ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

ΕΔΙΠ Μ. Λουκά

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

7 Απριλίου 2020

Κεφάλαιο 3

Συγχώνευση (Merging)

Έστω

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} \quad B = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$$

ταξινομημένες ακολουθίες αριθμών σε μη φθίνουσα σειρά. Να σχηματισθεί η ακολουθία

$$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_{r+s}\}$$

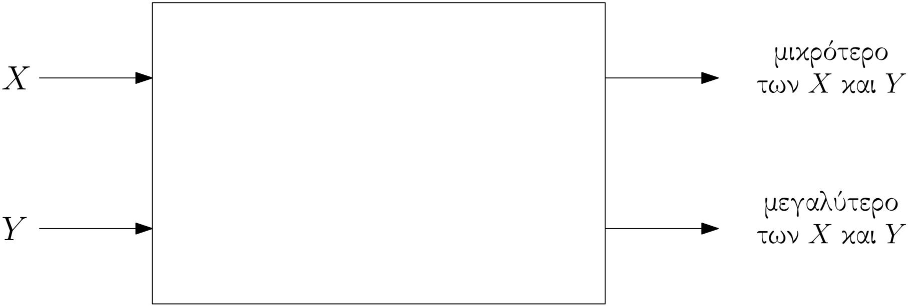
ταξινομημένη σε μη φθίνουσα σειρά. Αν $r = s = n$ (χειρότερη περίπτωση), τότε ο ακολουθιακός αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα $O(n)$, η οποία είναι βέλτιστη $(\Omega(n))$.

Θα μελετηθεί το πρόβλημα της συγχώνευσης σε μια ποικιλία παράλληλων υπολογιστικών μοντέλων. Με βάση το κάτω όριο απαιτείται $\Omega(n/N)$ χρόνος για οποιοδήποτε παράλληλο αλγόριθμο συγχώνευσης που χρησιμοποιεί N επεξεργαστές.

Ένα δίκτυο για συγχώνευση

(r, s) δίκτυο συγχώνευσης: ειδικού σκοπού παράλληλη αρχιτεκτονική.

- όλοι οι επεξεργαστές είναι ίδιοι, απλοί και επικοινωνούν με ένα ειδικού σκοπού δίκτυο (συγκριτές - comparators).



Σχήμα: Συγκριτής (περίπτωση $n = 1$)

Ένα δίκτυο για συγχώνευση

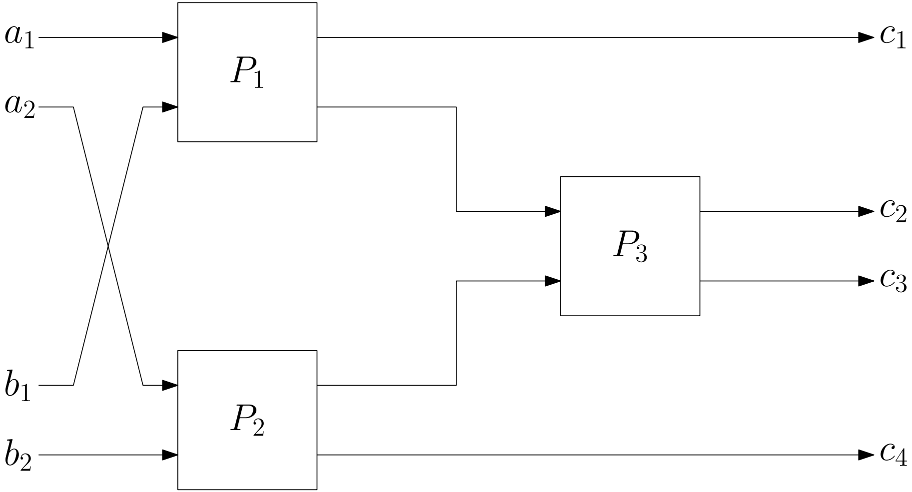
Υποθέσεις

1. $r = s = n \geq 1$
2. $n = 2^k$

Με τη χρήση των συγκριτών θα κατασκευαστεί ένα δίκτυο.

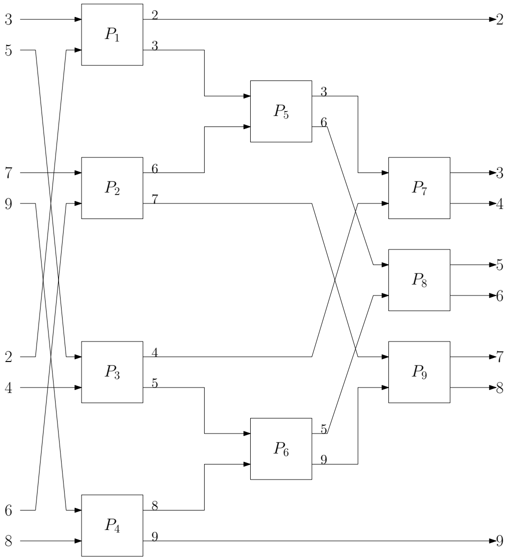
Για $n = 1$: Αρκεί ένας συγκριτής.
Για $n = 2$: $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ και $B = \{b_1, b_2\}$.
Για $n = 4$: $A = \{3, 5, 7, 9\}$ και $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Ένα δίκτυο για συγχώνευση



Σχήμα: Περίπτωση $n = 2$ - Συγχώνευση δύο ακολουθιών με τέσσερα στοιχεία η καθεμία

Ένα δίκτυο για συγχώνευση



Σχήμα: Περίπτωση $n = 3$

Ένα δίκτυο για συγχώνευση

Γενικά ένα (n, n) δίκτυο συγχώνευσης σχηματίζεται από δύο $(n/2, n/2)$ άλλα δίκτυα. Τα στοιχεία στις περιττές θέσεις των A και B, δηλαδή $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ και $\{b_1, b_3, b_5, \cdots, b_{n-1}\}$ συγχωνεύονται στο ένα $(n/2, n/2)$ δίκτυο συγχώνευσης, δημιουργώντας την $\{d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n\}$. Ταυτόχρονα για τα στοιχεία στις άρτιες θέσεις σχηματίζεται η

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

με τη χρήση του άλλου $(n/2, n/2)$ δικτύου. Η τελική ακολουθία $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ λαμβάνεται από odd-even merging

$$c_1 = d_1, \quad c_{2n} = e_n, \quad c_{2i} = min(d_{i+1}, e_i)$$

και

$$c_{2i+1} = max(d_{i+1}, e_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

Ένα δίκτυο για συγχώνευση

Στην $\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$:

$$i \quad \text{στοιχεία} \leq d_{i+1} \longrightarrow 2i \quad \text{στοιχεία των A και B} \leq d_{i+1}$$

ή

$$c_{2i} \leq d_{i+1}$$

όμοια

$$c_{2i} \leq e_i$$

Επίσης

$$d_{i+1} \leq c_{2i+1}$$

και

$$e_i \leq c_{2i+1}$$

Επειδή

$$c_{2i} \leq c_{2i+1}$$

συνεπάγεται

$$c_{2i} = min(d_{i+1}, e_i), \quad c_{2i+1} = max(d_{i+1}, e_i)$$

Παράλληλη συγχώνευση

Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας $P_1, P_2, \cdots, P_N$ επεξεργαστές, $N \leq r \leq s$ και στη χειρότερη περίπτωση $r = s = n$. Επίσης κάθε επεξεργαστής είναι σε θέση να εκτελεί τις εξής ακολουθιακές διαδικασίες:

1. Τη διαδικασία SEQUENTIAL MERGE
2. Τη διαδικασία BINARY SEARCH

Παράλληλη συγχώνευση

Εισάγουμε παραλληλία με τη μέθοδο του χωρισμού (partitioning). Δίνονται οι δύο ταξινομημένες ακολουθίες:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} \text{ και } B = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$$

οι οποίες χωρίζονται σε ένα πλήθος ζευγών από υποακολουθίες έτσι ώστε να είναι δυνατός ο σχηματισμός της τελικής ταξινομημένης ακολουθίας από την ταυτόχρονη συγχώνευση των ζευγών υποακολουθιών.

Χωρισμός:

$$\alpha_1 \cdots \overbrace{\alpha_{\lceil r/N \rceil}}^{\alpha'_1} | \alpha_{\lceil r/N \rceil + 1} \cdots \overbrace{\alpha_{2\lceil r/N \rceil}}^{\alpha'_2} | \alpha_{2\lceil r/N \rceil + 1} \cdots | \cdots | \alpha_{i\lceil r/N \rceil + 1} \cdots$$
$$\alpha_{(i+1)\lceil r/N \rceil} | \cdots b_1 \cdots \underbrace{b_{\lceil s/N \rceil}}_{b'_1} | b_{\lceil s/N \rceil + 1} \cdots \underbrace{b_{2\lceil s/N \rceil}}_{b'_2} | \cdots | b_{i\lceil s/N \rceil + 1} \cdots$$
$$b_{(i+1)\lceil s/N \rceil} | \cdots$$

Παράλληλη συγχώνευση

Εφαρμογή της BINARY SEARCH για την εύρεση του βαθμού του $\mathbf{b_j}$ στην $\mathbf{A}$

Συγκρίνεται το b_j με το μεσαίο στοιχείο της A $\longrightarrow$ περιορισμός της αναζητησης στο πρώτο ή δεύτερο μισό τμήμα της A.

Η εργασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρις ότου το b_j απομονωθεί μεταξύ δύο διαδοχικών στοιχείων της A, δηλαδή όταν

$$\alpha_i < b_j < \alpha_{i+1}$$

Βαθμός $[(b_j : A)] = i$. Από υπόθεση $\rightarrow$ τα στοιχεία των A και B είναι διάφορα μεταξύ τους.

Παράλληλη συγχώνευση

Παρατηρήσεις

1. Αν $\alpha_i = b_j$ τότε αυθαίρετα αποφασίζεται ότι το α_i είναι μικρότερο.
2. Η πράξη του ταυτόχρονου διαβάσματος εκτελείται κατά τη διάρκεια της BINARY SEARCH. Σε κάθε τέτοια χρονική στιγμή ορισμένοι επεξεργαστές εκτελούν μια δυαδική αναζήτηση στην ίδια ακολουθία.

Παράλληλη συγχώνευση

Διαδικασία 1: BINARY SEARCH (S,x,k)

- **Βήμα 1**

(1.1) $i \leftarrow 1$
(1.2) $h \leftarrow n$
(1.3) $k \leftarrow 0$

- **Βήμα 2**

όσο $i \leq h$ **κάνε**
    (2.1) $m \leftarrow \lfloor (i+h)/2 \rfloor$
    (2.2) **αν** $x = s_m$ **τότε**
        (i) $k \leftarrow m$
        (ii) $i \leftarrow h+1$
    αλλιώς
        αν $x < s_m$ **τότε**
            $h \leftarrow m-1$
        αλλιώς
            $i \leftarrow m+1$
        τέλος
    τέλος
τέλος

Πολυπλοκότητα: $O(logn)$

Παράλληλη συγχώνευση

Διαδικασία 2: SEQUENTIAL MERGE (A,B,C)

- **Βήμα 1**

(1.1) $i \leftarrow 1$

(1.2) $j \leftarrow 1, \quad a_{r+1} \leftarrow \infty, \quad b_{s+1} \leftarrow \infty$

- **Βήμα 2**

για $k = 1$ **έως** $r + s$ **κάνε**

  αν $a_i < b_j$ **τότε**

    (i) $c_k \leftarrow a_i$

    (ii) $i \leftarrow i + 1$

  αλλιώς

    (i) $c_k \leftarrow b_j$

    (ii) $j \leftarrow j + 1$

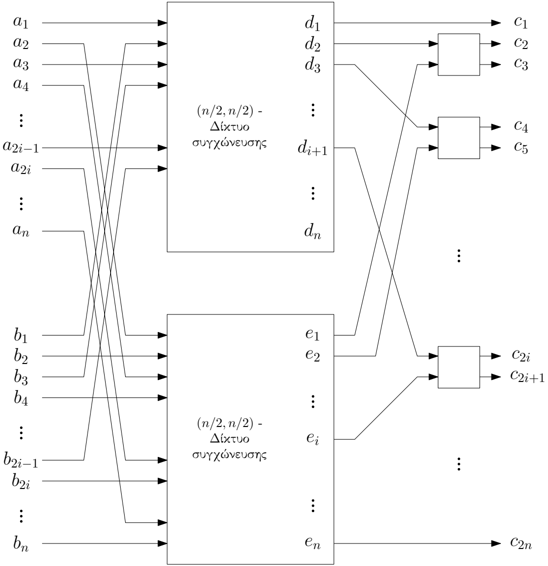
  τέλος

τέλος

$O(n) = \Omega(n) =$ κάτω όριο συγχώνευσης

Η SEQUENTIAL MERGE είναι βέλτιστη!

Παράλληλη συγχώνευση



Σχήμα: Συγχώνευση odd-even

Συγχώνευση CREW SM SIMD

Διαδικασία 3: CREW MERGE (A, B, C)

- **Βήμα 1**

{Επίλεξε $N-1$ στοιχεία της A που υποδιαιρούν την ακολουθία αυτή σε N υποακολουθίες του ιδίου περίπου μεγέθους. Ονόμασε την υποακολουθία που δημιουργήθηκε από αυτά τα $N-1$ στοιχεία A'. Δημιούργησε μια υποακολουθία B' από $N-1$ στοιχεία της B με τον ίδιο τρόπο. Η εκτέλεση του βήματος αυτού είναι η ακόλουθη:}

για $i = 1$ **έως** $N-1$ **κάνε παράλληλα**

Ο επεξεργαστής P_i υπολογίζει το a'_i και b'_i από

(1.1) $a'_i \leftarrow a_{i\lceil r/N \rceil}$

(1.2) $b'_i \leftarrow b_{i\lceil s/N \rceil}$

τέλος

Συγχώνευση CREW SM SIMD

- **Βήμα 2**

{Συγχώνευσε τις A' και B' σε μια ακολουθία τριάδων $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_{2N-2}\}$, όπου κάθε τριάδα αποτελείται από ένα στοιχείο της A' ή B', ακολουθούμενο από τη θέση του στην A' ή B', ακολουθούμενο από το όνομα της αρχικής ακολουθίας, δηλαδή, της A ή B. Αυτό γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:}

Συγχώνευση CREW SM SIMD

(2.1) **για** $i = 1$ **έως** $N - 1$ **κάνε παράλληλα**

(i) Ο επεξεργαστής P_i χρησιμοποιεί την BINARY SEARCH στη B' για να βρεί το μικρότερο j έτσι ώστε $a'_i < b'_j$

(ii) **αν** *υπάρχει* j **τότε**

$v_{i+j-1} \leftarrow (a'_i, i, A)$

αλλιώς

$v_{i+N-1} \leftarrow (a'_i, i, A)$

τέλος

τέλος

(2.2) **για** $i = 1$ **έως** $N - 1$ **κάνε παράλληλα**

(i) Ο επεξεργαστής P_i χρησιμοποιεί την BINARY SEARCH στην A' για να βρεί το μικρότερο j έτσι ώστε $b'_i < a'_j$

(ii) **αν** *υπάρχει* j **τότε**

$v_{i+j-1} \leftarrow (b'_i, i, B)$

αλλιώς

$v_{i+N-1} \leftarrow (b'_i, i, B)$

τέλος

τέλος

Συγχώνευση CREW SM SIMD

- **Βήμα 3**

{Κάθε επεξεργαστής συγχωνεύει και εισάγει στην C τα στοιχεία δύο υποακολουθιών, ένα από την A και ένα από την B. Οι δείκτες των δύο στοιχείων (ένα από την A και ένα από την B) από όπου κάθε επεξεργαστής πρόκειται να αρχίσει τη συγχώνευση, υπολογίζονται πρώτα και αποθηκεύονται σε έναν πίνακα Q από ταξινομημένα ζεύγη. Το βήμα αυτό εκτελείται ως εξής:}

Συγχώνευση CREW SM SIMD

(3.1) $Q(1) \leftarrow (1,1)$

(3.2) **για** $i = 2$ **έως** N **κάνε παράλληλα**

αν $v_{2i-2} = (a'_k, k, A)$ **τότε**

ο επεξεργαστής P_i

(i) χρησιμοποιεί την BINARY SEARCH στο B για να βρεί το μικρότερο j τέτοιο ώστε $b_j > a'_k$

(ii) $Q(i) \leftarrow (k\lceil r/N \rceil, j)$

αλλιώς

ο επεξεργαστής P_i

(i) χρησιμοποιεί την BINARY SEARCH στο A για να βρεί το μικρότερο j τέτοιο ώστε $a_j > b'_k$

(ii) $Q(i) \leftarrow (j, k\lceil s/N \rceil)$

τέλος

τέλος

Συγχώνευση CREW SM SIMD

(3.3) **για** $i = 1$ **έως** N **κάνε παράλληλα**

Ο επεξεργαστής P_i χρησιμοποιεί την SEQUENTIAL MERGE και τον $Q(i) = (x, y)$ για να συγχωνεύσει δύο υποακολουθίες, η μία ξεκινώντας από το a_x και η άλλη από το b_y και τοποθετεί τα αποτελέσματα της συγχώνευσης στον πίνακα C αρχίζοντας στη θέση $x + y - 1$. Η συγχώνευση συνεχίζεται μέχρις ότου

(i) βρεθεί ένα στοιχείο μεγαλύτερο ή ίσο με το πρώτο στοιχείο του v_{2i}, σε κάθε μία από τις A και B (όταν $i \leq N - 1$)

(ii) δεν υπάρχει κανένα στοιχείο στην A ή B (όταν $i = N$)

τέλος

Συγχώνευση CREW SM SIMD

Ανάλυση

Βήμα 1: Κάθε επεξεργαστής υπολογίζει δύο δείκτες. Συνεπώς το βήμα αυτό απαιτεί σταθερό χρόνο $O(1)$.

Βήμα 2: Το βήμα αυτό αποτελείται από δύο εφαρμογές της BINARY SEARCH σε μία ακολουθία με $N-1$ στοιχεία. Κάθε εφαρμογή της BINARY SEARCH ακολουθείται από μία εντολή καταχώρησης. Συνεπώς απαιτείται $O(logN)$ χρόνος.

Συγχώνευση CREW SM SIMD

Βήμα 3:

- Το βήμα (3.1) αποτελείται από μία καταχώρηση σταθερού χρόνου
- το βήμα (3.2) απαιτεί το πολύ $O(logs)$ χρόνο (με $(r \leq s)$)
- Για το βήμα (3.3) παρατηρούμε ότι η V περιέχει $2N-2$ στοιχεία τα οποία διαιρούν τη C σε $2N-1$ υποακολουθίες με μέγιστο μέγεθος ίσο με $\lceil r/N \rceil + \lceil s/N \rceil$
  - Το μέγιστο μέγεθος αυτό προκύπτει αν, για παράδειγμα, ένα στοιχείο a' της A' είναι ίσο με ένα στοιχείο b' της B'
  - Τότε τα $\lceil r/N \rceil$ στοιχεία μικρότερα ή ίσα του a'_i (και μεγαλύτερα ή ίσα του a'_{i-1}) είναι επίσης μικρότερα ή ίσα του b'_j
  - Όμοια, τα $\lceil s/N \rceil$ στοιχεία μικρότερα ή ίσα του b'_j (και μεγαλύτερα του b'_{j-1}) είναι επίσης μικρότερα ή ίσα του a'_i

Συγχώνευση CREW SM SIMD

Στο βήμα αυτό κάθε επεξεργαστής δημιουργεί δύο τέτοιες υποακολουθίες της C των οποίων το ολικό μέγεθος δεν είναι μεγαλύτερο από $2(\lceil r/N \rceil + \lceil s/N \rceil)$, εκτός του P_N, ο οποίος δημιουργεί μόνο μία υποακολουθία της C. Συνεπώς η SEQUENTIAL MERGE απαιτεί το πολύ $O((r+s)/N)$ χρόνο.

Στην χειρότερη περίπτωση $r = s = n$ και επειδή $n \geq N$, ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου ταυτίζεται με το χρόνο εκτέλεσης του βήματος 3. Συνεπώς

$$t(2n) = O((n/N) + logn)$$

Επειδή $p(2n) = N, \quad c(2n) = p(2n) \cdot t(2n) = O(n + Nlogn)$.
Ο αλγόριθμος έχει βέλτιστο κόστος αν και μόνο αν

$$N \leq n/logn$$

.

Συγχώνευση CREW SM SIMD

Παράδειγμα
Έστω $N = 4, \quad A = \{2, 3, 4, 6, 11, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 24\}$
$B = \{1, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 17, 18, 19, 21, 23\}$, δηλαδή $r = s = 12$

Βήμα 1: $A' = \{4, 12, 16\}, \quad B' = \{7, 10, 18\}$ με $\lceil r/N \rceil = \lceil s/N \rceil = 3$

Βήμα 2: Συγχώνευση των A', B' και δημιουργία της
$V = \{(4, 1, A), (7, 1, B), (10, 2, B), (12, 2, A), (16, 3, A), (18, 3, B)\}$

Βήμα 3: $Q(1) = (1, 1), Q(2) = (5, 3), Q(3) = (6, 7), Q(4) = (10, 9)$

Συγχώνευση CREW SM SIMD

Βήμα 3.3: Ο επεξεργαστής P_1 αρχίζει από τα στοιχεία $a_1 = 2$ και $b_1 = 1$ και συγχωνεύει όλα τα στοιχεία των A και B μικρότερα του 7, δημιουργώντας την υποακολουθία {1,2,3,4,5,6} της C.

Ομοίως ο επεξεργαστής P_2 αρχίζει από τα στοιχεία $a_5 = 11$ και $b_3 = 7$ και συγχωνεύει όλα τα στοιχεία μικρότερα του 12, δημιουργώντας την {7,8,9,10,11}.

Ο επεξεργαστής P_3 αρχίζει από τα στοιχεία $a_6 = 12$ και $b_7 = 14$ και δημιουργεί την {12,13,14,15,16,17}.

Τέλος, ο P_4 αρχίζει από τα $a_{10} = 20$ και $b_9 = 18$ και δημιουργεί την $\{18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$. Η τελική ακολουθία C είναι συνεπώς η

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$$

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

Ο αλγόριθμος συγχωνεύει δύο ακολουθίες

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$$

σε μία ακολουθία

$$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_{r+s}\}$$

χρησιμοποιώντας N επεξεργαστές

$$P_1, P_2, \cdots, P_N, \quad 1 \leq N \leq r+s$$

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

Εύρεση του μέσου δύο ταξινομημένων ακολουθιών

Δεδομένων δύο ταξινομημένων ακολουθιών $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ και $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ όπου $r, s \geq 1$ συμβολίζουμε με $A \cdot B$ την ακολουθία μήκους $m = r + s$ που προκύπτει από τη συγχώνευση των A και B.

Ζητείται να βρεθεί το μέσο, δηλαδή το $\lceil m/2 \rceil$ στοιχείο της $A \cdot B$ χωρίς να σχηματιστεί (βρεθεί) η $A \cdot B$.

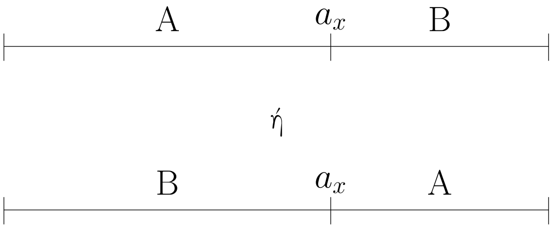
Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

Ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα ζεύγος (α_x, b_y) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. Ένα από τα α_x ή b_y είναι το μέσον της $A \cdot B$ δηλαδή το α_x ή το b_y είναι μεγαλύτερο από $\lceil m/2 \rceil - 1$ στοιχεία και μικρότερο από $\lfloor m/2 \rfloor$ στοιχεία.
2. Αν το α_x είναι το μέσο τότε το b_y είτε είναι
   (i) το μεγαλύτερο στοιχείο του B μικρότερο ή ίσο του α_x ή
   (ii) το μικρότερο στοιχείο του B μεγαλύτερο ή ίσο του α_x

   Διαφορετικά αν το b_y είναι το μέσον, τότε α_x είναι είτε:
   (i) το μεγαλύτερο στοιχείο της A και μικρότερο ή ίσο του b_y ή
   (ii) το μικρότερο στοιχείο της A μεγαλύτερο ή ίσο του b_y.
3. Αν περισσότερα του ενός ζεύγη ικανοποιούν τα 1 και 2, τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει το ζεύγος για το οποίο το $x + y$ είναι το μικρότερο.

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο



Σχήμα: Εύρεση μέσου

Το (α_x, b_y) λέγεται μεσαίο ζεύγος της $A \cdot B$ συνεπώς x και y είναι οι δείκτες του μεσαίου ζεύγους. Ας σημειωθεί ότι α_x είναι το μέσον της $A \cdot B$ αν

(i) $\alpha_x > b_y$ και $x + y - 1 = \lceil m/2 \rceil - 1$ ή

(ii) $\alpha_x < b_y$ και $m - (x + y - 1) = \lfloor m/2 \rfloor$

Διαφορετικά το b_y είναι το μέσον της $A \cdot B$.

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

Διαδικασία 4: TWO-SEQUENCE MEDIAN (A, B, x, y)

- **Βήμα 1**

(1.1) χαμηλό$_B \leftarrow 1$

(1.2) χαμηλό$_B \leftarrow 1$

(1.3) ψηλό$_A \leftarrow r$

(1.4) ψηλό$_B \leftarrow s$

(1.5) $n_A \leftarrow r$

(1.6) $n_B \leftarrow s$

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

- **Βήμα 2**

όσο $n_A > 1$ ***και*** $n_B > 1$ **κάνε**

(2.1) $u \leftarrow$ χαμηλό$_A + \lceil($ψηλό$_A -$ χαμηλό$_A - 1)/2\rceil$

(2.2) $v \leftarrow$ χαμηλό$_B + \lceil($ψηλό$_B -$ χαμηλό$_B - 1)/2\rceil$

(2.3) $w \leftarrow min(\lfloor n_A/2 \rfloor, \lfloor n_B/2 \rfloor)$

(2.4) $n_A \leftarrow n_A - w$

(2.5) $n_B \leftarrow n_B - w$

(2.6) **αν** $a_u \geq b_{\mathsf{v}}$ **τότε**

(i) ψηλό$_A \leftarrow$ ψηλό$_A - w$

(ii) χαμηλό$_B \leftarrow$ χαμηλό$_B + w$

αλλιώς

(i) χαμηλό$_A \leftarrow$ χαμηλό$_A + w$

(ii) ψηλό$_B \leftarrow$ ψηλό$_B - w$

τέλος

τέλος

- **Βήμα 3** Επίστρεψε σαν x και y τους δείκτες του ζεύγους από $\{a_{u-1}, a_u, a_{u+1}\} \times \{b_{\mathsf{v}-1}, b_{\mathsf{v}}, b_{\mathsf{v}+1}\}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες 1-3 ενός μεσαίου ζεύγους.

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

Η TWO-SEQUENCE MEDIAN επιστρέφει τους δείκτες του ζεύγους μέσων (α, b_y) και όχι το ίδιο το ζεύγος.

Παράδειγμα

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 19, 20, 21, 22\}$$

$$low_A = low_B = 1 \quad high_A = n_A = 9 \quad high_B = n_B = 10$$

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

Βήμα 2

1η επανάληψη

$$u = v = 5, \quad w = min(4,5) = 4, \quad n_A = 5, \quad n_B = 6$$

Επειδή $\alpha_5 > b_5, \quad high_A = low_B = 5$

2η επανάληψη

$$u = 3, v = 7, w = min(2,3) = 2, n_A = 3, n_B = 4$$

Επειδή $\alpha_3 < b_7, \quad low_A = 3$ και $high_B = 8$

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

3η επανάληψη

$$u = 4, v = 6, w = min(1, 2) = 1 \quad n_A = 2, n_B = 3$$

Επειδή $\alpha_4 > b_6, \quad high_A = 4 \quad low_B = 6$

4η επανάληψη

$$u = 3, v = 7, w = min(1, 1) = 1 \quad n_A = 1, n_B = 2$$

Επειδή $\alpha_3 < b_7, \quad low_A = 4$ και $high_B = 7$

Ένας καλύτερος αλγόριθμος για το EREW μοντέλο

Βήμα 3

Έχουμε 9 ζεύγη $\{11, 12, 13\} \times \{8, 19, 20\}$
Αυτά που ικανοποιούν τις δύο πρώτες ιδιότητες είναι τα εξής δύο:

$$(\alpha_4, b_6) = (13, 8) \qquad \text{και} \qquad (\alpha_4, b_7) = (13, 19)$$

οπότε επιστρέφεται το $(4, 6)$.

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

Δεδομένων δύο ταξινομημένων ακολουθιών $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ και $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ υποθέτουμε την ύπαρξη N επεξεργαστών $P_1, P_2, \cdots, P_N$, όπου N είναι μια δύναμη του 2 και $1 \leq N \leq r + s$. Ο αλγόριθμος που θα αναπτυχθεί στη συνέχεια συγχωνεύει τις A και B σε μία ταξινομημένη ακολουθία $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_{r+s}\}$ σε δυο φάσεις ως εξής:

Φάση 1: Κάθε μια από τις δύο ακολουθίες A και B χωρίζονται σε N (πιθανές κενές) υποακολουθίες $A_1, A_2, \cdots, A_N$ και $B_1, B_2, \cdots, B_N$ τέτοιες ώστε

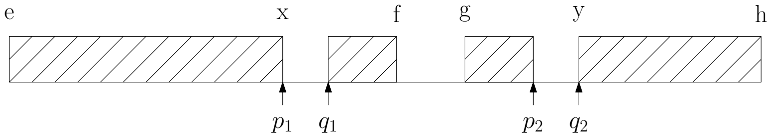
(i) $|A_i| + |B_i| = (r + s)/N$ για $1 \leq i \leq N$

(ii) όλα τα στοιχεία στην $A_i \cdot B_i$ είναι μικρότερα ή ίσα από όλα τα στοιχεία στην $A_{i+1} \cdot B_{i+1}$ για $1 \leq i \leq N$

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

(I) Περίπτωση όπου

- α_x είναι το μεσαίο στοιχείο
- $\alpha_x \leq b_y$



Σχήμα: $\alpha_x \leq b_y$

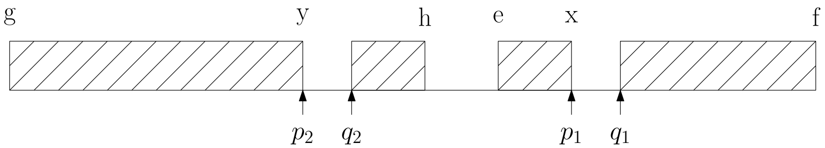
Παρατήρηση

- Οι υποακολουθίες με τα μικρότερα στοιχεία στέλνονται σε ένα επεξεργαστή P_{2i-1}, ενώ οι άλλες με τα μεγαλύτερα στοιχεία στέλνονται στον επεξεργαστή P_{2i}
- Το b_y συμπεριλαμβάνεται στην υπακολουθία με τα μεγαλύτερα στοιχεία

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

(II) Περίπτωση όπου

- α_x είναι το μεσαίο στοιχείο
- $b_y \leq \alpha_x$



Σχήμα: $b_y \leq \alpha_x$

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

Διαδικασία 5: EREW MERGE (A, B, C)

- **Βήμα 1**

(1.1) Ο επεξεργαστής P_1 λαμβάνει την τετράδα $(1, r, 1, s)$
(1.2) **για** $j = 1$ **έως** $logN$ **κάνε**
  για $i = 1$ **έως** 2^{j-1} **κάνε παράλληλα**
    Ο επεξεργαστής P_i έχοντας λάβει την τετράδα (e, f, g, h)
    (1.2.1) {Βρίσκει το μεσαίο ζεύγος των δύο ακολουθιών
    TWO-SEQUENCE MEDIAN $(A[e, f], B[g, h], x, y)$}
    (1.2.2) {Υπολογίζει τέσσερις δείκτες p_1, p_2, q_1 και q_2 ως εξής}
    αν α_x *είναι το μεσαίο* **τότε**
      (i) $p_1 \leftarrow x$
      (ii) $q_1 \leftarrow x + 1$
      (iii) **αν** $b_y \leq \alpha_x$ **τότε**
        (a) $p_2 \leftarrow y$
        (b) $q_2 \leftarrow y + 1$
      αλλιώς
        (a) $p_2 \leftarrow y - 1$
        (b) $q_2 \leftarrow y$
      τέλος
    αλλιώς

    τέλος
    (i) $p_2 \leftarrow y$
    (ii) $q_2 \leftarrow y + 1$
    (iii) **αν** $\alpha_x \leq b_y$ **τότε**
      (a) $p_1 \leftarrow x$
      (b) $q_1 \leftarrow x + 1$
    αλλιώς
      (a) $p_1 \leftarrow x - 1$
      (b) $q_1 \leftarrow x$
    τέλος
    (1.2.3) Μεταδίδει τις τετράδες (e, p_1, g, p_2) στον P_{2i-1}
    (1.2.4) Μεταδίδει τις τετράδες (q_1, f, q_2, h) στον P_{2i}
  τέλος
τέλος

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

- **Βήμα 2**

για $i = 1$ **έως** N **κάνε παράλληλα**

Ο επεξεργαστής P_i έχοντας λάβει την τετράδα (a, b, c, d)

(2.1) $w \leftarrow 1 + (i-1)\lceil (r+s)/N \rceil$

(2.2) $z \leftarrow min\{i\lceil (r+s)/N \rceil, (r+s)\}$

(2.3) SEQUENTIAL MERGE $(A[a, b], B[c, d], C[w, z])$

τέλος

- Όλα τα ζεύγη A_i και $B_i, 1 \leq i \leq N$ συγχωνεύονται ταυτόχρονα και τοποθετούνται στην C.

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

Παράδειγμα

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\},$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 19, 20, 21, 22\}, N = 4$$

$$r = 9, s = 10$$

Βήμα 1.1: Ο P_1 λαμβάνει (1,9,1,10).

Βήμα 1.2: Ο P_1 προσδιορίζει το μεσαίο ζεύγος των A και B που είναι το $(4, 6)$. Διατηρεί το $(1, 4, 1, 6)$ και μεταδίδει το $(5, 9, 7, 10)$ στον P_2. Στη δεύτερη επανάληψη, ο P_1 υπολογίζει τους δείκτες του μεσαίου ζεύγους των $A[1, 4] = \{10, 11, 12, 13\}$ και $B[1, 6] = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ που είναι το (1,5). Ταυτόχρονα ο P_2 κάνει το ίδιο με τις $A[5, 9] = \{14, 15, 16, 17, 18\}$ και $B[7, 10] = \{19, 20, 21, 22\}$ και λαμβάνει το ζεύγος $(9, 7)$. Ο P_1 κρατά το $(1, 0, 1, 5)$ και μεταδίδει το $(1, 4, 6, 6)$ στον P_2. ΄Ομοια ο P_2 μεταδίδει το $(5, 9, 7, 6)$ στον P_3 και το $(10, 9, 7, 10)$ στον P_4.

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

Βήμα 2: Οι P_1, P_2, P_3 και P_4 δημιουργούν ταυτόχρονα την $C[1, 19]$ ως εξής:

- Η τελευταία τετράδα που έλαβε ο P_1 είναι η $(1, 0, 1, 5)$ και ο P_1 υπολογίζει $w = 1, z = 5$ και αντιγράφει την $B[1, 5] = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ στην $C[1, 5]$.
- Όμοια ο P_2, έχοντας λάβει τελευταία την $(1, 4, 6, 6)$, υπολογίζει $w = 6$ και $z = 10$ και συγχωνεύει τις $A[1, 4]$ και $B[6, 6]$ για το σχηματισμό της $C[6, 10] = \{8, 10, 11, 12, 13\}$.
- Ο P_3 έχοντας λάβει την τελευταία $(5, 9, 7, 6)$ υπολογίζει $w = 11$ και $z = 15$ και αντιγράφει την $A[5, 9] = \{14, 15, 16, 17, 18\}$ στην $C[11, 15]$. Τέλος ο P_4 έχοντας λάβει στο τέλος την $(10, 9, 7, 10)$ υπολογίζει $w = 16, z = 19$ και αντιγράφει την $B[7, 10] = \{19, 20, 21, 22\}$ στην $C[16, 19]$.

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

Ανάλυση

Βήμα 1.1: Ο P_1 διαβάζει από τη μνήμη σε σταθερό χρόνο.

Βήμα 1.2: Κατά τη διάρκεια της $j-$ ιοστής επανάληψης κάθε επεξεργαστής υπολογίζει το μεσαίο ζεύγος από $(r+s)/2^{j-1}$ στοιχεία, μέσω της TWO-SEQUENCE MEDIAN, σε $O(log[(r+s)/2^{j-1}])$ χρόνο, ή $O(log(r+s))$. Τα άλλα δύο βήματα στο βήμα 1.2 απαιτούν σταθερό χρόνο.

Επειδή εκτελούνται $logN$ επαναλήψεις του βήματος 1.2 το Βήμα 1 απαιτεί $O(logN \cdot log(r+s))$ χρόνο.

Στο βήμα 2 κάθε επεξεργαστής συγχωνεύει το πολύ $(r+s)/N$ στοιχεία. Η εργασία αυτή γίνεται με την SEQUENTIAL MERGE και απαιτεί $O((r+s)/N)$ χρόνο.

Συγχώνευση στο μοντέλο EREW

Συνολικά

$$O((r+s)/N) + logN \cdot log(r+s)$$

Στη χειρότερη περίπτωση $r = s = n$ και

$$t(2n) = O(n/N + log^2 n)$$

με κόστος

$$c(2n) = O(n + Nlog^2 n)$$

Επειδή $\Omega(n)$ είναι το κάτω φράγμα του αριθμού των πράξεων για συγχώνευση το ανωτέρω κόστος είναι βέλτιστο όταν $N \leq n/log^2 n$.