



1η ΑΣΚΗΣΗ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Παράλληλη Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

[Ημερομηνία παράδοσης: Κυριακή 5.4.2026 με υποβολή στην e-class]

Δίνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

με συνοριακές συνθήκες

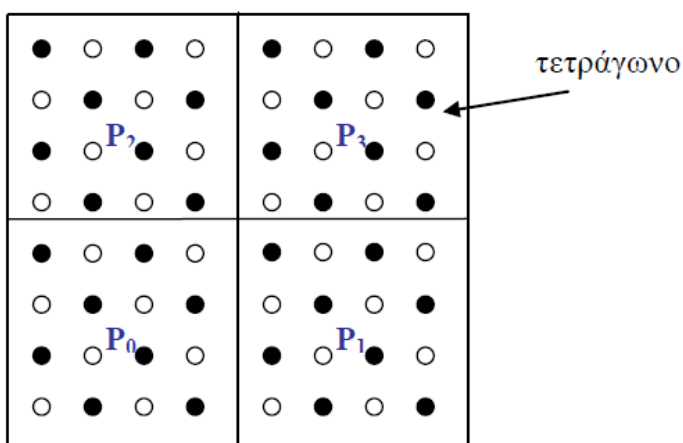
$$u(0, y) = u(x, 0) = u(1, y) = 0$$

και

$$u(x, 1) = 1.$$

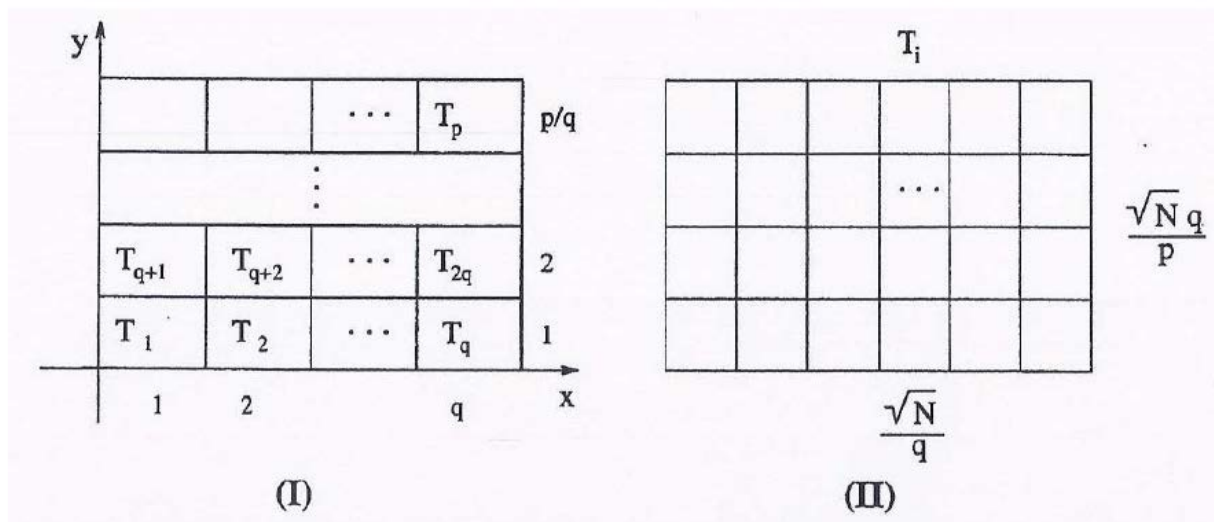
Παραλληλοποίηση των επαναληπτικών μεθόδων

Για την αριθμητική επίλυση του ανωτέρω προβλήματος χρησιμοποιούνται οι επαναληπτικές μέθοδοι. Το πεδίο ολοκλήρωσης χωρίζεται σε ορθογώνια που αποτελούνται από το ίδιο πλήθος κόμβων (σημείων) αριθμημένων με κάποια διάταξη (όπως φυσική, κόκκινο/μαύρο). Ο υπολογισμός των σημείων κάθε ζώνης / ορθογωνίου ανατίθεται σε ένα επεξεργαστή.



Σχήμα: Κάθε ορθογώνιο αποτελείται από τέσσερις γραμμές και τέσσερις στήλες σημείων αριθμημένων με την κόκκινη-μαύρη διάταξη.

Προκειμένου να ολοκληρωθούν οι υπολογισμοί και να επιτευχθεί η σύγκλιση των μεθόδων απαιτείται η επικοινωνία (αποστολή των τιμών των συνοριακών κόμβων) με τους γειτονικούς επεξεργαστές. Κατά τον διαχωρισμό σε ορθογώνια, ένα $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ πεδίο ζητείται να διαχωριστεί σε p/q οριζόντιες λωρίδες (Σχήμα (I)) και κάθε λωρίδα σε q ορθογώνια ίδιου μεγέθους N/p σημείων (Σχήμα (II)). Τελικά το πλέγμα θα έχει χωριστεί σε $\frac{q\sqrt{N}}{p} \times \frac{\sqrt{N}}{q}$ ορθογώνια, όπου $1 \leq q \leq \sqrt{N}$.



ΘΕΜΑ 1.

A) Να μελετηθεί η συμπεριφορά της επαναληπτικής μεθόδου SOR για $\sqrt{N} \times \sqrt{\frac{N}{p}}$ στοιχεία μιας ζώνης και για διάφορες τιμές του ω όπου $\omega \in (0,2)$. Για ποια τιμή του ω έχουμε την μέγιστη ταχύτητα σύγκλισης (ελάχιστο T_p);

B) Να μελετηθεί η συμπεριφορά της επαναληπτικής μεθόδου SOR για $\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\bar{\mu}^2}}$ όπου $\bar{\mu} = \cos(\pi h)$, $h=1/(N+1)$ και για $q = \frac{\sqrt{p}}{4}, \frac{\sqrt{p}}{2}, \sqrt{p}, 2\sqrt{p}, 4\sqrt{p}$. Με βάση τη θεωρία το καλύτερο ορθογώνιο είναι το τετράγωνο $\sqrt{\frac{N}{p}} \times \sqrt{\frac{N}{p}}$. Επαληθεύεται πειραματικά η θεωρία; Σχολιάστε.

ΘΕΜΑ 2.

Να μελετηθεί η συμπεριφορά της επαναληπτικής μεθόδου Jacobi για διάφορα πλήθη γραμμών εντός μιας ζώνης. Πόσες γραμμές πρέπει να έχει μια ζώνη για να έχουμε το ελάχιστο T_p ;

B) Να μελετηθεί η συμπεριφορά της επαναληπτικής μεθόδου Jacobi για $q = \frac{\sqrt{p}}{4}, \frac{\sqrt{p}}{2}, \sqrt{p}, 2\sqrt{p}, 4\sqrt{p}$.

Υπόδειξη: Για την μελέτη της συμπεριφοράς των παραπάνω επαναληπτικών μεθόδων να κατασκευασθούν οι γραφικές παραστάσεις των T_p , S_p και E_p για $p = 2, 4, 6, 8, 16$ και για $h = \frac{1}{41}, \frac{1}{61}, \frac{1}{81}$. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας για την κάθε μέθοδο και συγκριτικά μεταξύ τους.