Αριθμητική Ανάλυση

Διδάσκων: *Καθηγητής* Ν. Μισυρλής

ΕΚΠΑ

8 Νοεμβρίου 2018

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss (GE)

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{c} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array} \qquad (1)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί και

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\mathbf{11}}^{(\mathbf{1})} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ή απλά

$$A^{(1)}x = b^{(1)}, \quad \text{με} \quad \det A^{(1)} \neq 0 \ \text{ και } \ b^{(1)} \neq \mathbf{0}. \qquad (3)$$

1ο βήμα

- **Απαλοιφή του αγνώστου** x_1 από τις γραμμές $i = 2, 3, \cdots, n$, πολλαπλασιάζοντας την **οδηγό** γραμμή 1 με τους πολλαπλασιαστές

$$\mathbf{m_{i1}} = -\frac{\mathbf{a_{i1}^{(1)}}}{\mathbf{a_{11}^{(1)}}}, \quad i = 2, 3, \cdots, n$$

  και προσθέτοντας στις γραμμές $i = 2, 3, \cdots, n$, αντίστοιχα.

- **Ενημέρωση**(τροποποίηση) των στοιχείων

$$\mathbf{a_{ij}^{(2)}} = \mathbf{a_{ij}^{(1)}} + \mathbf{m_{i1} a_{1j}^{(1)}}, \quad \mathbf{i = 2, 3, \cdots, n}, \quad \mathbf{j = 2, 3, \cdots, n}$$

  και

$$\mathbf{b_{i}^{(2)}} = \mathbf{b_{i}^{(1)}} + \mathbf{m_{i1} b_{1}^{(1)}}, \quad \mathbf{i = 2, 3, \cdots, n}$$

Έτσι προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \vdots \\
a_{n2}^{(2)}x_2 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}
\end{array} \tag{4}$$

1ο βήμα

Το σύστημα μπορεί να γραφτεί

$$\left[\begin{array}{c|cccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \hline & \boldsymbol{a_{22}^{(2)}} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \mathbf{0} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1^{(1)} \\ \hline b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

ή απλά

$$A^{(2)}x = b^{(2)}.$$

2ο βήμα

- **Απαλοιφή του αγνώστου** x_2 από τις γραμμές $i = 3, 4, \cdots, n$, πολλαπλασιάζοντας την **οδηγό** γραμμή 2 με τους πολλαπλασιαστές

$$\mathbf{m_{i2}} = -\frac{\mathbf{a_{i2}^{(2)}}}{\mathbf{a_{22}^{(2)}}}, \quad i = 3, 4, \cdots, n$$

  και προσθέτοντας στις γραμμές $i = 3, 4, \cdots, n$, αντίστοιχα.

- **Ενημέρωση**(τροποποίηση) των στοιχείων

$$\mathbf{a_{ij}^{(3)}} = \mathbf{a_{ij}^{(2)}} + \mathbf{m_{i2} a_{2j}^{(2)}}, \quad \mathbf{i = 3, 4, \cdots, n}, \quad \mathbf{j = 3, 4, \cdots, n}$$

  και

$$\mathbf{b_i^{(3)}} = \mathbf{b_i^{(2)}} + \mathbf{m_{i2} b_2^{(2)}}, \quad \mathbf{i = 3, 4, \cdots, n}$$

Έτσι προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{array}{rrrrl}
a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + & a_{13}^{(1)} x_3 & + \ldots + & a_{1n}^{(1)} x_n & = b_1^{(1)} \\
\mathbf{a_{22}^{(2)}} x_2 + & a_{23}^{(2)} x_3 & + \ldots + & a_{2n}^{(2)} x_n & = b_2^{(2)} \\
 & a_{33}^{(3)} x_3 & + \ldots + & a_{3n}^{(3)} x_n & = b_3^{(3)} \\
 & \vdots & \ldots & & \vdots \\
 & a_{n3}^{(3)} x_3 & + \ldots + & a_{nn}^{(3)} x_n & = b_n^{(3)}
\end{array}$$

2ο βήμα

Το σύστημα μπορεί να γραφτεί

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\
\hline
 & & \mathbf{a_{33}^{(3)}} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\
 & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\
 & & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ \vdots \\ x_n
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \hline b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)}
\end{array}\right]$$

ή

$$A^{(3)}x = b^{(3)}.$$

Μετά από $r-1$ βήματα

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
+ & a_{12}^{(1)}x_2 & + & \dots & + & a_{1,r-1}^{(1)}x_{r-1} & + & a_{1,r}^{(1)}x_r & + & \dots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)}x_2 & + & \dots & + & a_{2,r-1}^{(2)}x_{r-1} & + & a_{2,r}^{(2)}x_r & + & \dots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
 & & & & & a_{r-1,r-1}^{(r-1)}x_{r-1} & + & a_{r-1,r}^{(r-1)}x_r & + & \dots & + & a_{r-1,n}^{(r-1)}x_n & = & b_{r-1}^{(r-1)} \\
 & & & & & & & a_{r,r}^{(r)}x_r & + & \dots & + & a_{rn}^{(r)}x_n & = & b_r^{(r)} \\
 & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
 & & & & & & & a_{n,r}^{(r)}x_r & + & \dots & + & a_{nn}^{(r)}x_n & = & b_n^{(r)}
\end{array}
$$

$r-1$ βήμα

Το σύστημα μπορεί να γραφτεί

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1,r-1}^{(1)} & a_{1r}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2,r-1}^{(2)} & a_{2r}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\
\mathbf{0} & & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 & & & a_{r-1,r-1}^{(r-1)} & a_{r-1,r}^{(r-1)} & \dots & a_{r-1,n}^{(r-1)} \\
\hline
 & & & & {\color{blue}\mathbf{a_{rr}^{(r)}}} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\
 & & \mathbf{0} & & \vdots & \dots & \vdots \\
 & & & & {\color{blue}a_{nr}^{(r)}} & \dots & a_{nn}^{(r)}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ \hline x_r \\ \vdots \\ x_n
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{r-1}^{(r-1)} \\ \hline b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)}
\end{array}\right]$$

ή

$$A^{(r)}x = b^{(r)}.$$

Τελικά, μετά από $n-1$ βήματα

το αρχικό σύστημα μετατρέπεται στο ακόλουθο άνω τριγωνικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcr} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1,r-1}^{(1)}x_{r-1} + a_{1,r}^{(1)}x_r + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 \ldots + a_{2,r-1}^{(2)}x_{r-1} + a_{2,r}^{(2)}x_r + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \vdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n & = & b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)} \end{array} \tag{5}$$

ή

$$A^{(n)}x = b^{(n)}, \tag{6}$$

όπου $A^{(n)}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Το σύστημα μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα με την **προς τα πίσω αντικατάσταση** από τον τύπο

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

και

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}x_j}{a_{ii}^{(i)}}, \quad i = n-1(-1)1. \tag{7}$$

Επίλυση των ℓ γραμμικών συστημάτων

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_\mathbf{k} = \mathbf{b}_\mathbf{k}, \qquad\qquad \mathbf{k} = 1(1)\ell$$

όπου $\mathbf{x}_\mathbf{k} = [\mathbf{x}_{1\mathbf{k}}, \mathbf{x}_{2\mathbf{k}}, \ldots, \mathbf{x}_{\mathbf{nk}}]^T$ και $\mathbf{b}_\mathbf{k} = [\mathbf{b}_{1\mathbf{k}}, \mathbf{b}_{2\mathbf{k}}, \ldots, \mathbf{b}_{\mathbf{nk}}]^T$

το οποίο γράφεται συμβολικά:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

όπου $\mathbf{X}, \mathbf{B}$ $\mathbf{n} \times \ell$ πίνακες (συνήθως $\ell \leq \mathbf{n}$).

Αν υποθέσουμε $\mathbf{det}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss στον επαυξημένο πίνακα $[\mathbf{A} : \mathbf{B}]$.

Ειδική περίπτωση $\quad \mathbf{B} = \mathbf{I}$

Υπολογισμός του αντιστρόφου $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{I}$$

ή

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_\mathbf{k} = \mathbf{e}_\mathbf{k}, \;\; \mathbf{k} = 1, 2, \ldots, \mathbf{n}$$

Υπολογισμός της ορίζουσας **det**(**A**)

Η τιμή της ορίζουσας ενός πίνακα είναι το γινόμενο των οδηγών στοιχείων στη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss.

Δηλαδή :

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_{11}^{(1)}\,\mathbf{a}_{22}^{(2)}\,\mathbf{a}_{33}^{(3)}\cdots\mathbf{a}_{nn}^{(n)}$$

Αλγόριθμος της μεθόδου Gauss για τη επίλυση του $Ax = b$

1. Διάβασε τα δεδομένα $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, $b = (b_i), 1 \leq i \leq n$
2. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί $a_{i,n+1} = b_i$
3. Για $r = 1, 2, \ldots, n-1$ εκτελούνται τα βήματα 3.1-3.3
   - 3.1 Έστω p ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $a_{p,r} \neq 0$, $p = r, r+1, \ldots, n$. Αν δεν υπάρχει ο p τότε τύπωσε ``δεν υπάρχει μοναδική λύση''. Πήγαινε στο τέλος.
   - 3.2 Αν $p \neq r$ τότε (εναλλάσονται οι p και r γραμμές)

     Για $q = r, r+1, \ldots, n+1$ εκτελούνται οι αντικαταστάσεις

     $$\begin{aligned} s &= a_{rq} \\ a_{rq} &= a_{pq} \\ a_{pq} &= s \end{aligned}$$

   - 3.3 Για $i = r+1, r+2, \ldots, n$ εκτελούνται τα βήματα 3.3.1-3.3.2
     - 3.3.1 Να τεθεί

       $$m_{ir} = -\frac{a_{ir}}{a_{rr}}$$

     - 3.3.2 Για $j = r+1, r+2, \ldots, n+1$ να τεθεί

       $$a_{ij} = a_{ij} + m_{ir} a_{rj}$$

- Αν $a_{nn} = 0$ τότε τύπωσε ``δεν υπάρχει μοναδική λύση''. Πήγαινε στο τέλος.
- Να τεθεί (πίσω αντικατάσταση)

$$x_n = a_{n,n+1} / a_{nn}$$

- Για $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ να τεθεί

$$x_i = \frac{\left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right]}{a_{ii}}$$

- Εκτύπωση της λύσης $x_i,\ 1 \leq i \leq n$. Τέλος.

Τροποποίηση της μεθόδου Απαλοιφής του Gauss

- Είναι φανερό ότι αν κάποιο οδηγό στοιχείο είναι μηδέν τότε η μέθοδος GE σταματά.
- Για να αποφύγουμε μια τέτοια περίπτωση πρέπει ο προηγούμενος αλγόριθμος να αναζητά τους συντελεστές της **r** στήλης κάτω από την κύρια διαγώνιο μέχρις ότου βρεθεί ένας ο οποίος είναι διάφορος του μηδενός, έστω ο
$$\mathbf{a}_{\mathbf{ir}}^{(\mathbf{r})}.$$
- Στην συνέχεια εναλλάσει τις **i** και **r** γραμμές και χρησιμοποιεί τη νέα εξίσωση σάν οδηγό.
- Η διαδικασία αυτή δεν αλλάζει το μαθηματικό πρόβλημα καθ΄οσον η τυπική λύση του συστήματος είναι ανεξάρτητη από την διάταξη των εξισώσεων στο σύστημα.

Θεώρημα 3.1.3.

Αν ο $\mathbf{A}^{(1)}$ είναι αντιστρέψιμος(δηλ. μη ιδιάζων), τότε υπάρχει ένας μη μηδενικός συντελεστής $\mathbf{a}_{\mathbf{ir}}^{(\mathbf{r})}$.

Θεώρημα 3.1.4.

Το σύστημα $\mathbf{A}^{(1)}\ \mathbf{x} = \beta^{(1)}$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}\ \mathbf{x} = \beta^{(\mathbf{n})}$.

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} -\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

Να υπολογιστεί η λύση του ανωτέρω συστήματος με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss

(i) χωρίς οδήγηση και

(ii) με μερική οδήγηση.

Λύση

(i) Gauss χωρίς οδήγηση

Κατασκευάζουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|b]$, ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right].$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση παρουσιάζοντας τους πολλαπλασιαστές από τα αριστερά για κάθε γραμμή. Έτσι έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους υπολογισμούς

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
-3
\end{array}
\left[\begin{array}{rrr|r}
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 3 & -2 & 1 \\
0 & 9 & -4 & 5
\end{array}\right] \text{ 1ο βήμα}
$$

$$
\left[\begin{array}{rrr|r}
-1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 3 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 2
\end{array}\right] \text{ 2ο βήμα}
$$

Λύση του τριγωνικού συστήματος

$$\begin{array}{rrrrrrrr} - & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ & & & & & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

΄Αρα

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 1 \quad \text{και} \quad x_1 = 1.$$

Λύση

(ii) Gauss με μερική οδήγηση

Εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο ανταλλάσοντας, όπου απαιτείται, τις γραμμές του επαυξημένου πίνακα. Έτσι έχουμε

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right]\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Οι αριθμοί των παρενθέσεων δηλώνουν τη διάταξη των γραμμών

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right]\begin{array}{c}(2)\\(1)\\(3)\end{array}$$

Ανταλλαγή των δύο πρώτων γραμμών

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (1) \\ (3) \end{array}$$

1ο βήμα

$$\begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{5} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (3) \\ (1) \end{array}$$

Ανταλλαγή των
δύο τελευταίων γραμμών

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (3) \\ (1) \end{array}$$

2ο βήμα

Επίλυση του τριγωνικού συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ & & \frac{15}{2}x_2 & - & 3x_3 & = & \frac{9}{2} \\ & & & - & \frac{2}{5}x_3 & = - & \frac{2}{5} \end{array}$$

Η λύση είναι η

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 1 \quad \text{και} \quad x_1 = 1.$$

- Στο προηγούμενο παράδειγμα η αναγκαία ανταλλαγή γραμμών εφαρμόστηκε άμεσα έτσι ώστε να μην ξεφύγει η προσοχή μας από την στρατηγική της μερικής οδήγησης.
- Στην πράξη, είναι πιο αποτελεσματικό να κάνουμε τις ανταλλαγές των γραμμών με ένα έμμεσο τρόπο.
- Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση ενός διανύσματος διάστασης n, τέτοιου ώστε το i-οστό στοιχείο του να δηλώνει τη γραμμή του πίνακα που περιέχει τους συντελεστές της i-οστής εξίσωσης.
- Ας συμβολίσουμε με h το διάνυσμα αυτό με αρχικές τιμές την αρίθμηση των γραμμών, δηλαδή

  $$h = [1,\ 2,\ 3, \ldots, n]^T.$$

  Έτσι, κάθε φορά που απαιτείται ανταλλαγή δύο γραμμών, αρκεί μόνο η αντιμετάθεση των αντίστοιχων στοιχείων του διανύσματος.
- Κάθε αναφορά σε μια γραμμή του πίνακα συντελεστών ή σε ένα στοιχείο του διανύσματος του δεξιού μέλους πρέπει να γίνει μέσω του διανύσματος h.

Οι αρχικές τιμές του h είναι

$$h = [1,\ \ 2,\ \ 3]^T.$$

Για τον προσδιορισμό του οδηγού στοιχείου εξετάζονται οι τιμές

$$|a_{h_1,1}| = |-1| = 1,\ \ |a_{h_2,1}| = 2,\ \ |a_{h_3,1}| = 1.$$

Η μεγαλύτερη τιμή αντιστοιχεί στη γραμμή 2 και ανταλλάσσονται το πρώτο και το δεύτερο στοιχείο του h, οπότε

$$h = [2,\ \ 1,\ \ 3]^T.$$

Μετά το βήμα της απαλοιφής ο πίνακας γίνεται (βλ. προηγούμενο παράδειγμα (ii))

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dfrac{3}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{15}{2} & -3 & \dfrac{9}{2} \end{array}\right].$$

Για τον προσδιορισμό του οδηγού στοιχείου ελέγχονται οι τιμές

$$|a_{h_2,2}| = 3/2,\ \ |a_{h_3,2}| = 15/2.$$

Η μεγαλύτερη αντιστοιχεί στη γραμμή 3, συνεπώς ανταλλάσσονται το δεύτερο και το τρίτο στοιχείο του h, οπότε $h = [2,\ \ 3,\ \ 1]^T$.

Μετά το βήμα της απαλοιφής, ο πίνακας γίνεται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Τέλος, η προς τα πίσω αντικατάσταση δίνει

$$x_3 = \frac{b_{h_3}}{a_{h_3,3}} = \frac{b_1}{a_{13}} = \frac{-2/5}{-2/5} = 1$$

$$x_2 = \frac{b_{h_2} - a_{h_2,3}x_3}{a_{h_2,2}} = \frac{b_3 - a_{33}x_3}{a_{32}} = \frac{9/2 - (-3)\cdot 1}{15/2} = 1$$

$$x_1 = \frac{b_{h_1} - a_{h_1,2}x_2 - a_{h_1,3}x_3}{a_{h_1,1}} = \frac{b_2 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3}{a_{21}} = \frac{1 - (-1)\cdot 1 - 0\cdot 1}{2} = 1.$$

Ο αλγόριθμος απαλοιφής του Gauss *με μερική οδήγηση*

1. Διάβασε τα δεδομένα n, $A = \left(a_{ij}\right)$, $1 \leq i, j \leq n$ και $b = \left(b_i\right)$, $1 \leq i \leq n$.
2. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί $a_{i,n+1} = b_i$.
3. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί
$$h(i) = i$$

4. Για $r = 1, 2, \ldots, n-1$ να εκτελεστούν τα βήματα 4.1-4.4 (διαδικασία απαλοιφής).
    4.1. Έστω p ο μικρότερος ακέραιος με

$$r \leq p \leq n$$

    και

$$|a(h(p), r)| = \max_{r \leq j \leq n} |a(h(j), r)|$$

    4.2. Αν $a(h(p), r) = 0$ τότε τύπωσε ``δεν υπάρχει μοναδική λύση''. Τέλος.
    4.3. Αν $h(r) \neq h(p)$ τότε (ανταλλαγή των τιμών των $h(p)$ και $h(r)$)

$$\begin{aligned} q &= h(r) \\ h(r) &= h(p) \\ h(p) &= q \end{aligned}$$

    (προσομοίωση της φυσικής ανταλλαγής των γραμμών).

4.4. Για $i = r+1, r+2, \ldots, n$ να εκτελεστούν τα βήματα 4.4.1 και 4.4.2

  4.4.1. Να τεθεί

$$m(h(i), r) = -\frac{a(h(i), r)}{a(h(r), r)}$$

  4.4.2. Για $j = r+1, r+2, \ldots, n+1$ να εκτελεσθεί

$$a(h(i), j) = a(h(i), j) + m(h(i), r)a(h(r), j)$$

  Αν $a(h(n), n) = 0$ τότε τύπωσε ``δεν υπάρχει μοναδική λύση''. Πήγαινε στο τέλος.

Επίλυση τριγωνικού συστήματος(με προς τα πίσω αντικατάσταση)

5 Να τεθεί

$$x_n = a(h(n), n+1)/a(h(n), n)$$

6 Για $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ να υπολογιστούν οι

$$x_i = \frac{a(h(i), n+1) - \sum_{j=i+1}^{n} a(h(i), j)x_j}{a(h(i), i)}$$

7 Εκτύπωση της λύσης x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Τέλος.

Παρατήρηση

Ενώ για αρκετά γραμμικά συστήματα η μερική οδήγηση παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η τεχνική αυτή δεν είναι αρκετή.

Παράδειγμα

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcl} 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & 591700 \\ 5.291 & - & 6.130x_2 & = & 46.78. \end{array}$$

Αν εφαρμοστεί ο προηγούμενος αλγόριθμος με αριθμητική τεσσάρων ψηφίων θα έχουμε

$$m_{21} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764$$

που οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrr} 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & & 591700 \\ & - & 104300x_2 & = & - & 104400 \end{array}$$

το οποίο έχει τις λύσεις $x_2 = 1.001$ και $x_1 = -10.00$.
Ωστόσο οι ακριβείς λύσεις του αρχικού συστήματος είναι οι $x_1 = 10.00$ και $x_2 = 1.000$.

- Μία διαδικασία μερικής οδήγησης, η οποία θα μπορούσε να αντεπεξέλθει τη δυσκολία αυτή για τις οποίες η προηγούμενη μέθοδος παρουσιάζει πρόβλημα είναι η λεγόμενη **βαθμωτή (scaled) μερική οδήγηση**.
- Στην τεχνική αυτή διαιρούνται οι γραμμές, από την οδηγό μέχρι την τελευταία, με τον εκάστοτε μεγαλύτερο κατά απόλυτο τιμή συντελεστή της κάθε γραμμής.
- Στη συνέχεια εφαρμόζεται η μερική οδήγηση. Για το παράδειγμα αυτό έχουμε

  $$\frac{30.00}{591400} = 0.00005073 \quad \text{και} \quad \frac{5.291}{6.130} = 0.8631$$

  οπότε εναλλάσονται οι δύο γραμμές και το αποτέλεσμα της απαλοιφής δίνει τις ακριβείς λύσεις.

Βαθμωτή (scaled) μερική οδήγηση

Οι δε αλλαγές που διαφέρουν από την προηγούμενη μέθοδο είναι στα βήματα 3-4.1, τα οποία θα πρέπει να αντικατασταθούν με τα:

3. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να εκτελεσθούν τα βήματα 3.1-3.3
    - 3.1. $s_i = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$
    - 3.2. Αν $s_i = 0$ τότε τύπωσε ``δεν υπάρχει μοναδική λύση''
    - 3.3. $h[i] = i$
4. Για $r = 1, 2, \ldots, n - 1$ να εκτελεστούν τα βήματα 4.1-4.4
    - 4.1. Έστω p ο μικρότερος ακέραιος με $r \leq p \leq n$ και

$$\frac{|a(h(p), r)|}{s(h(p))} = \max_{r \leq j \leq n} \frac{|a(h(j), r)|}{s(h(j))}.$$

Η ανωτέρω τεχνική μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με το διαγώνιο πίνακα D^{-1} του οποίου το i-οστό διαγώνιο στοιχείο είναι το $(s_i)^{-1}$.

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της μεθόδου απαλοιφής του Gauss

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο k βήμα της απαλοιφής του Gauss για τη λύση ℓ συστημάτων δηλαδή:

$$
\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ n-k\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right. \\ \\ \end{matrix}
\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \cdots & \hat{a}_{2k} & \hat{a}_{2,k+1} & \cdots & \hat{a}_{2n} \\
 & & \hat{a}_{33} & \cdots & \hat{a}_{3k} & \hat{a}_{3,k+1} & \cdots & \hat{a}_{3n} \\
 & 0 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \hat{a}_{kk} & \hat{a}_{k,k+1} & \cdots & \hat{a}_{kn} \\
\hline
 & & & & \hat{a}_{k+1,k} & \hat{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \hat{a}_{k+1,n} \\
 & 0 & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \hat{a}_{nk} & \hat{a}_{n,k+1} & \cdots & \hat{a}_{nn} \\
 & & & & & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{\hat{a}_{k+1,k+1}\quad\cdots\quad\hat{a}_{k+1,n}}}_{n-k}}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix}
x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(\ell)} \\
x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(\ell)} \\
x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & \cdots & x_3^{(\ell)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_k^{(1)} & x_k^{(2)} & \cdots & x_k^{(\ell)} \\
x_{k+1}^{(1)} & x_{k+1}^{(2)} & \cdots & x_{k+1}^{(\ell)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(\ell)}
\end{bmatrix}
=
$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της GE

$$= \left[\begin{array}{cccc} b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \cdots & b_1^{(\ell)} \\ \hat{b}_2^{(1)} & \hat{b}_2^{(2)} & \cdots & \hat{b}_2^{(\ell)} \\ \hat{b}_3^{(1)} & \hat{b}_3^{(2)} & \cdots & \hat{b}_3^{(\ell)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_k^{(1)} & \hat{b}_k^{(2)} & \cdots & \hat{b}_k^{(\ell)} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_n^{(1)} & \hat{b}_n^{(2)} & \cdots & \hat{b}_n^{(\ell)} \end{array}\right] \tag{8}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της GE

$$
- k \quad
\left[
\begin{array}{ccccc|ccccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} & : & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} & \cdots & a_{1,n+\ell} \\
 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \cdots & \hat{a}_{2k} & \hat{a}_{2,k+1} & \cdots & \hat{a}_{2n} & : & \hat{a}_{2,n+1} & \hat{a}_{2,n+2} & \cdots & \hat{a}_{2,n+\ell} \\
 & & \hat{a}_{33} & \cdots & \hat{a}_{3k} & \hat{a}_{3,k+1} & \cdots & \hat{a}_{3n} & : & \hat{a}_{3,n+1} & \hat{a}_{3,n+2} & \cdots & \hat{a}_{3,n+\ell} \\
 & 0 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \hat{a}_{kk} & \hat{a}_{k,k+1} & \cdots & \hat{a}_{kn} & : & \hat{a}_{k,n+1} & \hat{a}_{k,n+2} & \cdots & \hat{a}_{k,n+\ell} \\
\hline
 & & & & \hat{a}_{k+1,k} & \hat{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \hat{a}_{k+1,n} & : & \hat{a}_{k+1,n+1} & \hat{a}_{k+1,n+2} & \cdots & \hat{a}_{k+1,n+\ell} \\
 & 0 & & & \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & \hat{a}_{nk} & \hat{a}_{n,k+1} & \cdots & \hat{a}_{nn} & : & \hat{a}_{n,n+1} & \hat{a}_{n,n+2} & \cdots & \hat{a}_{n,n+\ell}
\end{array}
\right]
=
$$

$$
\underbrace{\hphantom{\hat{a}_{1,k+1} \cdots \hat{a}_{1n} : \hat{a}_{1,n+1}}}_{n-k}
\qquad
\underbrace{\hphantom{\hat{a}_{1,n+2} \cdots \hat{a}_{1,n+\ell}}}_{\ell}
$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της GE

Επειδή τώρα $k = 1(1)n-1$ το πλήθος και το είδος των πράξεων για την τριγωνοποίηση του συστήματος θα είναι

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+\ell) \qquad \text{πολλαπλασιασμοί} \tag{9}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+\ell) \qquad \text{προσθαφαιρέσεις.}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της GE

Χρησιμοποιώντας τους τύπους

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{n(n-1)}{2} && \text{διαιρέσεις} \\ &\frac{n(n-1)(2n-1+3\ell)}{6} && \text{πολλαπλασιασμοί} \end{aligned} \tag{10}$$

και

$$\frac{n(n-1)(2n-1+3\ell)}{6} \qquad \text{προσθαφαιρέσεις.}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της GE

Συνεπώς για τον υπολογισμό όλων των $x_k^{(i)}$ απαιτούνται

$$\ell \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\ell \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \qquad \text{πολλαπλασιασμοί}$$

και

$$\ell \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \qquad \text{προσθαφαιρέσεις}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} & n\ell && \text{διαιρέσεις} \\ & \frac{n(n-1)\ell}{2} && \text{πολλαπλασιασμοί} \end{aligned} \tag{11}$$

και

$$\frac{n(n-1)\ell}{2} \qquad \text{προσθαφαιρέσεις.}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της GE

Συνεπώς το συνολικό πλήθος των πράξεων για την εύρεση της λύσης

$$\begin{aligned} &\frac{n(n-1+2\ell)}{2} && \text{διαιρέσεις} \\ &\frac{n(n-1)(2n-1+6\ell)}{6} && \text{πολλαπλασιασμοί} \qquad (12) \end{aligned}$$

και

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6\ell)}{6} \qquad \text{προσθαφαιρέσεις.}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της GE

Έτσι λοιπόν για την επίλυση ενός μόνον γραμμικού συστήματος ($\ell = 1$) η μέθοδος απαλοιφής του Gauss απαιτεί

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} &\qquad \text{διαιρέσεις} \\ \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} &\qquad \text{πολλαπλασιασμοί} \\ \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} &\qquad \text{προσθαφαιρέσεις.} \end{aligned} \tag{13}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα

Για την εύρεση του αντιστρόφου A^{-1} με τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss ($\ell = n$) απαιτούνται

$$\begin{aligned} &\frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2} && \text{διαιρέσεις} \\ \frac{4n^3}{3} - &\frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6} && \text{πολλαπλασιασμοί} \end{aligned} \tag{14}$$

και

$$\frac{4n^3}{3} - \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6} \qquad \text{προσθαφαιρέσεις.}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πλήθος των πράξεων για τη λύση ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss είναι της τάξης $O\left(n^3/3\right)$ *ενώ για την εύρεση του αντιστρόφου απαιτείται τετραπλάσιο πλήθος πράξεων. Έτσι πάντοτε αποφεύγουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα (είναι προτιμότερο να λύσουμε το σύστημα) εκτός αν μας ζητείται μόνον ο* A^{-1}.

Η μέθοδος απαλοιφής του Jordan (J)

Με την χρησιμοποίηση της μεθόδου της απαλοιφής του Jordan είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων σε ένα διαγώνιο πίνακα.

Το πρώτο βήμα της απαλοιφής του Jordan είναι ακριβώς ίδιο με εκείνο της μεθόδου απαλοιφής του Gauss

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & a_{13}^{(1)}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & a_{32}^{(2)}x_2 & + & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & & \vdots & & & & & & & & \\
 & & a_{n2}^{(2)}x_2 & + & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}
\end{array} \tag{15}$$

Η μέθοδος απαλοιφής του Jordan

Στο δεύτερο βήμα της μεθόδου της απαλοιφής του Jordan απαλείφεται ο x_2 όχι μόνο από τις $n-2$ τελευταίες εξισώσεις, αλλά συγχρόνως και από την πρώτη.

$$\begin{array}{cccccccccc} a_{11}^{(1)}x_1 & & & & a_{13}^{(3)}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}^{(3)}x_n & = & b_1^{(3)} \\ & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(3)}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(3)}x_n & = & b_2^{(3)} \\ & & & & a_{33}^{(3)}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)} \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & a_{n3}^{(3)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(3)}x_n & = & b_n^{(3)} \end{array} \tag{16}$$

ή

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \tag{17}$$

Η μέθοδος απαλοιφής του Jordan

Αν υποθέσουμε ότι αλλάζουμε τους επάνω δείκτες των συντελεστών της δεύτερης γραμμής εκτός του πρώτου. Μετά από $r-1$ τέτοια βήματα θα έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{lllllll}
a_{11}^{(1)}x_1 & & & & +a_{1r}^{(r)}x_r+\ldots+a_{1n}^{(r)}x_n & = & b_1^{(r)} \\
& a_{22}^{(2)}x_2 & & & +a_{2r}^{(r)}x_r+\ldots+a_{2n}^{(r)}x_n & = & b_2^{(r)} \\
& & \ddots & & \vdots & & \\
& & & a_{r-1,r-1}^{(r-1)}x_{r-1} & +a_{r-1,r}^{(r)}x_r\ldots+a_{r-1,n}^{(r)}x_n & = & b_{r-1}^{(r)} \\
& & & & a_{rr}^{(r)}x_r+\ldots+a_{rn}^{(r)}x_n & = & b_r^{(r)} \\
& & & & \vdots & & \\
& & & & a_{nr}^{(r)}x_r+\ldots+a_{nn}^{(r)}x_n & = & b_n^{(r)}
\end{array} \tag{18}$$

ή

$$A^{(r)}x = b^{(r)}$$

όπου πάλι για λόγους ομοιομορφίας αλλάξαμε τους επάνω δείκτες των συντελεστών της $r-1$ γραμμής εκτός του πρώτου.

Η μέθοδος απαλοιφής του Jordan

Τέλος, μετά από n τέτοια βήματα θα έχουμε το διαγώνιο σύστημα:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(1)}x_1 & & & & = & b_1^{(n+1)} \\ & a_{22}^{(2)}x_2 & & & = & b_2^{(n+1)} \\ & & \ddots & & \vdots & \\ & & & a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n+1)} \end{array} \tag{19}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί σαν

$$A^{(n+1)}x = b^{(n+1)} \tag{20}$$

όπου ο $A^{(n)}$ τώρα είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Η λύση του συστήματος είναι η

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} b_i^{(n+1)}$$

εφόσον $a_{ii}^{(i)} \neq 0, i = 1(1)n$.

Η μέθοδος απαλοιφής του Jordan

Αναλυτικώτερα χρησιμοποιούμε πάλι τους συμβολισμούς

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} \quad i,j = 1(1)n \\ b_i^{(1)} &= b_i \quad\ \ i = 1(1)n \end{aligned}$$

και αν $a_{11}^{(1)} \neq 0$, τότε ορίζουμε τους πολλαπλασιαστές

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2(1)n.$$

Τώρα προκειμένου να απαλειφθεί ο x_1 από την i-οστή εξίσωση, προσθέτουμε m_{i1} φορές την πρώτη εξίσωση στην i-οστή, οπότε λαμβάνουμε

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad \begin{array}{l} i = 1(1)n, i \neq 1 \\ j = 2(1)n \end{array}$$

και

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + m_{i1} b_1^{(1)}, \qquad i = 1(1)n, i \neq 1.$$

Η μέθοδος απαλοιφής του Jordan

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι πριν ακολουθήσει το δεύτερο βήμα θα πρέπει για λόγους ομοιομορφίας να κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(2)} &= a_{1j}^{(1)}, \quad j = 2(1)n \\ b_1^{(2)} &= b_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα τώρα απαλείφεται ο άγνωστος x_2 τόσο από τις τελευταίες $n-2$ εξισώσεις όσο και από την πρώτη, οπότε λαμβάνουμε

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} + m_{i2} a_{1j}^{(2)}, \quad i = 1(1)n, i \neq 2, j = 2(1)n$$

και

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} + m_{i2} b_2^{(2)}, \quad i = 1(1)n, i \neq 2$$

όπου για λόγους ομοιομορφίας θέτουμε

$$\begin{aligned} a_{2j}^{(3)} &= a_{2j}^{(2)}, \quad j = 3(1)n \\ b_2^{(3)} &= b_2^{(2)}. \end{aligned}$$

Η μέθοδος απαλοιφής του Jordan

- Μερική ή ολική οδήγηση.
- Η επιλογή του οδηγού στοιχείου γίνεται όπως ακριβώς στη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss και δεν επεκτείνεται στην αναζήτηση όλης της στήλης
- Υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πίνακα
- Επίλυση συστημάτων με τον ίδιο πίνακα συντελεστών των αγνώστων.

Ο αλγόριθμος απαλοιφής του Jordan με μερική οδήγηση

1. Διάβασε τα δεδομένα n, $A = \left(a_{ij}\right)$, $1 \leq i, j \leq n$ και $b = \left(b_i\right)$, $1 \leq i \leq n$.
2. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί
$$a_{i,n+1} = b_i$$
3. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί
$$h(i) = i$$
4. Για $r = 1, 2, \ldots, n$ να εκτελεσθούν τα βήματα 4.1-4.4 (διαδικασία απαλοιφής).
   4.1. Έστω p ο μικρότερος ακέραιος
   $$r \leq p \leq n$$
   και
   $$|a(h(p), r))| = \max_{r \leq j \leq n} |a(h(j), r)|$$
   4.2. Εάν $a(h(p), r) = 0$ τότε τύπωσε ``δεν υπάρχει μοναδική λύση΄΄. Τέλος. (προσομοίωση της εναλλαγής των γραμμών)

4.3. Εάν $h(r) \neq h(p)$ τότε

$$\begin{aligned} q &= h(r) \\ h(r) &= h(p) \\ h(p) &= q \end{aligned}$$

4.4. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $i \neq r$ να εκτελεσθούν τα βήματα 4.4.1 και 4.4.2

  4.4.1. Να τεθεί

$$m(h(i), r) = -\frac{a(h(i), r)}{a(h(r), r)}$$

  4.4.2. Για $j = r + 1, r + 2, \ldots, n + 1$ να τεθεί

$$a(h(i), j) = a(h(i), j) + m(h(i), r)a(h(r), j)$$

Επίλυση διαγώνιου συστήματος

5. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί
   Εάν $a(h(i), i) = 0$ τότε τύπωσε ``όχι μοναδική λύση''. Τέλος.

$$x_i = a(h(i), n+1)/a(h(i), i)$$

6. Εκτύπωση της λύσης x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Τέλος

Άσκηση: Η μέθοδος του Jordan με μερική οδήγηση

Να εφαρμοστεί η μέθοδος Jordan **με μερική οδήγηση** για την επίλυση του γραμμικού συστήματος :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Επιλογή οδηγού γραμμής

$$\max\{|a_{11}|,\ |a_{21}|,\ |a_{31}|\} =$$
$$= \max\{|-1|, |2|, |1|\} =$$
$$= |2| = |a_{21}|$$

ανταλλαγή των γραμμών $1 \longleftrightarrow 2$

$$\begin{array}{r} \\ 1/2 \\ -1/2 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (1) \\ (3) \end{array}$$

Πολ/στές

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 15/2 & -3 & 9/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (1) \\ (3) \end{array} \quad \text{1ο βήμα}$$

Η μέθοδος του Jordan με μερική οδήγηση

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 15/2 & -3 & 9/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (1) \\ (3) \end{array}$$

Επιλογή οδηγού γραμμής

$\max\{|a_{22}|, \; |a_{32}|\} =$

$= \max\{|15/2|, |3/2|\} =$

$= |15/2| = |a_{21}|$

ανταλλαγή των γραμμών $2 \longleftrightarrow 3$

$$\begin{array}{c} 2/15 \\ \\ -1/5 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 15/2 & -3 & 9/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (3) \\ (1) \end{array}$$

Πολ/στές

$m_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{-1}{15/2} = \frac{2}{15}$

$m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{3/2}{15/2} = -\frac{1}{5}$

$$\begin{array}{c} -1 \\ -15/2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2/5 & 8/5 \\ 0 & 15/2 & -3 & 9/2 \\ 0 & 0 & -2/5 & -2/5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (3) \\ (1) \end{array}$$

2ο βήμα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 15/2 & 0 & 15/2 \\ 0 & 0 & -2/5 & -2/5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (3) \\ (1) \end{array}$$

3ο βήμα

Άρα η λύση είναι η $x_1 = 1, x_2 = 1$ και $x_3 = 1$.

Άσκηση

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} με τη μέθοδο απαλοιφής του Jordan (J)

α) χωρίς οδήγηση **β) με μερική οδήγηση**.

a) (J) χωρίς οδήγηση

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα :

Διαγωνοποίηση

$$\left[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}\right] = \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{Πολ/στές} \\ m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{2}{-1} = 2 \\ m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{3}{-1} = 3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & \vdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -10 & \vdots & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} m_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{1}{4} \\ \\ m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{3}{2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 0 & -2 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 & -8 & \vdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} m_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{33}} = -\frac{-2}{2} = 1 \\ m_{23} = -\frac{a_{23}}{a_{33}} = -\frac{-8}{2} = 4 \end{array}$$

..... (J) χωρίς οδήγηση

Επίλυση διαγωνίων συστημάτων

$$\sim \left[\begin{array}{rrrcrrr} -1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & 1 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot \ \frac{1}{-1} \\ \cdot \ \frac{1}{4} \\ \cdot \ \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[\mathbf{I} \vdots \mathbf{A}^{-1}\right]$$

β) (J) με μερική οδήγηση

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα :

Διαγωνοποίηση

$$\left[\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}\right] = \left[\begin{array}{rrrcrrr} -1 & 1 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Επιλογή οδηγού γραμμής

$\max\{|a_{11}|, \; |a_{21}|, \; |a_{31}|\} =$

$= \max\{|-1|, |2|, |3|\} =$

$= |3| = |a_{31}|$

εναλλαγή γραμμών $1 \longleftrightarrow 3$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrcrrr} 3 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Πολ/στές

$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{2}{3}$

$m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrcrrr} 3 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \vdots & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -\frac{10}{3} & \vdots & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$\max\{|a_{22}|, \; |a_{32}|\} =$

$= \max\{|0|, \; |2|\}$

$= |2| = |a_{32}|$

εναλλαγή γραμμών $2 \longleftrightarrow 3$

.... Διαγωνοποίηση

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{10}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Πολ/στές

$$m_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 7 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{10}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$m_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{33}} = -\frac{7}{-\frac{4}{3}} = \frac{21}{4}$$

$$m_{23} = -\frac{a_{23}}{a_{33}} = -\frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{5}{2}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{21}{4} & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{cc} . & \frac{1}{3} \\ . & \frac{1}{2} \\ . & -\frac{3}{4} \end{array}$$

....Επίλυση διαγωνίων συστημάτων

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[\mathbf{I} \vdots \mathbf{A}^{-1}\right]$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της μεθόδου του Jordan

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & & & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \hat{a}_{22} & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \hat{a}_{kk} & \hat{a}_{k,k+1} & \cdots & \hat{a}_{kn} \\ \cline{4-7} & & & \hat{a}_{k+1,k} & \hat{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \hat{a}_{k+1,n} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \hat{a}_{nk} & \hat{a}_{n,k+1} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{array}\right] \\ \hphantom{a_{11}\ \hat{a}_{22}\ \ddots\ \hat{a}_{k+1,k}}\underbrace{\hphantom{\hat{a}_{k+1,k+1} \quad \cdots \quad \hat{a}_{k+1,n}}}_{n-k} \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ X \\ \\ \\ \end{array}\right]}_{\ell} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ B \\ \\ \\ \end{array}\right]}_{\ell}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της μεθόδου του Jordan

Για τη διαγωνοποίηση του A απαιτούνται

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1) \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1)(n-k+\ell) \qquad \text{πολλαπλασιασμοί}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1)(n-k+\ell) \qquad \text{προσθαφαιρέσεις}$$

ή τελικά βρίσκουμε ότι χρειάζονται

$$n(n-1) \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(n-1+2\ell)}{2} \qquad \text{πολλαπλασιασμοί}$$

$$\frac{n(n-1)(n-1+2\ell)}{2} \qquad \text{προσθαφαιρέσεις.}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της μεθόδου του Jordan

Αν τώρα προστεθούν και οι n διαιρέσεις για την εύρεση μιας λύσης τότε για τα ℓ συστήματα απαιτούνται $n\ell$ διαιρέσεις.

΄Αρα τελικά για τη λύση ℓ συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής του Jordan απαιτούνται

$$\begin{array}{cl} n(n-1+\ell) & \text{διαιρέσεις} \\ \dfrac{n(n-1)(n-1+2\ell)}{2} & \text{πολλαπλασιασμοί} \\ \dfrac{n(n-1)(n-1+2\ell)}{2} & \text{προσθαφαιρέσεις.} \end{array} \tag{21}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της μεθόδου του Jordan

Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος οι ανωτέρω τύποι δίνουν ($\ell = 1$)

$$\begin{aligned} & n^2 && \text{διαιρέσεις} \\ & \frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} && \text{πολλαπλασιασμοί} \\ & \frac{n^3}{2} + \frac{n}{2} && \text{προσθαφαιρέσεις,} \end{aligned} \tag{22}$$

ενώ για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ($\ell = n$) δίνουν

$$\begin{aligned} & 2n^2 - n && \text{διαιρέσεις} \\ & \frac{3n^3}{2} - 2n^2 + \frac{n}{2} && \text{πολλαπλασιασμοί} \\ & \frac{3n^3}{2} - 2n^2 + \frac{n}{2} && \text{προσθαφαιρέσεις.} \end{aligned} \tag{23}$$

Υπολογιστική πολυπλοκότητα της μεθόδου του Jordan

- Το πλήθος των πράξεων για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο του Jordan είναι της τάξης $O(n^3/2)$
- Για τον υπολογισμό του αντιστρόφου η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss απαιτεί λιγότερες πράξεις.
- Η μέθοδος του Jordan χρησιμοποιείται μόνον για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός πίνακα.
- Η μέθοδος Simplex βασίζεται στη μέθοδο του Jordan.

Επίλυση ενός τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss (ή μέθοδος του Thomas)

Ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ο :

$$A = \left[\begin{array}{cccccc|c}
\mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} & & & & & \mathbf{d_1} \\
\mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} & & \text{0} & & \mathbf{d_2} \\
 & \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} & & & \mathbf{d_3} \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & \text{0} & & \mathbf{a_{n-1}} & \mathbf{b_{n-1}} & \mathbf{c_{n-1}} & \mathbf{d_{n-1}} \\
 & & & & \mathbf{a_n} & \mathbf{b_n} & \mathbf{d_n}
\end{array}\right]$$

1. Τριγωνοποίηση

1ο βήμα $\underline{\mathbf{i = 1}}$

$$\mathbf{m_2} = -\frac{\mathbf{a_2}}{\mathbf{b_1}} \quad (\text{αν } \mathbf{b_1} \neq \mathbf{0})$$

Ενημέρωση 2ης γραμμής

$\mathbf{a_2} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\mathbf{b_2} = \mathbf{b_2} + \mathbf{m_2 c_1}$ $\quad$ $\mathbf{d_2} = \mathbf{d_2} + \mathbf{m_2 d_1}$

Επίλυση ενός τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ με τη μέθοδο του Thomas

2ο βήμα $\underline{\mathbf{i = 2}}$

$$\mathbf{m_3} = -\frac{\mathbf{a_3}}{\mathbf{b_2}} \quad (\text{ αν } \mathbf{b_2} \neq \mathbf{0})$$

Ενημέρωση 3ης γραμμής

$\mathbf{a_3} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\mathbf{b_3} = \mathbf{b_3} + \mathbf{m_3 c_2}$ $\qquad$ $\mathbf{d_3} = \mathbf{d_3} + \mathbf{m_3 d_2}$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

i-οστό βήμα $\underline{\mathbf{i = i}}$

$$\mathbf{m_{i+1}} = -\frac{\mathbf{a_{i+1}}}{\mathbf{b_i}} \quad (\text{ αν } \mathbf{b_i} \neq \mathbf{0})$$

Ενημέρωση i+1 γραμμής

$\mathbf{a_{i+1}} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\mathbf{b_{i+1}} = \mathbf{b_{i+1}} + \mathbf{m_{i+1} c_i}$ $\qquad$ $\mathbf{d_{i+1}} = \mathbf{d_{i+1}} + \mathbf{m_{i+1} d_i}$

Αλγόριθμος του Thomas

1. Τριγωνοποίηση

```
for $i = 1$ to $n - 1$ do
    $m_{i+1} = -a_{i+1}/b_i$
    $b_{i+1} = b_{i+1} + m_{i+1}c_i$
    $d_{i+1} = d_{i+1} + m_{i+1}d_i$
```

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

$n - 1$ διαιρέσεις, $2(n - 1)$ πολ/σμοί, $2(n - 1)$ προσθ/αφαιρ.

Επίλυση ενός άνω διδιαγώνιου γραμμικού συστήματος

Μετά από $\mathbf{n-1}$ βήματα προκύπτει το ισοδύναμο άνω τριγωνικό σύστημα:

$$A = \left[\begin{array}{cccccc:c}
\mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} & & & & & \mathbf{d_1} \\
 & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} & & & 0 & \mathbf{d_2} \\
 & & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} & & & \mathbf{d_3} \\
 & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & 0 & & & \mathbf{b_{n-1}} & \mathbf{c_{n-1}} & \mathbf{d_{n-1}} \\
 & & & & & \mathbf{b_n} & \mathbf{d_n}
\end{array}\right]$$

2. Επίλυση ενός άνω διδιαγώνιου συστήματος

```
$\mathbf{x_n = d_n/b_n}$
for $\mathbf{i = n-1}$ to $\mathbf{1}$ do
    $\mathbf{x_i = (d_i - c_i x_{i+1})/b_i}$
```

Υπολογιστική Πολυπλοκότητα : $\mathbf{n-1}$ διαιρέσεις, $\mathbf{n-1}$ πολ/σμοί, $\mathbf{n-1}$ προσθ/αφαιρ.

Άσκηση: Υπολογιστική Πολυπλοκότητα για την επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Δίνονται οι πίνακες $\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n,n}$ και το διάνυσμα στήλη $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n}$. Να βρεθεί η υπολογιστική πολυπλοκότητα για την αριθμητική επίλυση των παρακάτω συστημάτων (εύρεση του $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n}$) με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- $(\mathbf{BA} + \mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$

Λύση

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{array}{rcc}
\text{Υπολογισμός του } \mathbf{B}^{-1} & : & \dfrac{4n^3}{3} \\
\text{Υπολογισμός του } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} & : & n^3 \\
\text{Επίλυση του γρ. συστήματος με τη μέθοδο του Gauss} & : & \dfrac{n^3}{3} \\
 & & \overline{} \\
\text{Συνολικά} & : & \dfrac{8n^3}{3}
\end{array}$$

Λύση

2. $(\mathbf{BA}+\mathbf{C})\mathbf{x}=\mathbf{Bb}$

Υπολογισμός του **BA** : n^3

Επίλυση του γρ. συστήματος με τη μέθοδο του Gauss : $\dfrac{n^3}{3}$

Συνολικά : $\dfrac{4n^3}{3}$

Norms διανυσμάτων

Μια *norm* διανύσματος $\|.\|$ είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$ με πραγματικές και μη αρνητικές τιμές με τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} &\text{i)}\|x\| > 0 \text{ αν } x \neq 0, \quad \|x\| = 0 \text{ αν } x = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{C}^n \\ &\text{ii)}\|cx\| = |c| \cdot \|x\| \quad \text{για κάθε } c \in \mathbb{C} \text{ και } x \in \mathbb{C}^n \\ &\text{iii)}\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ για } x, y \in \mathbb{C}^n \text{ (τριγωνική ανισότητα)} \end{aligned} \tag{24}$$

l_p − norms (Hölder norms)

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, & p = 1, 2, 3, \dots \\ \max_i |x_i|, & p = \infty \end{cases} \tag{25}$$

Norms διανυσμάτων

Οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες *norms* είναι οι l_1, l_2 και $l_\infty - norm$.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{αθροιστική norm}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{Ευκλείδια norm} \tag{26}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \qquad \text{Μεγίστη norm}$$

Norms πινάκων

Μια norm πίνακα είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{C}^{nn}$ με πραγματικές τιμές $\|\cdot\|$ που έχει τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} &\text{i)}\|A\| > 0,\ \text{εκτός αν } A = 0 \text{ οπότε } \|A\| = 0\\ &\text{ii)}\|cA\| = |c|\ \|A\|,\ \ \text{όπου}\ \ c \text{ βαθμωτό μέγεθος}\\ &\text{iii)}\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad (27)\\ &\text{iv)}\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\| \end{aligned}$$

Norms πινάκων

Οι norms πινάκων που αντιστοιχούν στις διανυσματικές norms ορίζονται από τον τύπο

$$\|A\| = \max_{\|x\|_\alpha \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$$

από τον οποίο προκύπτει η σχέση

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|\ \|x\|_\alpha \qquad (28)$$

Norms πινάκων

Οι τρεις *norms* πινάκων που αντιστοιχούν στις διανυσματικές norms δίνονται από τους τύπους

$$\|A\|_1 = \max_{\jmath} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\jmath}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i} \sum_{\jmath=1}^{n} |a_{i\jmath}| \tag{29}$$

$$\|A\|_2 = [\rho(A^H A)]^{1/2}$$

όπου $\rho(A) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ (*η φασματική ακτίνα του A*), όπου λ_i οι ιδιοτιμές του A και A^H είναι ο συζυγής ανάστροφος του A.

Θεώρημα 3.6.5

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

είναι η

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0.$$

Θεώρημα 3.6.6

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$$

είναι η

$$\lim_{k\to\infty} \|A^{(k)} - A\| = 0.$$

Θεώρημα 3.6.7

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η ακολουθία A^k των διαδοχικών δυνάμεων ενός πίνακα A τάξης n, στο μηδενικό πίνακα είναι η

$$\rho(A) < 1 \tag{30}$$

Θεώρημα 3.6.8

Για κάθε πίνακα τάξης n ισχύει

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Θεώρημα 3.6.9

Ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της ακολουθίας $\{A^k\}$ των διαδοχικών δυνάμεων ενός πίνακα A τάξης n στο μηδενικό πίνακα είναι η

$$\|A\| < 1$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 3.6.6 έχουμε ότι $\lim\limits_{k\to 0} A^k = 0$ αν $\lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$ αλλά λόγω του θεωρήματος 3.6.8 αρκεί $\lim\limits_{k\to\infty} \|A\|^k = 0$ η οποία για να ισχύει θα πρέπει $\|A\| < 1$.■

Θεώρημα 3.6.10

Για κάθε πίνακα A τάξης n ισχύει

$$\rho(A) \leq \|A\| \tag{31}$$

Απόδειξη

Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A και x το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα τότε

$$Ax = \lambda x$$

οπότε λαμβάνοντας τις norms των δύο μελών έχουμε

$$\|Ax\| = \|\lambda x\|$$

ή εφαρμόζοντας ιδιότητες των norms

$$|\lambda| \; \|x\| \; \leq \|A\| \; \|x\|$$

ή

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

συνεπώς

$$\rho(A) = \max |\lambda| \; \leq \|A\|. \blacksquare$$

Ασταθή συστήματα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$Ax = b \tag{32}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν αρχικά σφάλματα τόσο στον πίνακα A όσο και στο διάνυσμα b. Έστω δA και δb οι διαταράξεις στον A και b, αντίστοιχα. Τότε, με την προϋπόθεση ότι δεν εισχωρούν νέα σφάλματα κατά την επίλυση, αντί για την ακριβή τιμή του διανύσματος x, θα βρίσκουμε ένα διάνυσμα που θα περιέχει μία διατάραξη δx. Έτσι θα έχουμε το διαταραγμένο σύστημα

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \tag{33}$$

και είναι δυνατόν να βρούμε το ακόλουθο φράγμα για το σχετικό σφάλμα στο διάνυσα λύση.

Θεώρημα 7.1

Έστω ο μη ιδιάζων πίνακας A με

$$\|A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1 \tag{34}$$

τότε

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa}{1 - \|\delta A\| \, \|A^{-1}\|} \left[\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right] \tag{35}$$

όπου

$$\kappa = \kappa(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\| \tag{36}$$

Ασταθή συστήματα

Πόρισμα 7.2

Αν $\delta A = 0$ τότε

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Πόρισμα 7.3

Αν $\delta b = 0$ τότε

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|A\| \, \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|\delta A\|} \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Ασταθή συστήματα

Παρατηρήσεις

(i) Αν η διαταραχή δA είναι πολύ μικρή, τότε από το Πόρισμα 7.2 (όπου $\delta A = 0$), η σχετική αλλαγή στη λύση είναι φραγμένη από την ποσότητα $\kappa(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\|$.

(ii) Αν $\kappa(A)$ είναι μικρό, τότε μια μικρή διαταραχή του A ή μια μικρή διαταραχή του b ή μικρές διαταραχές των A και b δεν επιτρέπουν μεγάλες αλλαγές στη λύση x.

(iii) $\kappa = \|A^{-1}\| \, \|A\| \geq \|A^{-1} \, A\| = \|I\| = 1$

Ασταθή συστήματα

Ορισμός

Αν ο A είναι μη ιδιάζων, τότε

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \tag{37}$$

είναι ο **αριθμός συνθήκης** για το σύστημα $Ax = b$
Αν $\kappa(A)$ είναι ένας μεγάλος αριθμός, τότε μικρές διαταραχές του A ή b είναι δυνατόν να προκαλέσουν μεγάλες διαταραχές στη λύση x του συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το σύστημα είναι **ασταθές** (ill-conditioned).

Θεώρημα 7.4

Αν ο A είναι πραγματικός και συμμετρικός, τότε

$$\kappa(\mathbf{A}) = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right| \tag{38}$$

όπου λ_1 και λ_n είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη κατά απόλυτο τιμή ιδιοτιμές του A, αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση θα πρέπει να προτιμάται για την επίλυση πυκνών γραμμικών συστημάτων. Η μέθοδος αυτή είναι ευσταθής τουλάχιστον για μία μεγάλη κλάση προβλημάτων, όπως αποδεικνύει ο Wilkinson.
- Επίσης για πίνακες οι οποίοι είναι **πραγματικοί συμμετρικοί** και **θετικά ορισμένοι** δεν χρειάζεται η μερική οδήγηση προκειμένου η μέθοδος του Gauss να έχει αριθμητική ευστάθεια.