdot \mu \cdot U^3 \cdot L}$$

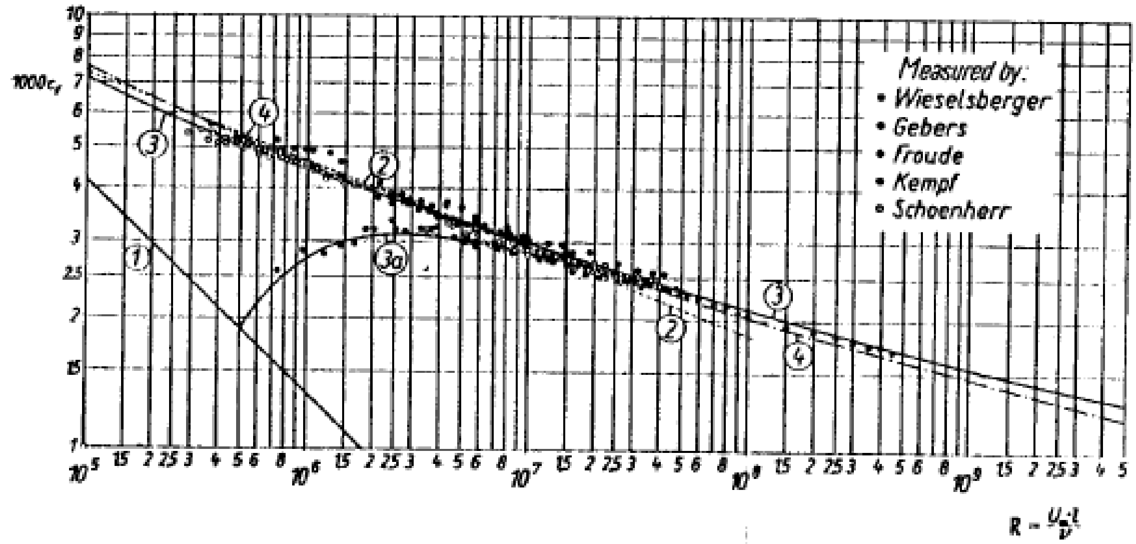
Η οπισθέλκουσα στη στρωτή ροή είναι ανάλογη των ποσοτήτων $U^{3/2}$ και $L^{1/2}$. Η αναλογία $L^{1/2}$ σημαίνει ότι αν διπλασιάσουμε το μήκος της πλάκας, η οπισθέλκουσα δεν διπλασιάζεται. Επίσης σημαίνει ότι το πίσω τμήμα της πλάκας συνεισφέρει λιγότερο στην οπισθέλκουσα απ'ότι το χείλος προσβολής, διότι το οριακό στρώμα είναι πιο παχύ στο χείλος εκφυγής της πλάκας.

15.2 Στρωτό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

Έχοντας ορίσει τον αριθμό Reynolds για την επίπεδη πλάκα ως:

$$Re = \frac{\rho \cdot L \cdot U}{\mu}$$

με μεγέθη αναφοράς τη ταχύτητα της ελεύθερης ροής U και το μήκος της πλάκας L, σύμφωνα με τον Blasius, η ροή επάνω από τη πλάκα είναι στρωτή, αν $Re < 5 \cdot 10^5 - 10^6$. Η κατανομή του συντελεστή τριβής σε συνάρτηση με τον αριθμό Reynolds φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η καμπύλη (1) που καταγράφει χαμηλότερες τιμές του συντελεστή τριβής αντιστοιχεί σε στρωτή ροή επάνω από τη πλάκα. Οι υπόλοιπες καμπύλες αντιστοιχούν σε τυρβώδη ροή.



Συντελεστής τριβής σε συνάρτηση με τον αριθμό Reynolds για ροή επάνω από επίπεδη πλάκα. (1) Στρωτό οριακό στρώμα σύμφωνα με τη λύση Blasius, (2) Τυρβώδες οριακό στρώμα, (3) Τυρβώδες οριακό στρώμα σύμφωνα με τον Prandtl, (3$^{\alpha}$) Τυρβώδες οριακό στρώμα σύμφωνα με τους Prandtl-Schlichting, (4) Τυρβώδες οριακό στρώμα σύμφωνα με τους Schultz-Grunow

<u>Οριακές Συνθήκες</u>

$u|_{y=0} = 0$

$u|_{y=\delta} = U_\infty$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0$$

Η κατανομή ταχύτητας μέσα στο οριακό στρώμα, σύμφωνα με τον Prandlt είναι :

$$\frac{U_x}{U_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

Τότε προκύπτει ότι δ= $4.64\sqrt{\frac{vx}{U_\infty}}$ ή $\delta = \frac{4.64x}{\sqrt{Re_x}}$

Το πάχος μετατόπισης δίνεται από τη σχέση: $\delta_1 = \frac{1{,}74x}{\sqrt{Re_x}}$

Το πάχος ορμής δίνεται από τη σχέση: $\delta_2 = \frac{0{,}646x}{\sqrt{Re_x}}$

Ο λόγος πάχους μετατόπισης διά το πάχος ορμής είναι: $\theta = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 2.69$

Η διατμητική τάση στο τοίχωμα είναι: $\tau_w = 0.323\,\frac{\mu\, U_\infty}{x}\sqrt{Re_x}$

Ο συντελεστής τριβής είναι: $C_f = \frac{0{,}646}{\sqrt{Re_x}}$

Η οπισθέλκουσα είναι: $D = 0.646\ \mu\ U_\infty\ \mathrm{b}\ \sqrt{Re_l}$ όπου $Re_l = \frac{U_\infty l}{v}$

b= πλάτος της πλάκας

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας είναι: $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = \frac{1{,}292}{\sqrt{Re_l}} = 2\ C_{f\,(x=l)}$

15.3 Τυρβώδες Οριακό Στρώμα

Οι έχοντας κάνει τη παραδοχή ότι σε τυρβώδη ροή, το κάθε ροϊκό μέγεθος μπορεί να γραφεί σαν τη μέση τιμή του συν τη διακύμανση γύρω από τη μέση τιμή, έχουμε ότι:

$$u = \overline{u} + u', \quad v = \overline{v} + v', \quad P = \overline{P} + P'$$

Έτσι οι εξισώσεις Navier-Stokes για τη περίπτωση του δισδιάστατου οριακού στρώματος σε τυρβώδη ροή γράφονται:

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'}\right)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} = 0$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ο όρος $\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2 - v'^2}\right)$ μπορεί να αμεληθεί. Συγκρίνοντας τις παραπάνω εξισώσεις με αυτές του στρωτού οριακού στρώματος, βλέπουμε ότι:

(α) Οι ροϊκές ταχύτητες u, v και η πίεση P έχουν αντικατασταθεί με τις μέσες τιμές τους $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{P}$
(β) Οι όροι μετάδοσης ορμής με αδράνεια καθώς και η πίεση παραμένουν ίδιοι, αλλά η δύναμη ιξώδους έχει πάρει τη μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'}\right)$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι η δύναμη ιξώδους στη στρωτή ροή, αντικαταστάθηκε με τη βαθμίδα του αθροίσματος της διατμητικής τάσης στρωτής ροής συν τη διατμητική τάση τυρβώδους ροής, δηλ.:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_l + \tau_t)$$

όπου $\tau_l = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα και $\tau_t = -\rho\overline{u'v'}$ που ονομάζονται τάσεις Reynolds (Reynolds stresses).

Οριακές συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες για τις μέσες τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας είναι ίδιες με αυτές που αντιστοιχούν στη στρωτή ροή, δηλ.

$u|_{y=0} = 0$

$u|_{y=\delta} = U_\infty$

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0$

$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0$

Οι τυρβώδεις συνιστώσες πρέπει να μηδενίζονται στα στερεά τοιχώματα και πρέπει να έχουν μικρές τιμές κοντά στα τοιχώματα. Άρα όλοι συντελεστές του τένσορα των τάσεων Reynolds είναι μηδέν επάνω σε στερεά τοιχώματα και μόνο οι τάσεις που ασκούνται κοντά στα τοιχώματα είναι οι ιξώδεις τάσεις της στρωτής ροής. Έχει αποδειχτεί ότι κοντά σε στερεά τοιχώματα οι τάσεις Reynolds είναι μικρές σε σύγκριση με τις ιξώδεις τάσεις και έτσι έχουμε ότι σε κάθε τυρβώδη ροϊκό πεδίο υπάρχει ένα πολύ λεπτό στρώμα κοντά σε στερεά τοιχώματα, όπου το ροϊκό πεδίο συμπεριφέρεται σαν στρωτό. Αυτή η περιοχή ονομάζεται *στρωτό υπόστρωμα* (viscous sub-layer). Εκεί η ταχύτητα του ρευστού είναι πάρα πολύ μικρή και οι δυνάμεις ιξώδους είναι μεγαλύτερες από τις δυνάμεις αδράνειας. Στο στρωτό υπόστρωμα δεν υπάρχει τύρβη. Το στρωτό υπόστρωμα είναι η σύνδεση μεταξύ ενός μεταβατικού στρώματος στο οποίο οι διακυμάνσεις της ταχύτητας είναι τόσο μεγάλες, που δημιουργούν τυρβώδεις διατμητικές τάσεις που είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις ιξώδεις τάσεις. Σε ακόμη μεγαλύτερη απόσταση από το τοίχωμα οι τυρβώδεις τάσεις υπερισχύουν από τις ιξώδεις τάσεις.
Το πάχος του στρωτού υποστρώματος είναι τόσο μικρό που είναι πολύ δύσκολο να το παρατηρήσουμε πειραματικά. Είναι όμως καθοριστικής σημασίας για το καθορισμό της διατμητικής τάσης επάνω στο τοίχωμα και της δύναμης οπισθέλκουσας.

Κατανομή ταχύτητας: $\frac{U_x}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = w^{\frac{1}{7}}$

Διατμητική τάση στο τοίχωμα: $\tau_w = 0.0225\ \rho\ U_O^2 \left(\frac{V}{U_0\,\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$

Πάχος οριακού στρώματος: δ = 0.37 $\left(\frac{v}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}}$, δ = 0.37 x $Re_x^{-\frac{1}{5}}$

Πάχος μετατόπισης: $\delta_1 = \frac{1}{8}\delta$

Πάχος ορμής: $\delta_2 = \frac{7}{12}\delta$

Παράγοντας σχήματος (shape factor): Θ = 1.28

Συντελεστής τριβής: $C_f = 0.058\ Re_x^{-\frac{1}{5}}$

Δύναμη οπισθέλκουσας: $F_D = 0.036\ \rho\ U_\infty^2\ w\ L\ Re^{-1/5}$

Συντελεστής οπισθέλκουσας: $C_D = 0.072\ Re_l^{-\frac{1}{5}}$

$C_D = 0.074\ Re_l^{-\frac{1}{5}}$ κατά τον Schlichting για Re < 10^7

Για 10^9 > Re > 10^7 ισχύει ότι $C_D = \frac{0.455}{(logRe_l)^{2.58}}$

$$C_f = (2logRe_x - 0{,}65)^{-\frac{2}{3}}$$

Έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι για ιξώδη ροή επάνω από επίπεδη πλάκα :

(α) Στρωτή ροή (laminar) αν $Re < 2 \cdot 10^5$

(β) Μεταβατική ροή (buffer) αν $2 \cdot 10^5 < Re < 3 \cdot 10^6$

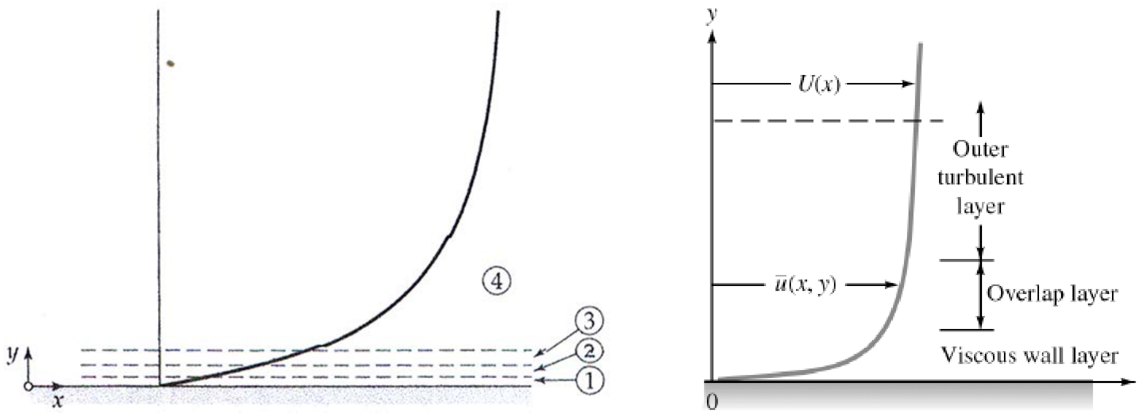
(γ) Τυρβώδης ροή (turbulent) αν $Re > 3 \cdot 10^6$

Η ολική διατμητική τάση $\overline{\tau_{yx}^{(0)}}$ είναι το άθροισμα ιξώδες διατμητικής τάσης $\overline{\tau_{yx}^{(l)}}$ και της τυρβώδης διατμητικής τάσης, $\overline{\tau_{yx}^{(t)}}$. Δηλαδή:

$$\overline{\tau_{yx}^{(0)}} = \overline{\tau_{yx}^{(l)}} + \overline{\tau_{yx}^{(t)}} = \mu\frac{d\overline{U_x}}{dy} - \rho\overline{\widetilde{U}x\widetilde{U}_y}$$

15.4 Η χρονικά μέση (Time Averaged) κατανομή ταχύτητας κοντά σε τοιχώματα

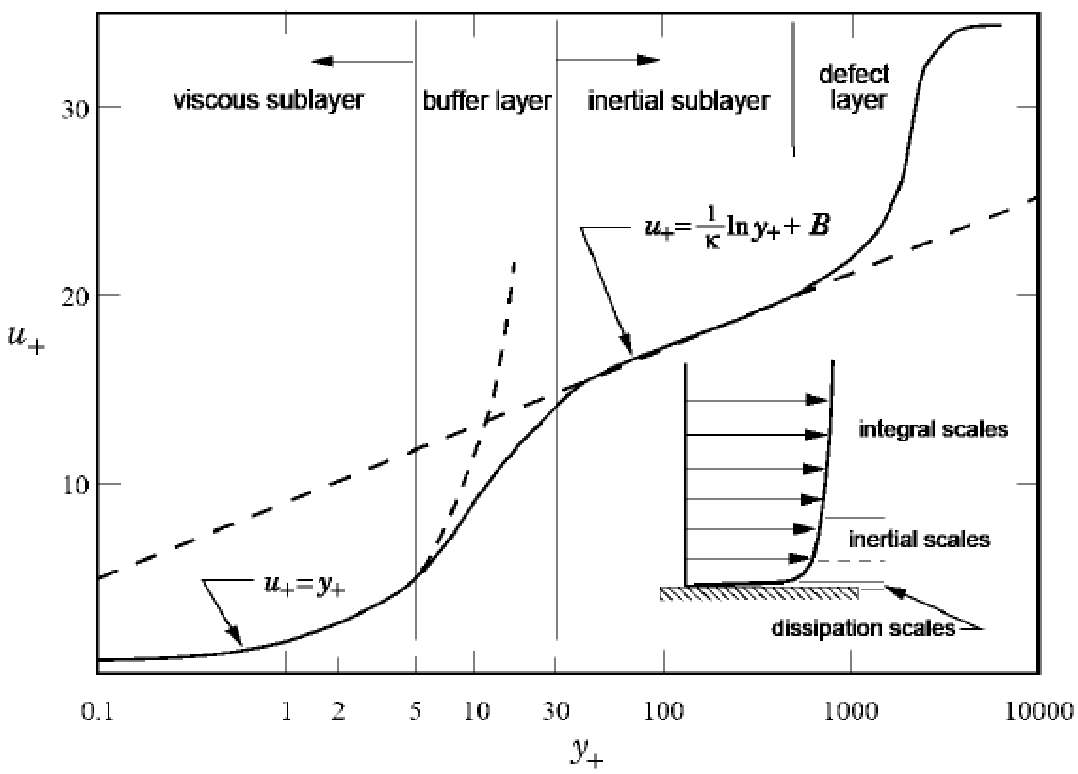
Πριν προβούμε στη συζήτηση των διαφόρων εμπειρικών διατυπώσεων που χρησιμοποιούνται για τις τάσεις Reynolds, παρουσιάζουμε εδώ διάφορα αναπτύγματα που δεν βασίζονται σε οποιονδήποτε εμπειρισμό. Σε αυτό το σημείο μελετάμε την πλήρως ανεπτυγμένη, κατανομή της χρονικά εξομαλυσμένης ταχύτητας στην περιοχή που γειτονεύει με τον τοίχο. Συζητάμε διάφορα αποτελέσματα: ένα ανάπτυγμα της ταχύτητας με σειρά Taylor κοντά στο τοίχωμα και τον παγκόσμιο (universal) λογαριθμικό νόμο (log law) λίγο μακρύτερα απ' το τοίχωμα.
Η ροή κοντά σε μία επίπεδη επιφάνεια απεικονίζεται στο σχήμα 15.4. Είναι αρμόζον να διαχωρίσουμε τέσσερις περιοχές ροής:



Σχήμα 15.4: Περιοχές ροής για την περιγραφή της τυρβώδους ροής κοντά σε τοίχωμα:
1.Ιξώδες υπόστρωμα, 2.Ουδέτερη ζώνη, 3.Αδρανειακό υπόστρωμα, 4.Κύρια τυρβώδης περιοχή.

(α) Το *ιξώδες υπόστρωμα* (viscous sublayer) πολύ κοντά στον τοίχο, στο οποίο το ιξώδες παίζει έναν ρόλο κλειδί.
(β) Η *ουδέτερη ζώνη (buffer layer)* στην οποία η μετάβαση λαμβάνει χώρα, ανάμεσα στο ιξώδες και το αδρανειακό υπόστρωμα.
(γ) Το *αδρανειακό υπόστρωμα (inertia sublayer* ή *outer region)* στην αρχή του κύριου στροβιλώδους ρεύματος, στο οποίο το ιξώδες παίζει έναν πολύ μικρό ρόλο.
(δ) Η *κύρια τυρβώδης περιοχή,* στην οποία η κατανομή της χρονικά εξομαλυσμένης ταχύτητας είναι σχεδόν επίπεδη και το ιξώδες είναι ασήμαντο.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η ταξινόμηση σε περιοχές είναι σχετικά αυθαίρετη.



Σχήμα 15.5: Κατανομή ταχύτητας κοντά σε τοίχωμα σε τυρβώδη ροή

Ας υποθέσουμε ότι η χρονικά μέση διατμητική τάση (shear stress) στο τοίχωμα (y =0) ονομάζεται τ_0 (αυτό είναι το ίδιο με $-\overline{\tau}_{yx\ y=0}$) . Στη συνέχεια, η διατμητική τάση στο αδρανειακό υπόστρωμα δεν θα διαφέρει πολύ από την τιμή τ_0. Τώρα θέτουμε το ερώτημα: Από ποια μεγέθη θα εξαρτάται η βαθμίδα της χρονικά εξομαλυσμένης ταχύτητας $d\overline{\upsilon}_x / dy$; Δεν θα πρέπει να βασίζεται στο ιξώδες, από την στιγμή, που έξω, πέρα από την ουδέτερη ζώνη, η μεταφορά της ορμής θα πρέπει κυρίως να βασίζεται στις διακυμάνσεις της ταχύτητας (που ασαφώς αναφέρεται εδώ ως «κίνηση δίνης (eddy motion)»). Μπορεί να εξαρτάται από την πυκνότητα ρ , την διατμητική πίεση στον τοίχο τ_0 και την απόσταση y από τον τοίχο. Ο μόνος συνδυασμός αυτών των τριών μεγεθών που έχει τις διαστάσεις μίας βαθμίδας ταχύτητας είναι το $\sqrt{\tau_0/\rho}\,/\,y$. Οπότε γράφουμε:

$$\frac{d\overline{\upsilon}_x}{dy} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{y} \tag{15.19}$$

όπου το κ είναι η αυθαίρετη αδιάστατη σταθερά, η οποία θα πρέπει να καθοριστεί πειραματικά. Το μέγεθος $\sqrt{\tau_0/\rho}$ έχει τις διαστάσεις της ταχύτητας. Ονομάζεται *ταχύτητα τριβής (friction velocity)* και συμβολίζεται με το υ_*. Όταν η εξίσωση (15.19) ολοκληρώνεται έχουμε

$$\overline{\upsilon}_x = \frac{\upsilon_*}{\kappa}1ny + \lambda' \tag{15.20}$$

Το λ' αποτελεί μία σταθερά ολοκλήρωσης. Για να χρησιμοποιήσουμε αδιάστατες ομαδοποιήσεις, γράφουμε ξανά την εξίσωση (15.20) ως

$$\frac{\overline{\upsilon}_x}{\upsilon_*} = \frac{1}{\kappa}1n\left(\frac{y\upsilon_*}{\nu}\right) + \lambda \tag{15.21}$$

Στην οποία το λ είναι μία σταθερά που σχετίζεται απλώς με το λ'. Το κινηματικό ιξώδες ν συμπεριλήφθηκε με σκοπό την αδιαστατοποίηση της ποσότητας στη παρένθεση της οποίας υπολογίζεται ο λογάριθμος. Πειραματικά έχει βρεθεί ότι οι τιμές των σταθερών είναι κ = 0.4 και λ =5.5, δίνοντας

$$\frac{\overline{\upsilon}_x}{\upsilon_*} = 2.51n\left(\frac{y\upsilon_*}{\nu}\right) + 5.5 \quad \frac{y\upsilon_*}{\nu} > 30 \tag{15.22}$$

Αυτό ονομάζεται **παγκόσμια λογαριθμική κατανομή ταχύτητας** των *von Karman – Prandtl,* και η εφαρμόζεται μόνο στο αδρανειακό υπόστρωμα. Εάν η εξίσωση (15.19) ήταν σωστή, τότε οι σταθερές κ και λ θα ήταν πράγματι διεθνείς σταθερές, εφαρμόσιμες σε οποιοδήποτε αριθμό Reynolds. Ωστόσο οι τιμές κ στο εύρος 0.40 έως 0.44 και οι τιμές λ στο εύρος 5.0 έως 6.3 μπορούν να βρεθούν στην βιβλιογραφία, για διάφορους αριθμούς Reynolds. Αυτό υποδεικνύει ότι η δεξιά πλευρά της εξίσωσης (15.19) θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με κάποια συνάρτηση του αριθμού Reynolds και ότι το y θα μπορούσε να υψωθεί σε κάποια δύναμη που να περιέχει κάποια μορφή του αριθμού Reynolds. Με βάση τα επιχειρήματα αυτά, η εξίσωση (15.19) να μπορεί να αντικατασταθεί από την

$$\frac{d\overline{\upsilon}_x}{dy} = \frac{\upsilon_*}{y}\left(B_0 + \frac{B_1}{1n\mathrm{Re}}\right)\left(\frac{y\upsilon_*}{\nu}\right)^{\beta_1/1n\mathrm{Re}} \tag{15.23}$$

στο οποίο το $B_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ B_1 = \frac{15}{4}$ και $\beta_1 = \frac{3}{2}$.

Όταν η εξίσωση (15.23) ολοκληρώνεται με το y παίρνουμε την *παγκόσμια κατανομή ταχύτητας (universal velocity distribution)* των Barenblatt-Chorin:

$$\frac{\overline{\upsilon}_x}{\upsilon_*} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} 1n\mathrm{Re} + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{y\upsilon_*}{\nu}\right)^{3/(21n\mathrm{Re})} \qquad (15.24)$$

Η εξίσωση (15.24) περιγράφει τις περιοχές 3 και 4 των σχημάτων 15.4 Κι 15.5 καλύτερα απ' ότι η εξίσωση (15.22). Η περιοχή 1 περιγράφεται καλύτερα από την εξίσωση (15.31) που αναφέρεται σε επόμενο εδάφιο.

<u>Η ανάπτυξη της ταχύτητας με σειρά Taylor στο ιξώδες υπόστρωμα</u>

Ξεκινάμε αναπτύσσοντας τη ταχύτητα $\overline{\upsilon}_x$ με σειρά Taylor για το ως συνάρτηση του y, οπότε παίρνουμε:

$$\overline{\upsilon}_x(y) = \overline{\upsilon}_x(0) + \left.\frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial y}\right|_{y=0} y + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 \overline{\upsilon}_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} y^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 \overline{\upsilon}_x}{\partial y^3}\right|_{y=0} y^3 + ... \qquad (15.25)$$

Για να υπολογίσουμε τους όρους σε αυτή την σειρά, χρειαζόμαστε μία εξίσωση για τον υπολογισμό της χρονικά μόνιμη διάτμητική τάση κοντά στο τοίχωμα. Για την ιδιαίτερη περίπτωση της ροής σε μία σχισμή πάχους $2B$, η πίεση διάτμησης θα είναι της μορφής

$$\overline{\tau}_{yx} = \overline{\tau}_{yx}^{(\upsilon)} + \overline{\tau}_{yx}^{(t)} = -\tau_0\left[1-(y/B)\right]$$

Τότε από τις προηγούμενες εξισώσεις έχουμε

$$+\mu\frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial y} - \rho\overline{\upsilon'_x\upsilon'_y} = \tau_0\left(1-\frac{y}{B}\right) \qquad (15.26)$$

Τώρα θα εξετάσουμε κάθε έναν όρο ξεχωριστά όπως εμφανίζεται στην εξίσωση (15.25).

Ο **πρώτος όρος** είναι το μηδέν λόγω της οριακής συνθήκης στο τοίχωμα (no-slip condition).
Ο συντελεστής του **δεύτερου όρου** μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (15.26), αναγνωρίζοντας ότι τόσο το $\upsilon'_{x\,x}$ όσο και το υ'_y είναι μηδέν στο τοίχωμα, έτσι ώστε:

$$\left.\frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\tau_0}{\mu} \qquad (15.27)$$

Ο συντελεστής του **τρίτου όρου** αφορά τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης της ταχύτητας, το οποίο μπορεί να αποκομιστεί διαφορίζοντας την εξίσωση (15.26) σε σχέση με το y και στη συνέχεια θέτοντας το $y = 0$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left.\frac{\partial^2 \overline{\upsilon}_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{\rho}{\mu}\left.\left(\overline{\upsilon'_x\frac{\partial \upsilon'_y}{\partial y} + \upsilon'_y\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial y}}\right)\right|_{y=0} - \frac{\tau_0}{\mu B} = -\frac{\tau_0}{\mu B} \qquad (15.28)$$

Καθώς τόσο το $\upsilon'_{x\,x}$ όσο και το υ'_y είναι μηδέν στο τοίχωμα.

Ο συντελεστής του τέταρτου όρου αφορά τη τρίτη παράγωγο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (15.26) και είναι:

$$\left.\frac{\partial^3 \overline{\upsilon}_x}{\partial y^3}\right|_{y=0} = \frac{\rho}{\mu}\left.\left(\overline{+2\left(\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon'_z}{\partial z}\right)\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial y}}\right)\right|_{y=0} = \frac{\rho}{\mu}\left.\left(\overline{+2\left(\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon'_z}{\partial z}\right)\frac{\partial \upsilon'_x}{\partial y}}\right)\right|_{y=0} = 0 \qquad (15.29)$$

Δεν υπάρχει κανένας λόγος να ορίσουμε τον επόμενο συντελεστή να ισούται με το μηδέν, έτσι βρίσκουμε ότι η σειρά Taylor σε αδιάστατες ποσότητες, έχει τη μορφή

$$\frac{\overline{\upsilon}_x}{\upsilon_*} = \frac{y\upsilon_*}{\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\upsilon_* B}\right)\left(\frac{y\upsilon_*}{\nu}\right)^2 + C\left(\frac{y\upsilon_*}{\nu}\right)^4 + \cdots \qquad (15.30)$$

Ο συντελεστής *C* έχει προσδιοριστεί πειραματικά και συνεπώς έχουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$\frac{\overline{\upsilon}_x}{\upsilon_*} = \frac{y\upsilon_*}{\nu}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\upsilon_* B}\right)\left(\frac{y\upsilon_*}{\nu}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{y\upsilon_*}{14.5\nu}\right)^3 + \cdots\right] \qquad 0 < \frac{y\,\upsilon_*}{\nu} < 5 \qquad (15.31)$$

Το y^3 στις αγκύλες θα αποδειχτεί ότι είναι πολύ σημαντικό σε σχέση με τις ημι-εμπειρικές εξισώσεις της τυρβώδους θερμότητας και της μεταφοράς μάζας. Για την περιοχή $5 < \frac{y\,\upsilon_*}{\nu} < 30$ δεν υπάρχουν απλές αναλυτικές σχέσεις και κάποιες φορές χρησιμοποιούνται εμπειρικά προσαρμογές καμπύλης (curve fits).

15.5 Εμπειρικές μέθοδοι προσδιορισμού της τυρβώδους διατμητικής τάσης

Στα παρακάτω περιγράφονται οι βασικότερες εμπειρικές μέθοδοι προσέγγισης της βαθμίδας της ταχύτητας, δηλαδή της τυρβώδους διατμητικής τάσης.

15.5.1 Ιξώδες δίνης (eddy viscosity) του Bussinesq

Σε αναλογία με το νόμο του Νεύτωνα, η τυρβώδης διατμητική τάση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\overline{\tau}_{yx}^{(t)} = -\mu^{(t)}\frac{d\overline{\upsilon}_x}{dy} \qquad (15.32)$$

όπου η ποσότητα $\mu^{(t)}$ ονομάζεται τυρβώδες ιξώδες (eddy viscosity) και πολλές φορές συμβολίζεται με το γράμμα *ε*.
Το τυρβώδες ιξώδες εξαρτάται από τη θέση εντός του ροϊκού πεδίου και από την ένταση της τύρβης. Πρέπει να σημειωθεί ότι *το ιξώδες μ είναι ιδιότητα το ρευστού*, ενώ *το τυρβώδες ιξώδες είναι ιδιότητα της ροής*.

Έχουν αναπτυχθεί εμπειρικές εξισώσεις για να προσεγγίσουν το τυρβώδες ιξώδες για ροές επάνω από επιφάνειες και ροές σε απορρεύματα και εκροές (jet).

(α) Τύρβη σε τοιχώματα: $$\mu^{(t)} = \mu\left(\frac{y\upsilon_*}{14.5\,\nu}\right)^3 \qquad 0 < \frac{y\upsilon_*}{\nu} < 5 \qquad (15.33)$$

Η παραπάνω εξίσωση προέρχεται από την εξίσωση (15.31) και ισχύει μόνο για περιοχές κοντά σε τοιχώματα. Έχει ιδιαίτερη εφαρμογή και σημασία για ροές με τυρβώδεις μεταφοράς μάζας και θερμότητας.

(β) Τύρβη ελεύθερης ροής: $$\mu^{(t)} = \rho\,\kappa_0\,b\left(\overline{\upsilon}_{z,\max} - \overline{\upsilon}_{z,\min}\right) \qquad (15.34)$$

Όπου το κ_0 είναι ένας αδιάστατος συντελεστής που προσδιορίζεται πειραματικά, το b είναι το πλάτος της ζώνης ανάμιξης σε μία απόσταση z και η ποσότητα μέσα στη παρένθεση είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης ταχύτητας στην εγκάρσια (z) διεύθυνση της ροής σε μία απόσταση z. Ο Prandtl βρήκε την εξίσωση (15.34) πολύ χρήσιμη σε εκροές (jets) και απορρεύματα.

15.5.2 Μήκος ανάμειξης του Prandtl

Υποθέτοντας ότι οι δίνες (eddies) κινούνται γύρω από ένα ρευστό όπως τα μόρια ενός ρευστού χαμηλής πυκνότητας, ο Prandtl ανέπτυξε μία μέθοδο για τον υπολογισμό μετάδοσης της ορμής σε τυρβώδη ροϊκά πεδία:

$$\overline{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho l^2 \left| \frac{d\overline{\upsilon}_x}{dy} \right| \frac{d\overline{\upsilon}_x}{dy} \tag{15.35}$$

Θα ήταν πολύ χρήσιμο αν μπορούσε να βρεθεί μία παγκόσμια έκφραση για το μήκος ανάμειξης και η εξίσωση (15.35) θα εύρισκε εφαρμογή σε πολλά ροϊκά πεδία, αλλά το μήκος ανάμειξης l είναι συνάρτηση της θέσης μέσα στο ροϊκό πεδίο. Ο Prandtl πρότεινε τη παρακάτω μεθοδολογία για τον υπολογισμό του μήκους ανάμειξης:

(α) Τύρβη σε τοιχώματα: $l = \kappa_1\, y$ (το y είναι η απόσταση από το τοίχωμα)

(β) Τύρβη ελεύθερης ροής: $l = \kappa_2\, b$ (το b είναι το πλάτος της ζώνης ανάμειξης)

Στο μοντέλο αυτό, τα κ_1 και κ_2 είναι σταθερές.

15.5.3 Η τροποποιημένη εξίσωση του van Driest

Έουν κατά καιρούς αναπτυχθεί πολλές προσπάθειες για να περιγραφεί η κατανμή της τυρβώδους διατημτικής τάσης από το τοίχωμα ως την ελεύθερη τυρβώδη ροή. Μία από αυτές είναι η τροποποιημένη εξίσωση του van Driest. Η εξίσωση αυτή αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού του μήκους l της εξίσωσης (15.35) ως εξής:

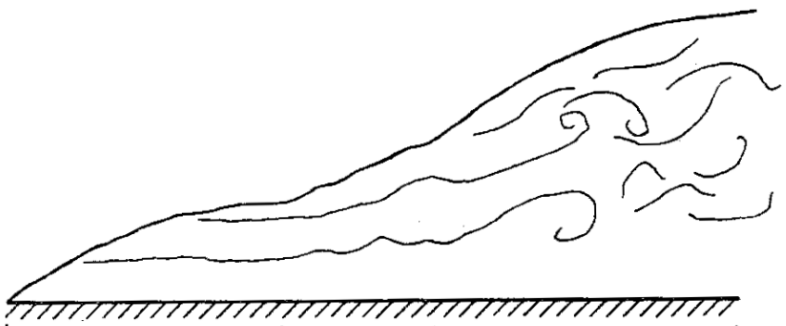
$$l = 0.4y \frac{1 - e^{\frac{-y\upsilon_*}{26\nu}}}{\sqrt{1 - e^{\frac{-0.26 y \upsilon_*}{\nu}}}}$$

Η προηγούμενη εξίσωση δίνει καλά αποτελέσματα σε πρόγνωση μάζας και θερμότητας σε ροή σε αγωγούς.

16. ΤΥΡΒΩΔΕΙΣ ΡΟΕΣ

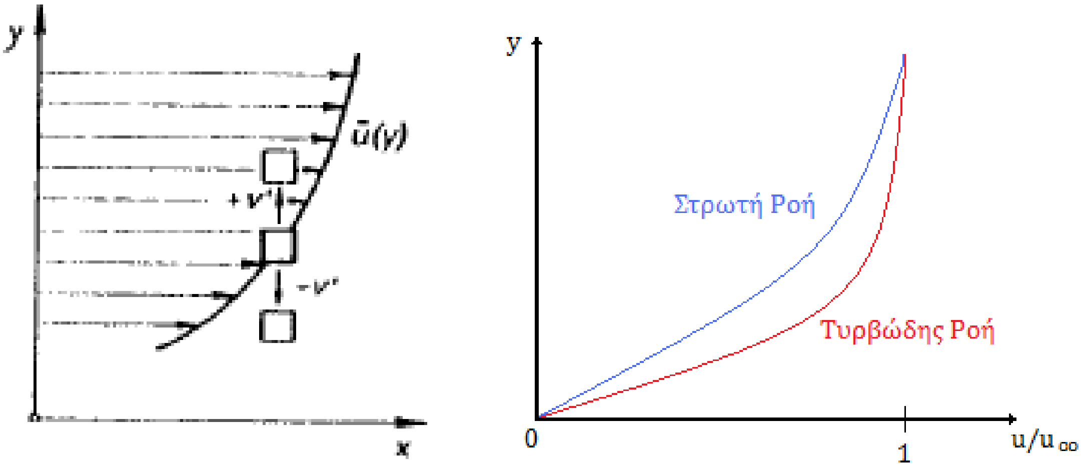
16.1Βασικές Αρχές

Οι περισσότερες ροές σε πρακτικές εφαρμογές είναι τυρβώδεις. Ο όρος αυτός εννοεί ότι στη κύρια κίνηση του ρευστού, έχουμε υπέρθεση τυχαίων διακυμάνσεων στη κύρια κίνηση του ρευστού. Οι διακυμάνσεις είναι τόσο περίπλοκες και οι λεπτομέρειες τους δεν έχουν μέχρι στιγμής αναλυθεί από Μαθηματικές Θεωρίες. Τα αποτελέσματα τυρβωδών ροϊκών πεδίων είναι αύξηση του ιξώδους με παράγοντα εκατό, δέκα χιλιάδες ή και περισσότερο. Σε μεγάλους αριθμούς Reynolds υπάρχει μία διαρκής μεταφορά ενέργειας από τη κύρια ροή σε μεγάλες δίνες που σχηματίζονται. Αλλά υπάρχει ενέργεια που διαχέεται από μικρές δίνες, διεργασία που λαμβάνει χώρα σε ένα στενό στρώμα μέσα στο οριακό στρώμα και κοντά στο τοίχωμα.
Οι μεγάλες τιμές της οπισθέλκουσας σε αεροτομές, η μεγάλη αντίσταση που παρουσιάζεται σε αγωγούς, αλλά από την άλλη πλευρά η μεγαλύτερη αύξηση πίεσης σε διαχύτες, σε πτέρυγες αεροσκαφών είναι αποτελέσματα της τύρβης. Στους διαχύτες και στις πτέρυγες, θα είχαμε αποκόλληση της ροής αν η ροή ήταν στρωτή και έτσι δεν θα πετυχαίναμε μεγάλη αύξηση πίεσης σε διαχύτες και οι πτέρυγες θα λειτουργούσαν με μη ικανοποιητική απόδοση.
Σε πραγματικές ροές γύρω από στερεά σώματα στις οποίες ο αριθμός Reynolds είναι υψηλός, οι δυνάμεις λόγω ιξώδους της ροής κυριαρχούν σε σχέση με τις δυνάμεις λόγω αδράνειας κοντά στη στερεά επιφάνεια του σώματος. Το ίδιο ισχύει για εσωτερικές ροές (π.χ. εντός αγωγών) όπου κοντά στα τοιχώματα του σώματος κυριαρχούν οι δυνάμεις τριβής. Η περιοχή αυτή του ρευστού ονομάζεται οριακό στρώμα: Ένα οριακό στρώμα πολλές φορές ξεκινάει σαν στρωτό όπου η περιοχή του ρευστού κοντά στο τοίχωμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από πολύ λεπτά στρώματα ρευστού όπου το ένα ακουμπά επάνω στο άλλο. Λόγω της μεταβολής της γεωμετρίας, βαθμίδας της πίεσης $\frac{dp}{dx}$, τραχύτητας της επιφανείας του σώματος, η ανάμιξη στρωμάτων του ρευστού γίνεται ολοένα πιο έντονη και οι ροϊκές γραμμές παύουν να είναι παράλληλες με την επιφάνεια του σώματος διότι η περιοχή των δυνάμεων ιξώδους έχει αυξηθεί και το οριακό στρώμα είναι πιο παχύ. Αυτό το είδος της ροής ονομάζεται τυρβώδης. Υπάρχει μια μεταβατική ζώνη μεταξύ της στρωτής και της τυρβώδους ροής που ονομάζεται περιοχή μετάβασης, όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 16.1: Διαχωρισμός σε στρωτή, μεταβατική και τυρβώδη περιοχή ροής.

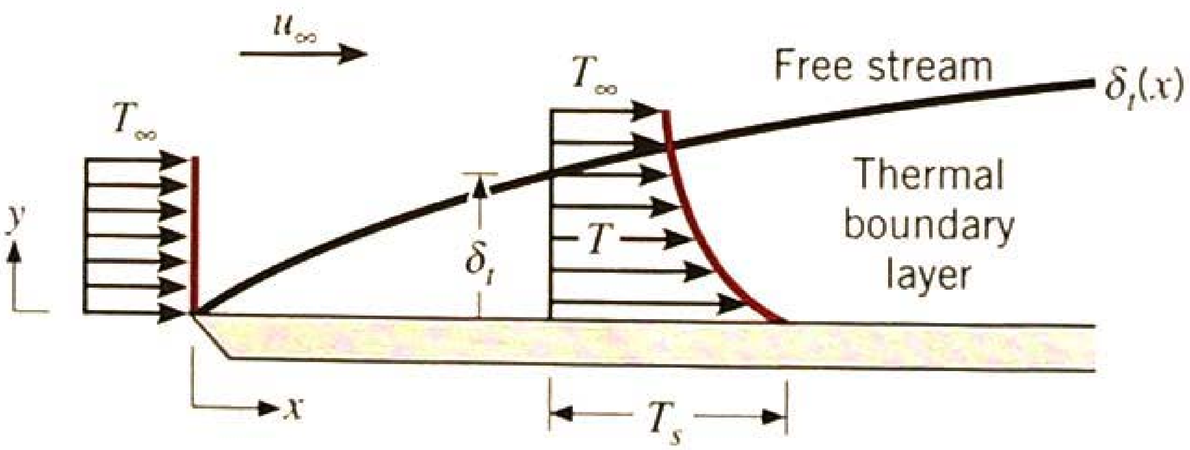
Σαν αποτέλεσμα της μεγάλης ανάμιξης στην τυρβώδη ροή που συνδέεται με μεγάλη ροή ορμής η κατανομή της ταχύτητας είναι πιο "γεμάτη" σε σχέση με τη κατανομή στη στρωτή ροή, που σημαίνει ότι η βαθμίδα της ταχύτητας κάθετα στο τοίχωμα για ένα τυρβώδες οριακό στρώμα. Τυπικές κατανομές ταχύτητας για στρωτή και τυρβώδη ροή φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



Σχήμα 16.2: Κατανομή ταχύτητας σε στρωτή και τυρβώδη ροή

Η τυρβώδης διατμητική τάση $\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = -\rho\overline{u'v'}$ μπορεί να ερμηνευτεί σαν η μεταφορά ορμής από το x-διεύθυνση προς τη y-διεύθυνση. Θεωρώντας ένα ροϊκό πεδίο όπου $\overline{u} = \overline{u}(y), \overline{v} = \overline{w} = 0$ με $\dfrac{d\overline{u}}{dy} > 0$, βλέπουμε ότι το γινόμενο $\overline{u'v'}$ δεν είναι μηδέν. Τα σωματίδια του ρευστού μπορούν να ταξιδεύουν και κάθετα στη κύρια διεύθυνση της τυρβώδους ροής.

Επιπρόσθετα τα οριακά στρώματα διαχωρίζονται σε οριακά στρώματα ταχύτητας και θερμοκρασίας. Για τις περισσότερες περιπτώσεις το πάχος του οριακού στρώματος ταχύτητας (ή υδροδυναμικό οριακό στρώμα) είναι διαφορετικό από το οριακό στρώμα θερμοκρασίας.



Σχήμα 16.3: Θερμικό οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα

Ο αριθμός Prandtl ορίζεται σαν:

$$\mathrm{Pr} = \frac{V}{\alpha} = \frac{\mu\, Cp}{K}$$

Ο αριθμός αυτός αναπαριστά το λόγο μεταφοράς ορμής στη ροή προς μεταφορά θερμότητας. Κατά συνέπεια εκφράζει το σχετικό πάχος οριακού στρώματος ταχύτητας και οριακού στρώματος θερμοκρασίας, που συμβολίζεται με δ και δ_t αντίστοιχα.
Τότε αν:

$$P_r < 1 \Rightarrow \delta_t > \delta$$

$$P_r = 1 \Rightarrow \delta_t = \delta$$

$$P_r > 1 \Rightarrow \delta_t < \delta$$

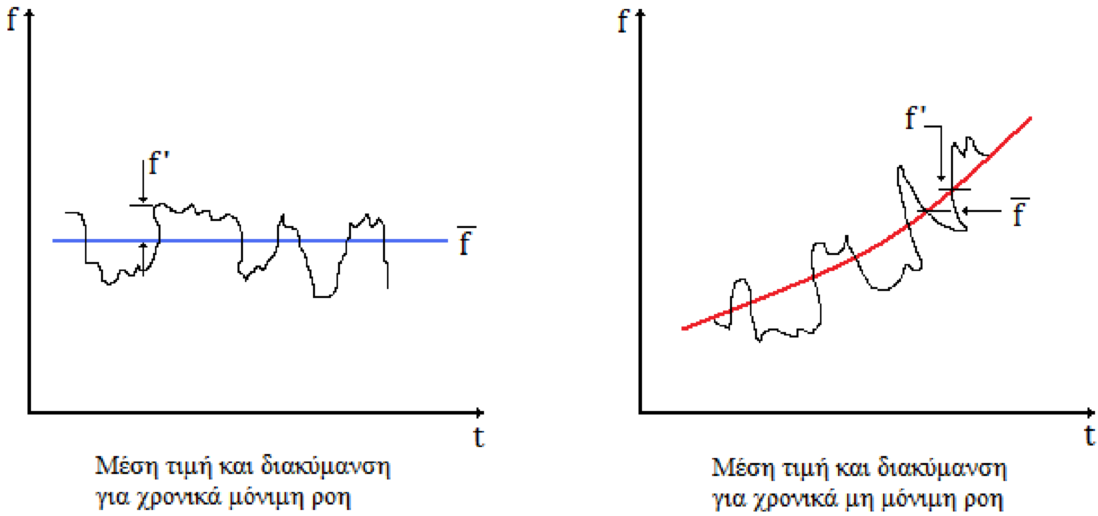
Προκειμένου να συμπεριλάβουν το αποτέλεσμα της τύρβης στη ροή, οι εξισώσεις κίνησης των ρευστών πρέπει να τροποποιηθούν. Η τροποποίηση αυτή γίνεται θεωρώντας ότι οι στιγμιαίες τιμές των μεγεθών (ταχύτητας, πίεσης, θερμοκρασίας κλπ) μπορούν να εφαρμοστούν σαν το άθροισμα μέσης τιμής συν τη διακύμανση του μεγέθους. Αυτό μπορεί να γραφεί για κάθε ροϊκό μέγεθος f:

$$f = \overline{f} + f' \tag{16.1}$$

όπου $\overline{f} = \frac{1}{\Delta_t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta_t} f\,dt$ είναι η μέση τιμή του f

Η μέση τιμή της διακύμανσης για χρονικό διάστημα Δt είναι:

$$\overline{f} = \frac{1}{\Delta_t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta_t} f'dt = 0 \tag{16.2}$$



Σχήμα 16.4: Μέση τιμή και διακύμανση τυρβώδους μεταβλητής

Το χρονικό διάστημα Δt που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω πρέπει να είναι μεγαλύτερο από την περίοδο της διακύμανσης f' και μικρότερο από το χρονικό διάστημα που διαρκεί το χρονικό μη μόνιμο φαινόμενο. Έτσι, το χρονικό διάστημα Δt εξαρτάται κάθε φορά από το υπό εξέταση πρόβλημα. Για χρονικά μόνιμη ροή, η μέση χρονικά τιμή (time – averaged mean value) είναι σταθερή, ενώ για χρονική μη μόνιμη ροή, η τιμή αυτή είναι συνάρτηση του χρόνου. Προκειμένου να γίνουν κατανοητές οι μαθηματικές λεπτομέρειες που θα ακολουθήσουν, δίνονται οι κανόνες για τις μέσες τιμές.
Είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι οι μέσες τιμές γινομένου διακυμάνσεων της μορφής $\overline{f' \cdot \rho'}$ δεν είναι κατά κανόνα μηδέν. Ισχύουν οι παρακάτω κανόνες:

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}$$

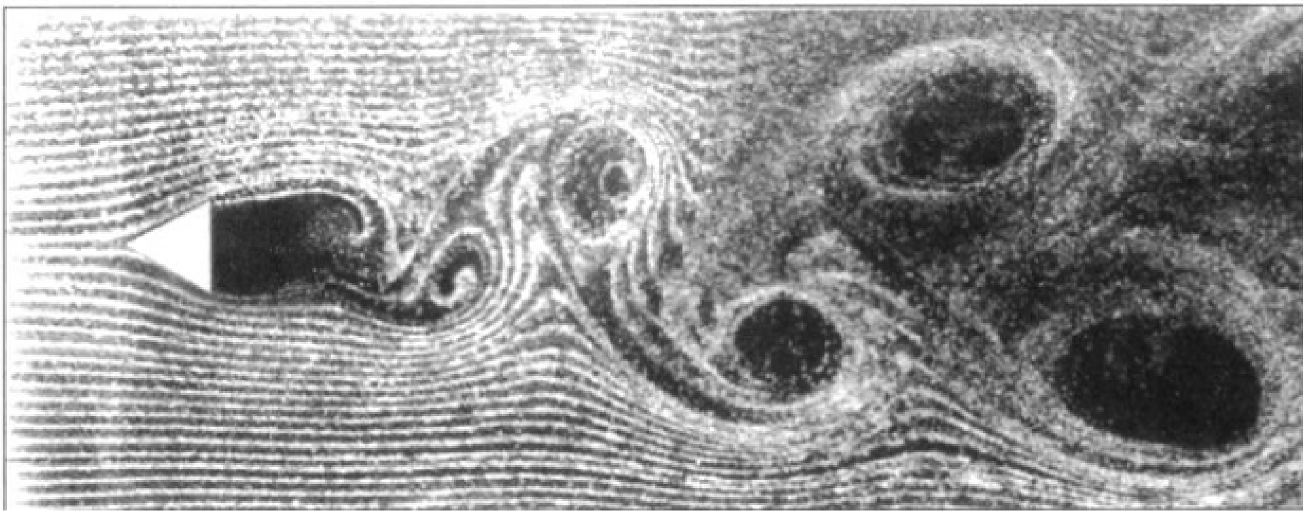
$$\overline{f + \rho} = \bar{f} \cdot \bar{\rho}$$

$$\overline{f \cdot \rho} = \bar{f} \cdot \bar{\rho}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \qquad (16.3)$$

$$\overline{f'^2} \neq 0$$

$$\overline{(f + f')^2} = \bar{f}^2 + \overline{f'^2}$$



Σχήμα 16.5: Οπτικοποίηση τυρβώδους ροής απορρεύματος πίσω από σώμα (von Karman vortex sheet)

16.2 Εξισώσεις κίνησης σε τυρβώδεις ροές

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας) για μόνιμη ασυμπίεστη ροή είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial(uw)}{\partial x}+\frac{\partial(vw)}{\partial y}+\frac{\partial(w^2)}{\partial z}\right]=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\nabla^2 w$$

Εισάγοντας την αποσύνθεση των ροϊκών ταχυτήτων και της πίεσης σε μέση τιμή συν διακύμανση δηλ. $u=\overline{u}+u^{'},\ v=\overline{v}+v^{'},\ P=\overline{P}+P^{'}$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{\partial\overline{u'}}{\partial x}=0,$ η εξίσωση της συνέχειας γίνεται για τις μέσες τιμές των ταχυτήτων:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0$$

Για τις διακυμάνσεις , η εξίσωση της συνέχειας γίνεται:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$$

Εισάγοντας την αποσύνθεση των ροϊκών ταχυτήτων και της πίεσης σε μέση τιμή συν διακύμανση στις εξισώσεις της ορμής και λαμβάνοντας υπόψη ότι όροι της μορφής $\frac{\partial u'}{\partial t}$, $\frac{\partial u'}{\partial x^2}$ μηδενίζονται, αλλά όροι της μορφής $\overline{u'^2},\ \overline{u'v'}$ παραμένουν, έχουμε ότι:

$$\rho\left[\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{u}-\rho\left(\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}\right)$$

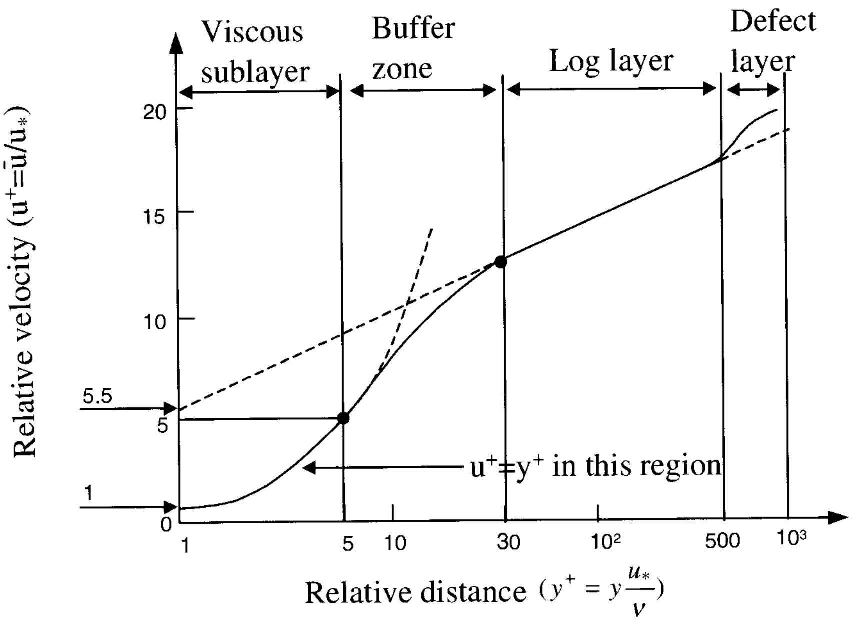
$$\rho\left[\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial y}+\mu\nabla^2\bar{v}-\rho\left(\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v'^2}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial z}\right)$$

$$\rho\left[\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right]=-\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}+\mu\nabla^2\bar{w}-\rho\left(\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial z}\right)$$

Το προηγούμενο σύστημα Μ.Δ.Ε. εκτός από τους αγνώστους που είναι οι μέσες τιμές, έχει επιπλέον αγνώστους που είναι οι διακυμάνσεις λόγω της τύρβης. Για μνα κλείσει το σύστημα (δηλ. για να είναι όσες οι εξισώσεις και οι άγνωστοι) θα πρέπει να προστεθούν επιπλέον εξισώσεις. Αυτές οι επιπλέων εξισώσεις ονομάζονται μοντέλα τύρβης και συνδέουν τις διακυμάνσεις με μέσες τιμές ροϊκών μεγεθών χρησιμοποιώντας εμπειρικές σταθερές. Τα μοντέλα τύρβης ποικίλουν ανάλογα με το βαθμό πολυπλοκότητας από απλές αλγεβρικές εξισώσεις έως και συστήματα Μ.Δ. Εξισώσεων. Ο τελικός στόχος είναι η εξομοίωση και η επίλυση της τύρβης με άμεσες μεθόδους, δίχως μοντέλα τύρβης, όμως λόγω των περιορισμών που υπάρχουν από τους σημερινούς Η/Υ οι άμεσες μέθοδοι εξομοίωσης της τύρβης είναι στα αρχικά τους στάδια.

16.3 Εμπειρικές εξισώσεις για τους όρους τυρβώδους ορμής

Στις εξισώσεις Navier Stokes για τυρβώδεις ροές δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη διατύπωση για τον υπολογισμό της τυρβώδους ορμής $\overline{\tau}^{(t)}$. Ωστόσο, ήταν αρκετά διαδεδομένο ανάμεσα στους μηχανικούς να γίνεται η χρήση διαφόρων εμπειρικών εξισώσεων για το $\overline{\tau}^{(t)}$ που αφορούν τη βαθμίδα της ταχύτητας. Αναφέρουμε ορισμένους από αυτούς και πολλοί περισσότεροι μπορούν να βρεθούν στην βιβλιογραφία σχετικά με τη τύρβη.



Σχήμα 16.5: Κατανομή ταχύτητας κοντά στο τοίχωμα σε τυρβώδη ροή

16.3.1 Το ιξώδες δίνης του Boussinesq

Σε αναλογία με τον Νόμο του Νεύτωνα για το ιξώδες, κάποιος μπορεί να γράψει για μία τυρβώδη ροή

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\mu_t \cdot \frac{d\bar{\upsilon}_x}{dy}$$

όπου η ποσότητα μ_t είναι το *τυρβώδες ιξώδες* (που συχνά ονομάζεται *ιξώδες δίνης (eddy viscosity)* και συμβολίζεται με το *ε*). Συνήθως, ωστόσο το μ_t είναι μία ισχυρή συνάρτηση της θέσης και της έντασης της τύρβης. Στην πραγματικότητα, για κάποια συστήματα το μ_t μπορεί ακόμα και να είναι αρνητικό σε κάποιες περιοχές. Θα πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι, το ιξώδες μ είναι μία ιδιότητα του ρευστού ενώ το ιξώδες δίνης, μ_t είναι κατά κύριο λόγο μία ιδιότητα της *ροής*.

Ειδικές διατυπώσεις για το μ_t διατίθενται για δύο είδη τυρβωδών ροών (π.χ. ροές κατά μήκος επιφανειών και ροές σε εκροές (jets) και απορρεύματα (wakes):

(i) τύρβη κοντά σε τοίχωμα: $\mu_t = \mu \cdot \left(\frac{y \cdot \upsilon_*}{14.5 \cdot \nu}\right)^3 \quad 0 < \frac{y\upsilon_*}{\nu} < 5$

Αυτή η διατύπωση είναι έγκυρη μόνο για πολύ κοντά στον τοίχο. Είναι εξέχουσας σημασίας για την θεωρία της στροβιλώδους θερμότητας και της μεταφοράς μάζας σε κοινές επιφάνειες (συνόρου) ρευστών-στερεών.

(ii) Ελεύθερη τύρβη: $\mu_t = \rho \cdot \kappa_0 \cdot b \cdot (\bar{\upsilon}_{z,\max} - \bar{\upsilon}_{z,\min})$

Όπου το κ_0 είναι ένας αδιάστατος συντελεστής που μένει να καθοριστεί πειραματικά, το *b* είναι το πλάτος της ζώνης μίξης στην - προς την κατεύθυνση του ρεύματος - απόσταση z και το μέγεθος στις παρενθέσεις αντιπροσωπεύει την μέγιστη διαφορά στη συνιστώσα -z των χρονικά εξομαλυσμένων ταχυτήτων σε αυτή την απόσταση z. Ο Prandtl βρήκε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι ένας χρήσιμος εμπειρισμός για πίδακες (jets) και απορρεύματα (wakes).

16.3.2 Το Μήκος ανάμειξης του Prandtl

Υποθέτοντας ότι οι δίνες κινούνται παντού σε ένα ρευστό κατά τον ίδιο τρόπο που τα μόρια κινούνται σε ένα αέριο χαμηλής πυκνότητας (όχι και μία τόσο καλή αναλογία) ο Prandtl ανέπτυξε μία διατύπωση για την μεταφορά της ορμής σε ένα στροβιλώδες ρευστό. Το «μήκος ανάμειξης» «*l*» παίζει σχεδόν τον ίδιο ρόλο όσο η μέση ελεύθερη διαδρομή στην κινητική θεωρία . Αυτού του είδους ο συλλογισμός οδήγησε τον Prandtl στην ακόλουθη σχέση:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho \cdot l^2 \cdot \left|\frac{d\bar{\upsilon}_x}{dy}\right| \frac{d\bar{\upsilon}_x}{dy}$$

Εάν το μήκος ανάμειξης ήταν μία παγκόσμια σταθερά, η εξίσωση (4) θα ήταν πολύ ελκυστική, αλλά στην πραγματικότητα το «*l*» βρέθηκε ότι είναι μία συνάρτηση της θέσης.
Ο Prandtl πρότεινε τις ακόλουθες διατυπώσεις για το «*l*»:

(i) Τύρβη στο τοίχωμα: $l = \kappa_1 \cdot y$ (y= απόσταση από τον τοίχο)

(ii) Ελεύθερη τύρβη: $l = \kappa_2 \cdot b$ (b =πλάτος της ζώνης ανάμειξης)

Όπου το k_1 και k_2 είναι σταθερές. Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα επιτεύχθηκε από τον Taylor μέσω της «θεωρίας μεταφοράς της στροβιλώδους ροής» “vorticity transport theory” λίγα χρόνια πριν την πρόταση του Prandtl.

16.4 Μοντελοποίηση τύρβης

Οι εξισώσεις που συμπληρώνουν το μοντέλο τύρβης απαιτούν μοντελοποίηση των όρων διακύμανσης που υπάρχουν στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Navier Stokes τυρβωδών ροών. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετασθούν τεχνικές μοντελοποίησης για τους όρους της μορφής $\overline{u_i' \cdot u_j'}$. Πρόσφατα έχουν εμφανιστεί διάφορες εργασίες αναθεωρώντας τις τεχνικές μοντελοποίησης τύρβης και υπολογισμού αυτής. (Kline et al, 1982, Marvin, I983, και Lakshminarayana, 1986).
Μια πρόσφατη έκδοση σε αυτό τον τομέα είναι ένα βιβλίο του Wilcox (1993). Οι εξισώσεις που συμπληρώνουν το μοντέλο τύρβης μπορούν να ταξινομηθούν ως εξής:

1. **Μοντέλα Μηδενικής Εξίσωσης ή Αλγεβρικό Μοντέλο Δίνης** (*Zero equation or Algebraic Eddy Viscosity*). Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούν μια αλγεβρική μορφή για τις τυρβώδεις διατμητικές τάσεις ($\overline{u_i' \cdot u_j'}$).
2. **Μοντέλα μίας εξίσωσης** (*One Equation Models*). Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούν μία επιπρόσθετη Μ.Δ.Ε. για τη κλίμακα ταχύτητας τύρβης.

3. **Μοντέλα δύο εξισώσεων** (*Two Equation Models*). Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιούν μία Μ.Δ.Ε. για τη κλίμακα μήκους τύρβης και μία Μ.Δ.Ε. για τη κλίμακα ταχύτητας τύρβης.

4. **Μοντέλα διατμητικών τάσεων Reynolds** (*Reynolds Stress Models*). Αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιούν πολλές (συνήθως επτά) Μ.Δ.Ε. για όλες τις συνιστώσες του τυρβώδους διατμητικού τανυστή $\left(-\rho \cdot \overline{u_i' \cdot u_j'}\right)$.

5. **Άμεση αριθμητική προσομοίωση** (*Direct Numerical Simulation*). Η χρονικά εξαρτημένη (3D) δομή επιλύεται μέσω μιας αριθμητικής λύσης των χρονικά εξαρτημένων εξισώσεων Navier-Stokes.

Σύντομη περιγραφή του αλγεβρικού μοντέλου δίνης, του μοντέλου δύο εξισώσεων και του μοντέλου διατμητικών τάσεων Reynolds παρουσιάζονται σε αυτό το εδάφιο. Τα δύο πρώτα μοντέλα επικαλούνται την έννοια που πρότεινε ο Boussinesq (1877). Κατά αυτή την έννοια οι τυρβώδεις διατμητικές τάσεις είναι εξισώσεις ορμής και υποτίθεται ότι είναι ανάλογες με το μέσο ποσοστό τάσης:

$$\tau_{ij} = -\rho \cdot \overline{u_i' \cdot u_j'} = \mu_t \cdot \left(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}\right) - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot \delta_{ij} \cdot k \qquad (16.4)$$

όπου η σταθερά μ_t, που ονομάζεται ιξώδες δίνης είναι μια χωρική συνάρτηση της μέσης ταχύτητας του πεδίου $\bar{u}_i$. Η φυσική σημασία πίσω από αυτήν την έννοια εξηγείται από τους Tennekes και Lumley (1972). Οι τάσεις στις στρωτές ροές προκύπτουν ως αποτέλεσμα της τυχαίας μοριακής κίνησης, που είναι εννοιολογικά παρόμοια με τις τυρβώδεις διακυμάνσεις. Η ομοιότητα μεταξύ αυτών των δύο κινήσεων είναι επιφανειακή. Εντούτοις, υποτίθεται ότι η μεταφορά της ορμής και της θερμότητας από τη μοριακή κίνηση είναι παρόμοια με αυτήν που προκαλείται από τις τυρβώδεις διακυμάνσεις. Η έννοια του ιξώδους δίνης είναι φαινομενολογική και δεν έχει καμία μαθηματική βάση. Πρέπει να υπογραμμιστεί ότι το μοριακό ιξώδες είναι μια ιδιότητα του ρευστού και ότι η τύρβη είναι ιδιότητα της ροής. Επομένως, το ιξώδες δίνης είναι πιθανό να είναι μια συνάρτηση των ιδιοτήτων της ροής (π.χ., να σημαίνει την ταχύτητα) και μπορεί επίσης να είναι μια ποσότητα τανυστών σε μια τρισδιάστατη ροή.

16.4.1 Μοντέλα Μηδενικής Εξίσωσης ή Αλγεβρικό Μοντέλο Δίνης

Το αλγεβρικό μοντέλο ιξώδους δίνης είναι βασισμένο στην έννοια του μήκους ανάμιξης [Schlichting (1979)]. Το «μοντέλο ανάμιξης» μπορεί να γραφτεί σαν

$$\mu_t = 2 \cdot \rho \cdot l^2 \sqrt{S_{ij} \cdot S_{ij}} \qquad (16.5)$$

όπου l ονομάζεται το μήκος ανάμιξης και είναι αντιπροσωπευτικό της μεγάλης (τοπικής) κλίμακας κίνησης σε μια τυρβώδη ροή.

Στο αλγεβρικό μοντέλο ιξώδους δίνης, μια αλγεβρική έκφραση για το μήκος ανάμιξης, l, παρέχεται για το κλείσιμο των εξισώσεων. Αρκετές ερευνητικές ομάδες έχουν αναπτύξει αλγεβρικά μοντέλα ιξώδους Eddy (Cebeci και Smith 1974, Crawford και Kays 1975, Mellor και Herrig, 1973, Patankar και Spalding 1970, Baldwin και Lornax 1978).

Ένα από τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα για τα οριακά στρώματα είναι των Cebeci και Smith (1974), που τροποποιήθηκε αργότερα από τους Baldwin και Lornax (1978). Το μοντέλο προτάθηκε από τους Baldwin και Lomax έχει ευρύτερες εφαρμογές και αποφεύγει την ανάγκη να βρει το άκρο του οριακού στρώματος. Και τα δύο αυτά μοντέλα ενσωματώνουν εμπειρικές σχέσεις. Το μοντέλο των Baldwin και Lomax δίνεται από

$$\mu_t = \begin{cases} 0.16 \cdot \rho \cdot y^2 \cdot \left[1 - e^{\left(\frac{-y^+}{A^+}\right)}\right]^2 \cdot |\omega|, \;\; 0 \le y \le y' \\ 0.02688 \cdot \rho \cdot F_w \cdot \left[l + 5{,}5\left(\frac{0{,}3y}{y_{max}}\right)^6\right]^{-1}, y \ge y' \end{cases} \qquad (16.6)$$

όπου y είναι η απόσταση κάθετη στο στερεό τοίχωμα. Από 0 έως y' είναι η περιοχή του τοιχώματος και y' αντιπροσωπεύει την μικρότερη τιμή του y με την οποία το ιξώδες μ_t στο εσωτερικό και το εξωτερικό στρώμα είναι ίσα.

$$y^+ = \frac{\sqrt{\rho_w \cdot \tau_w}\, y}{\mu_w}, \;\; \text{A'} = 26$$

όπου τ_w, μ_w είναι η διατμητική τάση και το μοριακό ιξώδες στο τοίχωμα, αντίστοιχα

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

$$F_w = \left\{ \frac{0.25 \cdot y_{max} \cdot \left[\left(\sqrt{u^2+v^2+w^2} \right)_{max} - \left(\sqrt{u^2+v^2+w^2} \right)_{min} \right]^2}{F_{max}} \right\} \quad (16.7)$$

$$\text{ή} \quad F_w = y_{max} \cdot F_{max}$$

Εδώ, η ποσότητα F_{max} είναι η μέγιστη τιμή της σχέσης

$$F(y) = y \cdot |\omega| \cdot \left[l - e^{\left(\frac{-y^+}{A^+} \right)} \right] \quad (16.8)$$

και y_{max} είναι to y σε εκείνο το σημείο. Η τιμή του $(u^2 + v^2 + w^2)_{min} = 0$ για το οριακό στρώμα.

Η εξίσωση για την εξωτερική περιοχή $y \geq y'$ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για το απόρρευμα πίσω από σώματα όπως και για το οριακό στρώμα. Για το απόρρευμα, χρησιμοποιείται μόνο η περίπτωση $y \geq y'$. Για το οριακό στρώμα, χρησιμοποιούνται και οι δύο εξισώσεις από της σχέσης 1.77.

16.5 Μοντέλα Τύρβης Δύο Εξισώσεων

Προηγουμένως επισημάνθηκε ότι η διάδοση της τύρβης δεν προσαρμόζεται σε μοντέλα μηδενικών εξισώσεων. Ως εκ τούτου, το φυσικό φαινόμενο του προηγούμενου ιστορικού της ροής δεν περιλαμβάνεται σε απλά αλγεβρικά μοντέλα. Σε περίπτωση που πρέπει να λάβουμε υπόψη το φυσικό αυτό φαινόμενο, μπορεί να παραχθεί μια εξίσωση μεταφοράς βασισμένη στις εξισώσεις Navier-Stokes. Όταν μια τέτοια εξίσωση χρησιμοποιείται, αναφέρεται ως μοντέλο μίας εξίσωσης, το οποίο συζητήθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Όταν δυο εξισώσεις μεταφοράς χρησιμοποιούνται, είναι γνωστό ως μοντέλο δύο-εξισώσεων.
Σύνθετα πεδία ροής τα οποία περιλαμβάνουν αποκολλημένα ροϊκά πεδία, ασταθείς ροές, και ροές που περιλαμβάνουν πολλαπλού μήκους κλίμακες επέρχονται συχνά σε εφαρμογές μηχανικής ρευστών. Σε αυτούς τους τύπους σύνθετων ροών, η χαμηλότερη τάξη ακρίβειας μοντέλων τύρβης που προσφέρουν τα μοντέλα μηδενικής εξίσωσης, μισής εξίσωσης, ή μοντέλα μίας εξίσωσης, γίνεται πολύ περίπλοκη και συχνά ασαφής. Μοντέλα δύο εξισώσεων έχουν αναπτυχθεί για να εκπροσωπήσουν καλύτερα την φυσική της τύρβης σε αυτούς τους τύπους των σύνθετων πεδίων ροής. Σε αυτή την ενότητα, εξετάζονται μοντέλα τύρβης δύο εξισώσεων *k*-*ε* και *k*-*ω*.

16.5.1 Μοντέλο τύρβης δύο-εξισώσεων *k*-*ε*

Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο τύρβης δύο-εξισώσεων είναι το μοντέλο *k*-*ε*. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις προέρχονται για κινητική ενέργεια της τύρβης (k), και τη διάχυση της τύρβης (ε), όπου

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (16.9)$$

και

$$\varepsilon = \nu_t \cdot \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)} \quad (16.10)$$

Το βασικό μοντέλο δύο εξισώσεων *k*-*ε* εκφράζεται από την τυρβώδη κινητική εξίσωση:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \right) \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \cdot \varepsilon \quad (16.11)$$

και η εξίσωση ρυθμού διάχυσης

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + c_{\varepsilon 1} \cdot P_k \cdot \frac{\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \cdot \rho \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{16.12}$$

όπου P_k είναι η παραγωγή της τύρβης ορίζεται ως $P_k = \tau_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$
Η τυρβώδης κινητική εξίσωση και η εξίσωση ρυθμού διάχυσης δίνεται από (16.11) και (16.12) μπορεί να γραφτεί σε μια αναπτυγμένη μορφή σε Καρτεσιανές συντεταγμένες για τα δισδιάστατα προβλήματα όπως:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + u\frac{\partial k}{\partial x} + u\frac{\partial k}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa}\right) \cdot \frac{\partial k}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\kappa}\right) \cdot \frac{\partial k}{\partial y}\right] + P_k - \rho\varepsilon \tag{16.13}$$

και

$$\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right] + c_{\varepsilon 1} \cdot P_k \cdot \frac{\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \cdot \rho \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{16.16}$$

όπου οι τυπικές τιμές των σταθερών είναι

$$\sigma_k = 1.0 \qquad \sigma_\varepsilon = 1.3 \qquad c_{\varepsilon 1} = 1.44 \qquad c_{\varepsilon 2} = 1.92$$

και το τυρβώδες ιξώδες συνδέεται με το ε από

$$\mu_t = \rho \cdot c_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{16.15}$$

όπου $c_\mu = 0.09$

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η αριστερή πλευρά των εξισώσεων k και ε, δίνονται από (16.13) και (16.16), μπορούν επίσης να γραφτούν ως

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho} k\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}\, \bar{u} k\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\rho}\, \bar{u} k\right) = RHS_t \tag{16.16}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho} t\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}\bar{u}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\rho}\bar{u}\varepsilon\right) = RHS_\varepsilon \tag{16.17}$$

που προκύπτουν απλά πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση συνέχειας με το k, προσθέτοντας το στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης (16.13), και στη συνέχεια συνδυάζοντας τους όρους. Μια παρόμοια προσέγγιση χρησιμοποιείται για την εξίσωση για το ε.
Όσον αφορά τα μοντέλα μηδενικών εξισώσεων, έχει ενσωματωθεί μια προσέγγιση δύο-στρωμάτων. Σύμφωνα με αυτήν, οι εξισώσεις (16.13) και (16.16) χρησιμοποιούνται στην εξωτερική περιοχή από την περιοχή του ιξώδους υποστρώματος. Για μια τυπική ροή τοιχώματος, αυτό αντιστοιχεί σε ένα εύρος y^+ της τάξης του 30-50. Κοντά στην επιφάνεια, χρησιμοποιούνται συναρτήσεις τοιχώματος (wall functions) όπως αυτές της εξίσωσης (16.15). Οι τιμές του k και του ε μπορούν να ληφθούν από τα ακόλουθα: εάν y_ι υποδηλώνει την διασύνδεση μεταξύ της εξωτερικής περιφέρειας και του ιξώδους υποστρώματος, τότε

$$k_{y=w} = \frac{\tau_i}{\rho c_D^{3/2}} \tag{16.18}$$

όπου c_D είναι τυπικά 0.164, και τ_i είναι η διατμητική τάση στο σημείο y_i. Παρομοίως

$$c_{y=w} = \frac{c_D k_{y=w}^{3/2}}{l}$$

όπου το μήκος κλίμακας μπορεί να εκτιμηθεί από την απλή γραμμική σχέση του ιξώδους υποστρώματος και δίνεται από

$$\ell = k \cdot y \tag{16.19}$$

Άπαξ και οι τοπικές τιμές της κινητικής ενέργειας της τύρβης και ο ρυθμός της τύρβης έχουν υπολογιστεί, η τυρβώδης ρευστότητα δίνεται από (16.15) μπορεί να προσδιοριστεί. Σημειώνεται ότι ποσότητες όπως $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}$ και $\overline{w'^2}$ μπορούν να προσδιοριστούν από ημί-εμπειρικές σχέσεις. Για παράδειγμα

$$\overline{u'^2} = 2a_2 k \tag{16.20}$$

$$\overline{v'^2} = a_3 k \tag{16.21}$$

$$\overline{w'^2} = 2\,(1 - a_2\; - a_3)k \tag{16.22}$$

όπου α_2 και α_3 είναι δομικές κλίμακες, που παίρνουν συνήθως τιμές 0.556 και 0.15 αντίστοιχα.

16.5.2 Μοντέλο *k*-*ε* χαμηλού αριθμού Reynolds

Η δυσκολία με το καθιερωμένο μοντέλο *k*-*ε* εισήχθη στην προηγούμενη ενότητα και είναι ότι οι εξισώσεις γίνονται αριθμητικά ασταθείς όταν ολοκληρώνονται σε περιοχές κοντά σε στερεά τοιχώματα. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, υλοποιείται μία προσέγγιση δύο-στρωμάτων, όπως συζητήθηκε προηγουμένως. Ωστόσο, μια καλύτερη προσέγγιση είναι ίσως να ολοκληρωθούν άμεσα οι εξισώσεις *k*-*ε* διαμέσου του ιξώδους υποστρώματος έως το τοίχωμα. Προκειμένου να καταστεί δυνατή η ολοκλήρωση στο τοίχωμα και να βελτιώσουμε την ικανότητα του καθιερωμένου μοντέλου *k*-*ε*, εισάγονται ορισμένες τροποποιήσεις. Το μοντέλο που προκύπτει είναι γνωστό ως μοντέλο *k*-*ε* χαμηλού αριθμού Reynolds. Το πρώτο μοντέλο *k*-*ε* χαμηλού αριθμού Reynolds αναπτύχθηκε από τους Jones και Launder [21-13,21-16], και στη συνέχεια τροποποιήθηκε από διάφορους ερευνητές. Οι κύριες τροποποιήσεις που εισήγαγαν οι Jones και Launder ήταν να συμπεριλάβουν τις συναρτήσεις f_1 και f_2 που επιρεάζουν τον αριθμό Reynolds από την εξίσωση (21-154) και τη συνάρτηση f_m από την εξίσωση (16.15). Επιπλέον, πρόσθετοι όροι L_k και L_e προστέθηκαν στις εξισώσεις για να λάβουν υπόψη τις διαδικασίες διάχυσης που μπορεί να μην είναι ισοτροπική. Έτσι το μοντέλο *k*-*ε* χαμηλού αριθμού Reynolds, γράφεται ως εξής:

$$\rho\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\theta_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k - \rho\varepsilon + L_k \tag{16.23}$$

και

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{e1}\, f_1\; P_k\, \frac{t}{k} - C_{e2}\, f_2\, \rho\, \frac{t^2}{k} + L_e \tag{16.24}$$

όπου το τυρβώδης ιξώδες τώρα υπολογίζεται σύμφωνα με

$$\mu_t = \rho\, f_\mu\, C_\mu\, \frac{k^2}{l} \tag{16.25}$$

Οι ακόλουθες σχέσεις που προτείνονται από τους Jones και Launder.

$$f_1 = 1.0$$

$$f_2 = 1 - 0.3\,\exp(-\mathrm{Re}_\tau^2)$$

$$f_\mu = \exp\left[\frac{-2.5}{1 + 0.02\mathrm{Re}_\tau}\right]$$

$$L_k = -2\mu\left(\frac{\theta\sqrt{k}}{\theta x_j^2}\right)^2$$

και

$$L_e = 2\frac{\mu\,\mu_1}{\rho}\left(\frac{\theta^2 u_1}{\theta x_j^2}\right)^2$$

Από τις αρχές του 1970 διάφορες τροποποιήσεις με τους όρους χαμηλού αριθμού Reynolds και σταθερές μοντέλου έχουν εισαχθεί. Περίληψη των επιλεγμένων μοντέλων *k*-*ε* παρέχεται στον Πίνακα 16.1

Πίνακας 16.1 Συναρτήσεις και σταθερές για τα μοντέλα τύρβης *k*-*ε*

Μοντέλο	Ref.No	f_1	f_2	f_μ
Σταθερά			1.0	1.0
Jones-Launder	12-13 12-16		$1 - 0.3\exp(-\mathrm{Re}_\tau^2)$	$\exp\left[\frac{-2.5}{1 + 0.02\mathrm{Re}_\tau}\right]$
Hoffman	12-15		$1 - 0.3\exp(-\mathrm{Re}_\tau^2)$	$\exp\left[\frac{-1.75}{1 + 0.02\mathrm{Re}_\tau}\right]$
Nagano-Hishida	12-16		$1 - 0.3\exp(-\mathrm{Re}_\tau^2)$	$[1 - \exp(-(\mathrm{Re}_\tau / 26.5)\ ]^2$

Μοντέλο	L_k	L_e	C_μ	C_{e1}	C_{e2}	σ_k	σ_t
Σταθερά	0	0					
Jones-Launder	$= -2\mu\left(\frac{\theta\sqrt{k}}{\theta x_j}\right)^2$	$2\frac{\mu\,\mu_1}{\rho}\left(\frac{\theta^2 u_1}{\theta x_j}\right)^2$					
Hoffman	$-\frac{\nu}{y}\frac{dk}{dy}$	0					
Nagano-Hishida	$-2\mu\left(\frac{\theta\sqrt{k}}{\theta_\nu}\right)^2$	$\nu\nu_\tau(1 - f_\mu)\left(\frac{\theta^2 u}{\theta y}\right)^2$					

16.5.3 Διόρθωση συμπιεστότητας και αξονοσυμμετρική εκτίμηση

Επιπλέον της τροποποίησης του αριθμού Reynolds των όρων και των σταθερών των μοντέλων όπως φαίνονται στον πίνακα 16.1, έχουν τροποποιηθεί επίσης και οι εξισώσεις k-e κυρίως στους όρους διόρθωσης συμπιεστότητας και αξονοσυμμετρικών εκτιμήσεων.

Οι διορθώσεις των όρων συμπιεστότητας περιλαμβάνονται τυπικά με την εισαγωγή του τυρβώδη αριθμού Mach, *Mc* οποίος ορίζεται ,

$$Mc = \sqrt{\frac{2k}{a^2}}$$

Οι εξισώσεις *k*-*ε* οι οποίες περιλαμβάνουν τους όρους διόρθωσης συμπιεστότητας γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_i}{\sigma_\kappa}\right)\frac{\partial_k}{\partial x_j}\right] + P_k - \bar{\rho}(e + e_c) + \overline{p^w d^w} + L_k \qquad (16.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}c) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j c) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_i}{\sigma_c}\right)\frac{\partial_c}{\partial x_j}\right] + e_{c1}f_1\, P_k\frac{e}{k} - e_{ca}f_2\bar{\rho}\frac{e^2}{k} + L_c \qquad (16.27)$$

Ο όρος e_c αναπαριστά τη συνεισφορά από τη συμπιεστή διάχυση (compressible dissipation) της ροής και *ο όρος* $\overline{p^w d^w}$ *αντιπροσωπεύει τον* όρο της πίεση διαστολής. Δίνονται αντίστοιχα από:

$$e_c = \gamma_1 {M_t}^2 c \qquad (16.28)$$

$$\overline{p^w d^w} = -\gamma_2 P_k M_t^{\,2} + \gamma_3 \rho_c M_t^{\,2} \qquad (16.29)$$

Οι ακόλουθες τιμές βασισμένες στην DNS δίνονται

$$\gamma_1 = 1.0, \qquad \gamma_2 = 0.4, \qquad \gamma_3 = 0.2$$

Η πιο απλή προσέγγιση ώστε να συμπεριληφθεί η αξονοσυμμετρική διόρθωση είναι να τροποποιήσουμε τον συντελεστή e_c ως εξής:

$$e_c = \begin{cases} 1.44 & \text{για επίπεδη 2 διαστάσεων ροή} \\ 1.60 & \text{για αξονοσυμμετρική 2 διαστάσεων ροή} \end{cases}$$

16.5.4 Αρχικές και οριακές συνθήκες

Οι αρχικές και οριακές συνθήκες θα πρέπει να ορισθούν και για την k και για την e. Η αρχική συνθήκη της τυρβώδους κινητικής ενέργειας k καθορίζεται με όρους ελεύθερης έντασης τύρβης T_s ως ακολούθως:

$$k_\infty = 1.5(T_s \cdot U_\infty)^2$$

όπου T= 0.0001 έως 10% της μέσης ταχύτητας. Το τυρβώδες ιξώδες καθορίζεται ως:

$$\mu_\infty = (0.1 \to 100)\mu_\infty$$

Και ως εκ τούτου ,

$$e_\infty = \bar{\rho} e_\mu \frac{\kappa_\infty^{\,2}}{\mu_{r\infty}}$$

Οι οριακές συνθήκες είναι οι :

(1) Στην εισροή , οι ελεύθερες τιμές καθορίζονται, δηλαδή, e = e_∞ και k = k_∞.

(2) Στην στερεά επιφάνεια , k = 0 , $\mu_c = 0$, $e = e_\infty = 0$. Για ορισμένα μοντέλα k-c, η τιμή e_∞ ορίζεται.

(3) Στην εκροή χρησιμοποιείται η παρεκβολή.

16.5.5 Διπλή Εξίσωση Μοντέλου Τύρβης *k-ω*

Αυτό το μοντέλο διπλής εξίσωσης περιλαμβάνει μια εξίσωση για την τυρβώδη κινητική ενέργεια k, όπως αναπτύχθηκε πρωτύτερα, και μια δεύτερη εξίσωση για τον ειδικό τυρβώδη συντελεστή διασποράς (ή την τυρβώδη συχνότητα) ω.

Υπενθυμίζουμε ότι η ανάπτυξη της εξίσωσης k βασίστηκε στις εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των ρευστών. Μια δεύτερη προσέγγιση για την ανάπτυξη μιας εξίσωσης μεταφοράς μπορεί να θεωρηθεί μια εξίσωση οι οποία βασίζεται στις γνωστές φυσικές διεργασίες, και στην ανάλυση διαστάσεων. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία μιας εξίσωσης μεταφοράς για το ω.

Η έννοια για την παράμετρο ω παρουσιάστηκε από τον Kolmogorov, την οποία την ονόμασε διασπορά ανά μονάδα τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Υπενθυμίζουμε , ότι η διαδικασία της διασποράς λαμβάνει μέρος στο επίπεδο των πιο μικρών δινών καθώς ο συντελεστής διασποράς είναι το ποσοστό της τυρβώδης ενέργειας που μεταφέρεται στις πιο μικρές δίνες. Έτσι ο συντελεστής αυτός καθορίζεται από τις ιδιότητες των πιο μεγάλων δινών. Ίσως η πιο απλή φυσική ερμηνεία του συντελεστή ω είναι αυτή που αναπαριστά τη σχέση ανάμεσα στο ποσοστό της τυρβώδης διασποράς με το σύνολο της τυρβώδης ενέργειας ή διαφορετικά το ποσοστό της τυρβώδης διασποράς ανά μονάδα ενέργειας η οποία ουσιαστικά είναι μια αντίστροφη χρονική κλίμακα των μεγάλων δινών.

Τώρα για να αναπτύξουμε μια εξίσωση μεταφοράς για το ω , χρησιμοποιούνται αρκετές φυσικές μέθοδοι που παρατηρούνται στα υγρά. Αυτές οι μέθοδοι περιλαμβάνουν αστάθεια, μεταφορά θερμότητας, διάχυση, διάλυση, και απόδοση. Ο συνδυασμός αυτών των φυσικών διεργασιών μαζί με στοιχεία διαστάσεων αποφέρει

$$\rho\frac{\partial\omega}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial\omega}{\partial x_j}=\beta\rho\omega^2+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma\mu_c\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right] \qquad (16.30)$$

όπου τα β και σ προσδιορίζονται.

Συγκριτικά με την εξίσωση k μπορούν να πραγματοποιηθούν αρκετές παρατηρήσεις. Πρώτον, σημειώστε ότι κάποιος όρος παραγωγής δεν εμφανίζεται στην εξίσωση (16.30). Δεύτερον, κάποιος όρος μοριακής διάχυσης επίσης απουσιάζει από αυτή την εξίσωση. Η συμπερίληψη ενός όρου μοριακής διάχυσης είναι απαραίτητη αν κάποιος σκοπεύει να ενσωματώσει μια εξίσωση στο τοίχωμα δια μέσου του παχύρευστου υποστρώματος.

Η εξίσωση (16.30) θεωρείται ως η βασική εξίσωση – ω πάνω στην οποία πολλές τροποποιήσεις παρουσιάζονται. Όπως και στην περίπτωση του μοντέλου *k-ε*, έτσι και στο μοντέλο *k-ω* υπάρχουν αρκετές εκδοχές του. Ίσως το ένα από τα πιο καλά είναι το μοντέλο του Wilcox που παρέχεται παρακάτω. Η εξίσωση τυρβώδους κινητικής ενέργειας δίνεται από:

$$\bar{\rho}\frac{dk}{dt}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\sigma^2\mu_c)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]+P_k-\beta^2\rho\omega k \qquad (16.31)$$

Και η εξίσωση του συγκεκριμένου ποσοστού διάχυσης είναι :

$$\bar{\rho}\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\sigma\mu_c)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+\alpha\frac{\omega}{k}P_k-\beta\rho\omega^2 \qquad (16.32)$$

Η ιξώδες δίνη καθορίζεται από :

$$\mu_i=\rho\frac{k}{\omega} \qquad (16.33)$$

Κι οι βοηθητικές σχέσεις είναι :

$$t=\beta^2\omega k \qquad (16.34)$$

$$l=\frac{k}{\omega} \qquad (16.35)$$

Οι σταθερές που χρησιμοποιήθηκαν στις εξισώσεις (16.31) και (16.32) είναι :

$$\alpha=\frac{5}{9} \quad \beta=\frac{3}{40} \quad \beta^2=\frac{9}{100} \quad \sigma=\frac{1}{2} \quad \sigma^2=\frac{1}{2}$$

16.5.6 Μοντέλο τύρβης δύο εξισώσεων *k-ε / k-ω*.

Το μοντέλο τύρβης *k-ω* αποδίδει καλύτερα καλά και στην πραγματικότητα είναι ανώτερο του μοντέλου k-ε όσον αφορά το υπόστρωμα της στρωτής ροής και την λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος. Ωστόσο, έχει δειχθεί, ότι το μοντέλο *k-ω* επηρεάζεται αρκετά από τον προσδιορισμό του ω έξω από το οριακό στρώμα. Για αυτό το μοντέλο k-ω δεν φαίνεται να είναι ιδανικό στην περιοχή εκτός του οριακού στρώματος. Από τη άλλη πλευρά, το μοντέλο *k-ε* συμπεριφέρεται καλύτερα από το k-ω στην εξωτερική περιοχή, αλλά υστερεί στην εσωτερική περιοχή του οριακού στρώματος.

Για να συμπεριλάβει τα καλύτερα χαρακτηριστικά του κάθε μοντέλου ο Menter έχει συνδυάσει διαφορετικά στοιχεία των μοντέλων k-ε και k-ω και να σχηματίσει ένα νέο μοντέλο δύο εξισώσεων. Το μοντέλο αυτό ενσωματώνει το k-ω για την εσωτερική περιοχή και αλλάζει σε k-ε για την εξωτερική περιοχή του οριακού στρώματος. Οι δύο εκδόσεις του μοντέλου που εισήγαγε ο Menter αναφέρονται ως το βασικό μοντέλο (BSL) (beseline) και η τροποποιημένη εκδοχή του (BSL), το μοντέλο μεταφοράς διατμητικής τάσης (shear-stress transport) (SST). Έχει δειχθεί το μοντέλο (SST) αποδίδει καλά για την πρόβλεψη ροών με αντίθετη βαθμίδα πίεσης.

Το βασικό μοντέλο είναι ολόιδιο με το μοντέλο k-ω που δίνεται από τις εξισώσεις (16.31) και (16.32) στο υπόστρωμα και στην λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος και σταδιακά μεταβαίνει στο μοντέλο k-ε που δίνεται από τις εξισώσεις (21-153) και (21-154) στη εξωτερική περιοχή. Οι εξισώσεις είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_{k1}\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k - \beta^o \bar{\rho} k \omega \qquad (16.36)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_{\omega 1}\mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \alpha_1 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_1 \bar{\rho}\omega^2 \qquad (16.37)$$

όπου

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \qquad (16.38)$$

και

$$c = \beta' \omega k \qquad (16.39)$$

Επιπροσθέτως τα ακόλουθα χρησιμοποιούνται ως

$$\sigma_k = \sigma^o \quad , \qquad \sigma_{\omega 1} = \sigma \quad , \qquad \beta_1 = \beta \quad , \qquad \text{και } \alpha_1 = \alpha$$

Οι εξισώσεις k-ω είναι

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k})\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k - \bar{\rho}\varepsilon \qquad (16.40)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2}\bar{\rho}\frac{\varepsilon^2}{k} \qquad (16.41)$$

όπου

$$\mu_t = \rho c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (16.42)$$

και

$$\omega = \frac{\varepsilon}{c_\mu k} \qquad (16.43)$$

Τώρα, προκειμένου να συνδυάσει τις δύο σειρές των εξισώσεων, το k-ε μετατράπηκε σε k-ω χρησιμοποιώντας τη σχέση (21-182). Στην διαδικασία της μετατροπής δύο πρόσθετοι όροι εμφανίστηκαν σε μια νέα εξίσωση ω. Ένας από αυτούς τους όρους είναι όρος εγκάρσιας διάχυσης και ο άλλος εμφανίζεται όταν το σκ και το στ δεν είναι ίσα. Έχει δειχθεί ότι ο δεύτερος όρος είναι σχετικά μικρός και δεν επηρεάζει σημαντικά τη λύση. Επομένως αγνοείται. Ακολούθως οι μετατρεπόμενες εξισώσεις k-ε διατυπωμένες σε k-ω γράφονται ως:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_{k2}\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k - \beta \bar{\rho} k \omega \qquad (16.44)$$

και $$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_{\omega 2}\mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \alpha_2 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_2 \bar{\rho}\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \qquad (16.45)$$

Οι σχέσεις μεταξύ συντελεστών στις αρχικές εξισώσεις k-ε και στις μετατρεπόμενες καθιερώνονται ως εξής:

$$\sigma_{k2} = \frac{1}{\sigma_k} \quad , \qquad \sigma_{\omega 2} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad , \qquad \beta_2 = \beta^o(c_\alpha - 1) \qquad \beta^o = c_\mu \quad , \qquad \alpha_2 = (c_{\varepsilon 1} - 1)$$

Τώρα, τα δύο σετ εξισώσεων συνδυάζονται με τη εισαγωγή της συνδυασμένης συνάρτησης του F. Οι εξισώσεις k-ω που δίνονται από τις σχέσεις (16.44) και (16.45) πολλαπλασιάζονται με (1-F). Στη συνέχεια προστίθενται μεταξύ τους. Η συνδυασμένη συνάρτηση της F συνδυάστηκε για να είναι ίση με 1 στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα και από αυτό ενεργοποιείται το μοντέλο k-ω και μηδενίζεται μακριά από το τοίχωμα, έτσι ενεργοποιείται το μετατρεπόμενο μοντέλο k-ε. Το συνδυασμένο μοντέλο δύο εξισώσεων k-ω/k-ε δίνεται από:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_\kappa \mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k - \beta^o \bar{\rho}\omega k \qquad (16.46)$$

Και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\bar{u}_j\omega\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_\omega\mu_t)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right] + 2(1 - F_1)\bar{\rho}\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} + a\frac{\omega}{k}P_k - \beta\bar{\rho}\omega^2 \qquad (16.47)$$

όπου η παραγωγή τύρβης όπως ορίστηκε προηγουμένως δίνεται από:

$$P_k = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (16.48)$$

και

$$\tau_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$$

Οι σταθερές που εμφανίζονται στις σχέσεις (16.46) και (16.47) εκφράζονται σε μια γενική συμπαγής μορφή από το:

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2 \qquad (16.49)$$

Όπου ϕ_1 αντιπροσωπεύει τις σταθερές που σχετίζονται με το μοντέλο k-ω (F_1=0).
Η διαφορά μεταξύ του αρχικού μοντέλου και του μοντέλου μεταφοράς διατμητικής τάσης είναι ο ορισμός του τυρβώδους ιξώδους και ο προσδιορισμός των σταθερών.

Το τυρβώδες ιξώδες για το βασικό μοντέλο ορίζεται από

$$\mu_t = \bar{\rho}\frac{\kappa}{\omega} \qquad (16.50)$$

και οι σταθερές για τη συνάρτηση φ καθορίζονται ως εξής:
Οι τιμές των σταθερών για παύση φ1 καθορίζονται σύμφωνα με τα

$$\sigma_{\kappa 1} = 0.5 \;, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5\,, \quad \beta_1 = 0.075 \quad \beta = 0.09 \;, \quad \kappa = 0.41$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta} - \sigma_{\omega 1}\kappa^2/\sqrt{\beta} \cong \frac{5}{9}$$

και οι σταθερές για το φ_2 είναι

$$\sigma_{\kappa 2} = \frac{1}{\sigma_\kappa} = 1.0 \;, \quad \sigma_{\omega 2} = \frac{1}{\sigma} = 0.856 \;, \quad \beta_2 = 0.0828$$
$$\beta = 0.09 \;, \quad \kappa = 0.41$$

$$\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta} - \sigma_{\omega 2}\kappa^2/\sqrt{\beta}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι ορισμοί

$$F_1 = tanh\,(arg_1^4) \qquad (16.51)$$

$$arg_1 = min\left[max\left(\frac{\sqrt{k}}{0{,}09_{\omega y}},\ \frac{500_v}{\omega y^2}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}\kappa}{CD_{\kappa\omega}y^2}\right] \qquad (21\text{-}195)$$

Όπου y είναι η απόσταση από την πλησιέστερη επιφάνεια, και $CD_{\kappa\omega}$ είναι το θετικό τμήμα του όρου εγκάρσιας διάχυσης

$$CD_{\kappa\omega} = max\left[2\rho\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{ak}{ax}\frac{a\omega}{\alpha\chi}\,, 10^{-20}\right] \qquad (16.52)$$

Σημειώστε ότι μακριά από στερεή επιφάνεια, όπου το y→ μεγάλο, ο όρος arg_1 πλησιάζει το μηδέν, λόγω ${}^{1}/_{y}$ και ${}^{1}/_{y^2}$. Επιπλέον, οι τρεις όροι στο arg_1 αντιπροσωπεύουν τα ακόλουθα:

1. Ο όρος $\left(\sqrt{k}/0.09_{\omega y}\right)$ είναι η κλίμακα τυρβώδους μήκους διαιρούμενο με y. Είναι ίσο με 2.5 στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος και προσεγγίζει το μηδέν στο άκρο οριακού στρώματος.

2. Ο όρος $\left(500_{v}/\omega y^2\right)$ επιβάλλει στη συνάρτηση F_1 τη τιμή 1 στη περιοχή υποστρώματος και τη τιμή $1/y$ στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος. Υπενθυμίζουμε ότι η το ω είναι ανάλογο προς $1/y^2$ κοντά στην επιφάνεια, και είναι ανάλογο προς $1/y$ στην λογαριθμική περιοχή. Ως εκ τούτου, ο όρος $1/\omega y^2$ θα είναι σταθερός κοντά στην επιφάνεια και θα προσεγγίσει το μηδέν στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος.

3. Ο τρίτος όρος $\left(4\rho\sigma_{\omega 2}\kappa/CD_{\omega\kappa}y^2\right)$ περιλαμβάνεται για την πρόληψη της εξάρτησης στην ελεύθερη ροή. Μπορεί να δειχθεί ότι, καθώς η οριακού στρώματος ακμή φθάνει κανείς στο άκρο του οριακού στρώματος, η ποσότητα arg_1 καθώς και η ποσότητα F_1 τείνουν στο μηδέν και, επομένως, χρησιμοποιείται το μοντέλο $k-\varepsilon$ σε αυτήν την περιοχή.

Η μετάβαση στη τυρβώδη περιοχή ενεργοποιείται εισάγοντας τον όρο παραγωγής, συνήθως πάνω σε μερικά σημεία του πλέγματος κοντά στο συγκεκριμένο σημείο μετάβασης. Σημειώστε ότι η διάρκεια της παραγωγής είναι απενεργοποιημένη στο τμήμα στρωτή ροή.

Αρχικές και οριακές συνθήκες: Συνιστώνται οι ακόλουθες συνθήκες ελεύθερης ροής

$$\omega_\infty = m\frac{u_\infty}{L}\ , \qquad V_{L_\infty} = 10^{-n}V_\infty\ , \qquad k_\infty = V_{1_\infty}\omega_\infty$$

όπου

$1 \le m \le 10$, $2 \le n \le 5$,

και το L είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος, για παράδειγμα, το μήκος του υπολογιστικού πεδίου. Επάνω σε στερεές επιφάνειες, η οριακή συνθήκη για την ω ρυθμίζεται σύμφωνα με

$$\omega = 10\frac{6V}{\beta_1(\Delta y_1)^2} \tag{16.53}$$

όπου Δy_1 είναι η απόσταση του πρώτου σημείου μακριά από το τοίχωμα. Αυτή η οριακή συνθήκη που καθορίζεται για ομαλό (smooth) τοίχωμα, και Δy_1^+ πρέπει να είναι μικρότερη από 3. Στο όριο εκροής, χρησιμοποιείται παρέκταση (extrapolation).

16.5.7 Μοντέλο μεταφοράς διατμητικής τάσης: Το τυρβώδες ιξώδες του μοντέλου BSL έχει τροποποιηθεί με βάση την υπόθεση ότι η τυρβώδης διατμητική τάση είναι ανάλογη με την τυρβώδη κινητική ενέργεια στη λογαριθμική περιοχή και στη περιοχή απορρεύματος του τυρβώδους οριακού στρώματος. Το ποσό του υπολογισμένου τυρβώδους ιξώδους είναι περιορισμένο, προκειμένου να ικανοποιηθεί η απαίτηση της αναλογικότητας (proportionality requirement). Αυτός ο περιορισμός σχετικά με το τυρβώδες ιξώδες επιβάλλεται από την τυρβώδη κινητική ενέργεια, και έτσι το τυρβώδες ιξώδες ορίζεται ως.

$$v_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1\omega\ , \Omega F_2)} \tag{21-198}$$

όπου $α_1 = 0,31$, Ω είναι η απόλυτη τιμή της στροβιλότητας $\Omega = \left|\frac{\vartheta v}{\vartheta x} - \frac{\vartheta u}{\vartheta y}\right|$, και $F_2 = Tanh(arg_2^2)$ με

$$arg_2 = max\left[2\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500v}{\omega y^2}\right] \tag{21-199}$$

Οι σταθερές για τα φ_1 και φ_2 είναι ταυτόσημες με το μοντέλο αναφοράς, εκτός από τη σταθερά $\sigma_{\kappa 1}$, όπου $\sigma_{\kappa 1} = 0.85$

16.5.8 Διόρθωση συμπιεστότητας: Παρόμοια με εκείνη του μοντέλου *k-ε*, ο όρος διόρθωσης συμπιεστότητα περιλαμβάνεται από την εισαγωγή του τυρβώδους αριθμού Mach. Έτσι, οι εξισώσεις (17 - 189) και (17 - 190) διαμορφώνονται ως:

$$\frac{\partial}{\vartheta t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_k\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k$$
$$-\beta * \bar{\rho}\omega k[1 + \alpha_1 M_t^2(1 - F_l)] + (1 - F_l)\overline{p^u a^w} \tag{21-200}$$

και$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{u}_j\omega) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_\omega\mu_t)\frac{\partial_\omega}{\partial x_j}\right]$

$$+a\frac{\omega}{k}P_k - \beta\bar{\rho}\omega^2 + 2(1 - F_1)\bar{\rho}\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial \kappa}{\partial x_j}\frac{\vartheta\omega}{\vartheta x_j}$$
$$+(1 - F_l)\beta * a_1 M_t^2\bar{\rho}\omega^2 - \frac{1}{v_t}(1 - F_l)\overline{\rho^v a^w} \tag{21-201}$$

όπου η συνάρτηση ανάμειξης F_l ορίζεται όπως στο αρχικό μοντέλο.

Αδιάστατη μορφή

Οι αδιάστατες μεταβλητές που ορίζονται προηγουμένως έχουν χρησιμοποιηθεί για να εκφράσουν τις εξισώσεις (21-189) και (21-190) σε αδιάστατη μορφή.
Ο αριθμός Reynolds στην εξίσωση είναι μια καλή ένδειξη αδιαστατοποίησης της εξίσωσης. Το αδιάστατο μοντέλο δύο εξισώσεων *k-ε* / *k-ω* γράφεται ως εξής:

$$\rho\frac{dk}{dt} = \rho\left(\frac{\partial k}{\partial t} + u\frac{\partial k}{\partial x} + v\frac{\partial k}{\partial y}\right) = \frac{1}{Re_\infty}\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left[(\mu + \sigma_k\mu_t)\frac{\partial k}{\partial x}\right] + \frac{1}{Re_\infty}\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left[(\mu + \sigma_k\mu_t)\frac{\vartheta k}{\vartheta y}\right] + P_k - \beta * \rho\omega k \tag{21-202}$$

και

$$\rho\frac{d\omega}{dt} = \rho\left(\frac{\vartheta\omega}{\vartheta t} + u\frac{\vartheta\omega}{\vartheta x} + v\frac{\vartheta\omega}{\vartheta y}\right) = \frac{1}{Re_\infty}\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left[(\mu + \sigma_\omega\mu_t)\frac{\vartheta\omega}{\vartheta x}\right]$$
$$+\frac{1}{Re_\infty}\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left[(\mu + \sigma_\omega\mu_t)\frac{\vartheta\omega}{\vartheta y}\right] + 2\rho(1 - F_l)\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\left[\frac{\vartheta k}{\vartheta x}\frac{\vartheta\omega}{\vartheta x} + \frac{\vartheta k}{\vartheta y}\frac{\vartheta\omega}{\vartheta y}\right] + a\frac{\omega}{k}P_k - \beta\rho\omega^2 \tag{21-203}$$

όπου ο όρος παραγωγής P_k προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$P_k = \tau_{ij}\frac{\vartheta u_i}{\vartheta x_j} = \left[\left(\mu_t\left(\frac{\vartheta u_i}{\vartheta x_j} + \frac{\vartheta u_j}{\vartheta x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\vartheta u_k}{\vartheta x_k}\right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}\right]\frac{\vartheta u_i}{\vartheta x_j} \tag{21-204}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βιβλίο	**ISBN**
Tu, J., Yeoh, G-H., Liu, C., 2018, (3rd ed), Computational Fluid Dynamics. A Practical Approach, Elsevier.	ISBN 9780081011270
Versteeg H., Malalasekera, W., 1995, An Introduction to Computational Fluid Dynamics. Longman	ISBN 9780582218845
Wendt, J., 2009, Computational Fluid Dynamics. An Introduction, (3rd ed), Springer.	ISBN 9783540850557
Patankar, S., 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Taylor & Francis.	ISBN 9780891165223
Anderson, J., 1995, Computational Fluid Dynamics. The basics with applications. McGraw-Hill	ISBN 9780070016852
Biringen, S., Chow C-Y, 2011, An introduction to Computational Fluid Mechanics by example, Wiley	ISBN 9780470102268
Tucker, P., 2014, Unsteady Computational Fluid Dynamics in Aeronautics, Springer	ISBN 9789400770485
Cebeci, T., Shao, J., Kafyeke, F., Laurendeau, E., 2005, Computational Fluid Dynamics for Engineers, Springer.	ISBN 9783540244514
Hirsch, Ch., 2007, (2nd ed), Numerical Computation of Internal and External Flows, Elsevier	ISBN 9780750665940
Keane, A., Nair, P., 2005, Computational Approaches for Aerospace Design. The Pursuit of Excellence, Wiley	ISBN 9780470855409
Hoffmann, K, Chiang, S., 2000, (4th ed), Vol. I, II, III, Computational Fluid Dynamics, Engineering Education System	ISBN 9780962373109
Chung, T., 2002, Computational Fluid Dynamics, Cambridge University Press.	ISBN 9780521594162
Tannehill, J., Anderson, D., Pletcher, R., 1997, (2nd ed) Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Taylor & Francis.	ISBN 978156032046
Ferziger, J., Peric, M., 2002, (3rd ed), Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer	ISBN 9783540420746