

Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
17 Μαΐου 2013

Θέμα 1. [35 Βαθμοί] Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 5 φορές.

- (α) Ποιά η πιθανότητα όλες οι ρίψεις να φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα;
- (β) Ποιά η πιθανότητα τα αποτελέσματα όλων των ρίψεων να διαφορετικά;
- (γ) Ποιά η πιθανότητα να έρθει η ένδειξη 3 ακριβώς 2 φορές;

Θέμα 2. [35 Βαθμοί] Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{αν } x \in (0, c), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (0, c), \end{cases}$$

όπου c είναι μια θετική σταθερά. Να υπολογιστούν

- (α) η σταθερά c ,
- (β) οι πιθανότητες $P(X > 1), P(X = 1)$,
- (γ) η διασπορά $V(X)$ της X .

Θέμα 3. [40 Βαθμοί] Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με κατανομή $N(0, \sigma^2)$, όπου σ είναι μια θετική άγνωστη παράμετρος. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση

$$T = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2}$$

δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ .

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια 2 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις

1. (α) $6/6^5$,

(β)

$$\frac{(6)_5}{6^5}$$

,

(γ)

$$\binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

2. (α) Το ολοκλήρωμα της f πρέπει να ισούται με 1, από όπου προκύπτει ότι $c = 2$.

(β)

$$P(X > 1) = \int_1^2 (x/2) dx = 3/4,$$

και $P(X = 1) = 0$ αφού η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

(γ) $V(X) = E(X^2) - (EX)^2$. Όμως

$$E(X) = \int_0^2 x f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{6} = \frac{2}{3},$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = \frac{16}{8} = 2.$$

Άρα $V(X) = 2 - (4/9) = 14/9$.