

Επιστημονικοί Υπολογισμοί

N. M. Μισυρλής

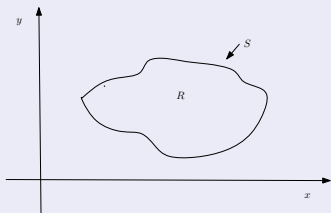
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών,
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περιεχόμενα

- Εισαγωγή
- Συνοριακές Συνθήκες
- Πεπερασμένες Διαφορές
- Self-Adjoint
- Η εξίσωση του Laplace
- Σύγκλιση
- Block Επαναληπτικές Μέθοδοι
 - ▶ Παράδειγμα
- Ασκήσεις

Αριθμητική Επίλυση Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = S(x, y, u, u_x, u_y)$$



$B^2 - AC < 0$ ελλειπτική,
όπου

$$A = A(x, y, u), \quad B = B(x, y, u), \quad C = C(x, y, u)$$

Αριθμητική Επίλυση Ελλειπτικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Παραδείγματα

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{Laplace}$$

ή

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta u = f(x, y) \quad \text{Poisson}$$

$$\Delta \Delta u = \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad \text{Biharmonic.}$$

Συνοριακές Συνθήκες

1

$$u = f(x, y) \text{ στο } S$$

πρώτο πρόβλημα συνοριακών τιμών ή πρόβλημα του Dirichlet

2

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y), (x, y) \in S$$

δεύτερο πρόβλημα συνοριακών τιμών ή πρόβλημα του Neumann

3

$$\alpha(x, y)u + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma(x, y), (x, y) \in S$$

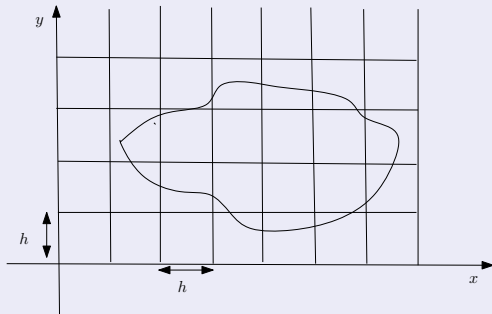
όπου

$$\alpha(x, y) > 0, \beta(x, y) > 0, (x, y) \in S$$

τρίτο πρόβλημα συνοριακών τιμών ή πρόβλημα του Robin

Συνοριακές Συνθήκες (συν.)

$$Au_{xx} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad A, C > 0, \quad F \leq 0$$



Πεπαρασμένες Διαφορές

$$u(x \pm h, y) = u(x, y) \pm hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} \pm \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx} \pm \dots \quad (1)$$

$$u(x, y \pm h) = u(x, y) \pm hu_y + \frac{h^2}{2!}u_{yy} \pm \frac{h^3}{3!}u_{yyy} + \frac{h^4}{4!}u_{yyyy} \pm \dots \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε

$$u_x = \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h} + O(h^2) \quad (3)$$

και

$$u_{xx} = \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) - 2u(x, y)}{h^2} + O(h^2). \quad (4)$$

Όμοια οι (2) δίνουν

$$u_y = \frac{u(x, y+h) - u(x, y-h)}{2h} + O(h^2) \quad (5)$$

και

$$u_{yy} = \frac{u(x, y+h) + u(x, y-h) - 2u(x, y)}{h^2} + O(h^2) \quad (6)$$

Πεπαρασμένες Διαφορές (συν.)

Η (1) λόγω των (3) και (4) γίνεται

$$\begin{aligned} & A \left[\frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) - 2U(x, y)}{h^2} \right] + \\ & C \left[\frac{U(x, y+h) + U(x, y-h) - 2U(x, y)}{h^2} \right] + \\ & D \left[\frac{U(x+h, y) - U(x-h, y)}{2h} \right] + \\ & E \left[\frac{U(x, y+h) - U(x, y-h)}{2h} \right] + FU(x, y) = G \end{aligned} \quad (7)$$

Πεπαρασμένες Διαφορές (συν.)

ή

$$\alpha_0 U_{i,j} - \alpha_1 U_{i+1,j} - \alpha_2 U_{i,j+1} - \alpha_3 U_{i-1,j} - \alpha_4 U_{i,j-1} = t_{i,j} \quad (8)$$

όπου

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - h^2 F = 2(A + C - \frac{1}{2}h^2 F),$$

$$\alpha_1 = A + \frac{1}{2}hD,$$

$$\alpha_2 = C + \frac{1}{2}hE, \quad (9)$$

$$\alpha_3 = A - \frac{1}{2}hD,$$

$$\alpha_4 = C - \frac{1}{2}hE, \quad t = -h^2 G$$

Σημειώστε ότι αν $\alpha_i > 0$,

$$h < \min \left\{ \frac{2A}{|D|}, \frac{2C}{|E|} \right\}. \quad (10)$$

Self-Adjoint

$$(Au_x)_x + (Cu_y)_y + Fu = G, \quad \mu\epsilon A, C > 0, F \geq 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (Au_x)_x &= h^{-2} \left\{ A\left(x + \frac{h}{2}, y\right) [u(x+h, y) - u(x, y)] \right. \\ &\quad \left. - A\left(x - \frac{h}{2}, y\right) [u(x, y) - u(x-h, y)] + O(h^2) \right\} \\ (Cu_y)_y &= h^{-2} \left\{ C\left(x, y + \frac{h}{2}\right) [u(x, y+h) - u(x, y)] \right. \\ &\quad \left. - C\left(x, y - \frac{h}{2}\right) [u(x, y) - u(x, y-h)] + O(h^2) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Self-Adjoint

Η (11) λόγω της (12) γράφεται

$$\hat{\alpha}_0 U_{i,j} - \hat{\alpha}_1 U_{i+1,j} - \hat{\alpha}_2 U_{i,j+1} - \hat{\alpha}_3 U_{i-1,j} - \hat{\alpha}_4 U_{i,j-1} = t_{i,j} \quad (13)$$

όπου

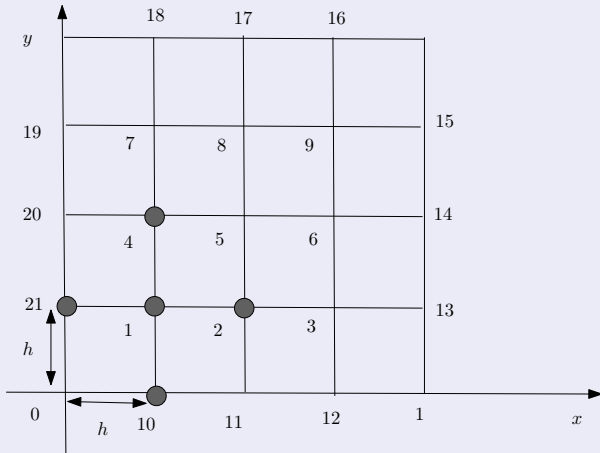
$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_0 &= \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 - h^2 F, \\ \hat{\alpha}_1 &= A\left(x + \frac{h}{2}, y\right), \quad \hat{\alpha}_2 = C\left(x, y + \frac{h}{2}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\hat{\alpha}_3 = A\left(x - \frac{h}{2}, y\right), \quad \hat{\alpha}_4 = C\left(x, y - \frac{h}{2}\right), \quad t = -h^2 G$$

$$\hat{\alpha}_i > 0, \quad \hat{\alpha}_0 \geq \sum_{i=1}^4 \hat{\alpha}_i (F \leq 0) \quad (15)$$

Η Εξίσωση του Laplace

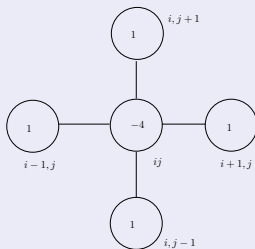
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (16)$$



Η Εξίσωση του Laplace

Από την (8), για $A = C = 1$, $F = G = 0$, προκύπτει

$$U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} = 0. \quad (17)$$



Εφαρμόζοντας την (17) για όλους τους κόμβους θα λάβουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$Au = b \quad (18)$$

Η Εξίσωση του Laplace

όπου

$$u = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} U_{10} + U_{21} \\ U_{11} \\ U_{12} + U_{13} \\ \vdots \\ U_{15} + U_{16} \end{bmatrix},$$

και

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 & & & & \\ & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ -1 & & & 4 & -1 & & -1 & & \\ & -1 & & -1 & 4 & -1 & & -1 & \\ & & -1 & & -1 & 4 & & & -1 \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Η Εξίσωση του Laplace

ή

$$A = \begin{bmatrix} B & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & B & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & B & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & B \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

Η Εξίσωση του Laplace

Η λύση του συστήματος (18) υπολογίζεται με επαναληπτικές μεθόδους.
Η SOR μέθοδος

$$u^{(n+1)} = (1 - \omega)u^{(n)} + \omega(Lu^{(n+1)} + Uu^{(n)} + c) \quad (19)$$

με

$$c = D^{-1}b$$

και

$$A = D - C_L - C_U \quad (20)$$

όπου $D = \text{diag}(A)$, $-C_L$, $-C_U$ τα κάτω και άνω τριγωνικά τμήματα του A .
Επιπλέον

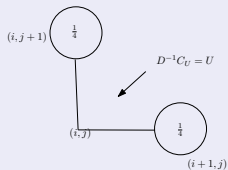
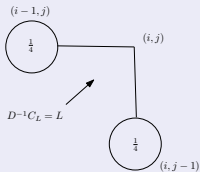
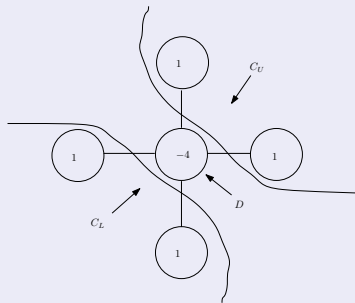
$$L = D^{-1}C_L \text{ και } U = D^{-1}C_U. \quad (21)$$

$$Lu \rightarrow \frac{1}{4}(U_{i-1,j} + U_{i,j-1})$$

$$Uu \rightarrow \frac{1}{4}(U_{i,j+1} + U_{i+1,j}) \quad (22)$$

Η Εξίσωση του Laplace

Το μόριο του A είναι:



Η Εξίσωση του Laplace

Η SOR για την (17) είναι (βλ. (19)) η

$$U_{ij}^{(n+1)} = (1 - \omega)U_{ij}^{(n)} + \omega\left[\left(\frac{1}{4}U_{i-1,j}^{(n+1)} + \frac{1}{4}U_{i,j-1}^{(n+1)}\right) + \left(\frac{1}{4}U_{i+1,j}^{(n)} + \frac{1}{4}U_{i,j+1}^{(n)}\right)\right] \quad (23)$$

Για $\omega = 1$ η (23) παράγει την

$$U_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(U_{i-1,j}^{(n+1)} + U_{i,j-1}^{(n+1)} + U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}) \quad (24)$$

η οποία είναι η Gauss-Seidel (GS) μέθοδος. Πράγματι η GS σε μορφή πινάκων είναι

$$u^{(n+1)} = Lu^{(n+1)} + Uu^{(n)} + c \quad (25)$$

και λόγω της (22) δίνει την (24).

Η Εξίσωση του Laplace

Όμοια η Jacobi Overrelaxation (JOR) δίνεται από τον τύπο

$$u^{(n+1)} = (1 - \tau)u^{(n)} + \tau(Bu^{(n)} + c), \quad B = L + U \quad (26)$$

και λόγω της (22) δίνει

$$U_{ij}^{(n+1)} = (1 - \tau)U_{ij}^{(n)} + \frac{\tau}{4}(U_{i-1,j}^{(n)} + U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j-1}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}) \quad (27)$$

Αν $\tau = 1$ η (26) δίνει τη μέθοδο του Jacobi

$$u^{(n+1)} = Bu^{(n)} + c \quad (28)$$

η οποία δίνει

$$U_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(U_{i-1,j}^{(n)} + U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j-1}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}). \quad (29)$$

Η Εξίσωση του Laplace

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι είναι ειδικές περιπτώσεις της *ESOR* μεθόδου, η οποία σε μορφή πινάκων, έχει τον τύπο

$$u^{(n+1)} = (1 - \tau)u^{(n)} + \omega Lu^{(n+1)} + (\tau - \omega)Lu^{(n)} + \tau Uu^{(n)} + \tau c \quad (30)$$

- Για $\tau = \omega$ η (30) δίνει την *SOR*.
- Για $\tau = \omega = 1$ η (30) δίνει την *GS*.
- Ενώ για $\omega = 0$, δίνει την *JOR*.

Η Εξίσωση του Laplace

Η *Unsymmetric Successive Overrelaxation* (USSOR) μέθοδος δίνεται από τους τύπους

$$u^{(n+\frac{1}{2})} = (1 - \omega)u^{(n)} + \omega(Lu^{(n+\frac{1}{2})} + Uu^{(n)} + c)$$

και

$$u^{(n+1)} = (1 - \omega')u^{(n+\frac{1}{2})} + \omega'(Lu^{(n+\frac{1}{2})} + Uu^{(n+1)} + c) \quad (31)$$

η οποία τώρα λαμβάνει τη μορφή

$$U_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = (1 - \omega)U_{ij}^{(n)} + \frac{\omega}{4}(U_{i-1,j}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i,j-1}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i+1,j}^{(n)} + U_{i,j+1}^{(n)}) \quad (32)$$

και

$$U_{ij}^{(n+1)} = (1 - \omega')U_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{\omega'}{4}(U_{i-1,j}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i,j-1}^{(n+\frac{1}{2})} + U_{i+1,j}^{(n+1)} + U_{i,j+1}^{(n+1)}) \quad (33)$$

Η (32) σαρώνει το δίκτυο από κάτω προς τα πάνω ενώ η (33) σαρώνει το δίκτυο από πάνω προς τα κάτω. Για $\omega = \omega'$ προκύπτει η *Symmetric SOR* (SSOR) μέθοδος.

Η Εξίσωση του Laplace

Μια ανάλογη μέθοδος είναι η Preconditioned Simultaneous Displacement (PSD) μέθοδος, η οποία δίνεται από το ακόλουθο σχήμα

$$u^{(n+\frac{1}{2})} = (1 - \tau)u^{(n)} + \omega Lu^{(n+\frac{1}{2})} + (\tau - \omega)Lu^{(n)} + \tau(Uu^{(n)} + c) \quad (34)$$

και

$$u^{(n+1)} = u^{(n+\frac{1}{2})} + \omega Uu^{(n+1)} - \omega Uu^{(n)} \quad (35)$$

η οποία για το μόριο των 5-σημείων γίνεται:

$$u_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} = (1 - \tau)u_{i,j}^{(n)} + \left(\frac{\omega}{4}\right)(u_{i-1,j}^{(n+\frac{1}{2})} + u_{i,j-1}^{(n+\frac{1}{2})}) + \left(\frac{\tau - \omega}{4}\right)(u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}) + \left(\frac{\tau}{4}\right)(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)}) \quad (36)$$

και

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{\omega}{4}(u_{i+1,j}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n+1)}) - \frac{\omega}{4}(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)}) \quad (37)$$

όπου η σάρωση γίνεται όπως στην SSOR.

$$S(G) = \max|\lambda| < 1, u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + k$$

JOR Μέθοδος

Ο επαναληπτικός πίνακας της JOR είναι ο

$$B_\tau = (1 - \tau)I + \tau B. \quad (38)$$

Αν m ιδιοτιμές του B τότε

$$m \leq \mu \leq M$$

$$\text{επειδή } \text{trace}(B) = \sum_{i=1}^N \mu_i = 0, \text{ με } m \leq 0 \leq M \quad (39)$$

Άρα

$$S(B_\tau) = \max|1 - \tau + \tau\mu|, \quad m \leq \mu \leq M \quad (40)$$

και για σύγκλιση $S(B_\tau) < 1$ ή

$$|1 - \tau + \tau\mu| < 1, \quad m \leq \mu \leq M. \quad (41)$$

Σύγκλιση

Υποθέτοντας ότι A είναι συμμετρικός, τότε από (41) και (39)

$$0 < \tau < \frac{2}{1-m}, \quad M < 1 \quad (42)$$

Σημείωση:

$$B = D^{-1}(L + U)$$

όμοιος με

$$\tilde{B} = D^{\frac{1}{2}}BD^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}(L + U)D^{-\frac{1}{2}}$$

ο οποίος είναι συμμετρικός άρα ο B έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Υπόθεση: ο D έχει θετικά στοιχεία.

J Μέθοδος

$S(B) < 1$, $S(B) = \max\{|m|, M\} < 1$, οπότε

$$M < 1, M + m > 0 \quad \text{ή} \quad -1 < m, M + m < 0 \quad (43)$$

Βέλτιστη τιμή του τ .

Από την (40) έχουμε:

$$S(B_\tau) = \max\{|1 - \tau + \tau M|, |1 - \tau + \tau m|\} \quad (44)$$

η βέλτιστη τιμή του τ θα είναι αυτή που

$$1 - \tau + \tau M = -(1 - \tau + \tau m)$$

$$\text{ή} \quad \tau_0 = \frac{2}{2 - m - M} \quad (45)$$

οπότε

$$S(B_{\tau_0}) = |1 - \tau_0 - \tau_0 M| = \frac{M - m}{2 - M - m}. \quad (46)$$

Σύγκλιση

Αλλά

$$m = 1 - \lambda_{max}, \quad M = 1 - \lambda_{min} \quad (47)$$

όπου λ_{min} , λ_{max} , η μικρότερη και μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα \hat{A} αντίστοιχα, με

$$\hat{A} = D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}} \quad (48)$$

και

$$(\tilde{B} = D^{\frac{1}{2}}BD^{-\frac{1}{2}} = I - \underbrace{D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}}_{\lambda}) = I - \hat{A}$$

Οι (45), (46) λόγω της (47) γράφονται

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \quad (49)$$

και

$$S(B_{\tau_0}) = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \frac{P(\hat{A}) - 1}{P(\hat{A}) + 1}, \quad (50)$$

$$P(\hat{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Η ποσότης $P(\hat{A})$ καλείται αριθμός συνθήκης του \hat{A} . Από την (50) έχουμε

$$R(B_{\tau_0}) = -\log S(B_{\tau_0}) \simeq \frac{2}{P(\hat{A})}. \quad (51)$$

Η ταχύτητα σύγκλισης της JOR είναι αντίστροφα ανάλογη του αριθμού συνθήκης του \hat{A} .

Θυμηθείτε ότι $u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau R^{-1}(b - Au^{(n)})$ ή

$u^{(n+1)} = (I - \tau R^{-1}A)u^{(n)} + \tau R^{-1}b$. Αν $R = D$ τότε προκύπτει η JOR, οπότε τα ανωτέρω αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν.

Στόχος: Να επιλεγεί ο R έτσι ώστε ο $R^{-1}A$ να έχει όσο το δυνατόν μικρότερο φασματικό αριθμό.

$$k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad \text{φασματικός αριθμός.}$$

Σύγκλιση

Σύγκλιση της SOR

Ο επαναληπτικός πίνακας της SOR είναι ο

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]$$

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του \mathcal{L}_ω έχουμε

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^N \lambda_i &= \det(\mathcal{L}_\omega) = \det(I - \omega L)^{-1} \cdot \det((1 - \omega)I + \omega U) \\ &= \det((1 - \omega)I + \omega U) = (1 - \omega)^N\end{aligned}$$

άρα

$$S(\mathcal{L}_\omega) \geq (|1 - \omega|^N)^{\frac{1}{N}} = |1 - \omega| \quad (52)$$

Αν $S(\mathcal{L}_\omega) < 1$, τότε $|1 - \omega| < 1$

ή

$$0 < \omega < 2 \quad (\text{Kahan 1958}) \quad (53)$$

Σύγκλιση

Ορισμός: Ένας πίνακας είναι two cyclic αν με κατάλληλη μετάθεση των γραμμών του και των αντίστοιχων στηλών του μπορεί να τεθεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} I_1 & F \\ G & I_2 \end{bmatrix}$$

όπου I_1, I_2 είναι τετραγωνικοί ταυτοτικοί πίνακες και F, G ορθογώνιοι πίνακες.
Ορισμός: Αν ένας πίνακας $A = I - L - U$ είναι two cyclic, τότε είναι consistency ordered αν οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$aL + \frac{1}{a}U, \quad a \neq 0$$

είναι ανεξάρτητες του a .

Σύγκλιση

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του \mathcal{L}_ω έχουμε

$$\det(\mathcal{L}_\omega - \lambda I) = 0 \text{ ή } |(I - \omega L^{-1})\{I + \omega(U - I)\} - \lambda I| = 0$$

ή

$$|I + \omega(U - I) - \lambda(I - \omega L)| = 0$$

ή

$$|(U + \lambda L) - \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega} I| = 0$$

ή

$$|\lambda^{\frac{1}{2}}(\lambda^{\frac{1}{2}}L + \lambda^{-\frac{1}{2}}U) - \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega} I| = 0$$

ή

$$|(\lambda^{\frac{1}{2}}L + \lambda^{-\frac{1}{2}}U) - \frac{\lambda + \omega - 1}{\lambda^{\frac{1}{2}}\omega} I| = 0$$

Σύγκλιση

Αν $A = I - L - U$ είναι two cyclic και consistently ordered τότε

$$\|(L + U) - \frac{\lambda + \omega - 1}{\lambda^{\frac{1}{2}}\omega}I\| = 0$$

ή

$$\mu = \frac{\lambda + \omega - 1}{\lambda^{\frac{1}{2}}\omega} \quad (54)$$

όπου μ ιδιοτιμή του $B = L + U$ και λ ιδιοτιμή του \mathcal{L}_ω . ή

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda \quad (55)$$

Η (55) είναι δευτεροβάθμια ως προς λ και εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$S(\mathcal{L}_\omega) = \max|\lambda| < 1$$

αν και μόνο αν

$$\bar{\mu} = S(B) < 1 \text{ και } 0 < \omega < 2 \quad (56)$$

Σύγκλιση

Από την (55) αν $\omega = 1(GS)$ τότε $\lambda_{GS} = \mu^2$ ή

$$S(\mathcal{L}) = S(B)^2 \quad (57)$$

ή

$$R(\mathcal{L}) = 2R(B). \quad (58)$$

Θυμηθείτε ότι

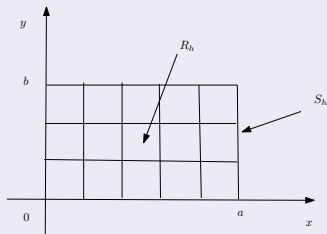
$$R(G) = -\log S(G)$$

είναι η ταχύτητα σύγκλισης μιας ε.μ.

$$u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + k$$

Η (57) δηλώνει ότι η ταχύτητα σύγκλισης της GS είναι διπλάσια από εκείνης του Jacobi.

Εφαρμογή για το πρόβλημα μοντέλο.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$0 < x < a, 0 < y < b$$

$$\frac{a}{h}, \frac{b}{h} \text{ ακέραιοι } l, J$$

Για τον προσδιορισμό μιας ιδιοτιμής μ του B αναζητούμε μια συνάρτηση $v(x, y)$ ορισμένη στο $R_h \cup S_h$ τέτοια ώστε

$$\mu v(x, y) = \frac{1}{4} [v(x+h, y) + v(x-h, y) + v(x, y+h) + v(x, y-h)] \quad (59)$$

επί του R_h και $v(x, y) = 0$ στο S_h .

Εφαρμογή για το πρόβλημα μοντέλο.

Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών βρίσκεται ότι

$$v(x, y) = v_{p,q}(x, y) = \sin \frac{q\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \quad (60)$$

και

$$\mu = \mu_{p,q} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{q\pi h}{a} + \cos \frac{p\pi h}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{q\pi}{l} + \cos \frac{p\pi}{J} \right) \quad (61)$$

όπου p, q ακέραιοι με $1 \leq q \leq l - 1$ και $1 \leq p \leq J - 1$. Επειδή η $|\mu_{p,q}|$ μεγιστοποιείται για $p = q = 1$ η (61) δίνει

$$\bar{\mu} = S(B) = \mu_{1,1} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi h}{a} + \cos \frac{\pi h}{b} \right] = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{l} + \cos \frac{\pi}{J} \right) \quad (62)$$

ή, αναπτύσσοντας σε σειρά

$$\bar{\mu} = S(B) = 1 - \frac{1}{4} \left[\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right] h^2 + O(h^4) \quad (63)$$

Εφαρμογή για το πρόβλημα μοντέλο.

Για $a = b = 1$ (τετράγωνο πεδίο) η (62) δίνει ($I = J = \frac{1}{h}$)

$$\bar{\mu} = S(B) = \cos\pi h \quad (64)$$

ή για $h \rightarrow 0$

$$\bar{\mu} = S(B) \simeq 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}. \quad (65)$$

Από την (57) έχουμε για την GS

$$S(\mathcal{L}) = S(B)^2 = \cos^2\pi h \quad (66)$$

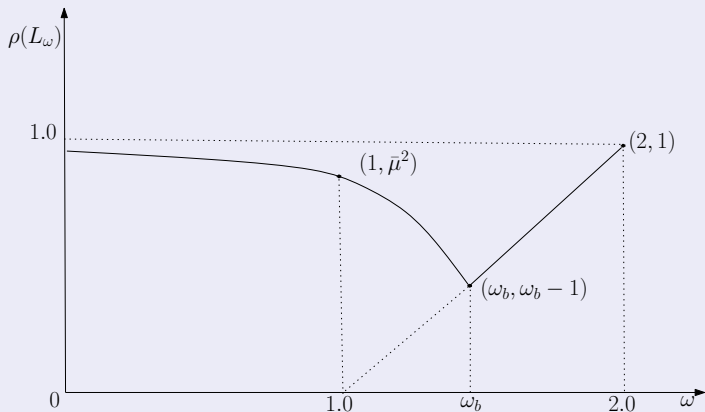
ή

$$S(\mathcal{L}) \simeq 1 - \pi^2 h^2 \quad (67)$$

ή

$$R(\mathcal{L}) = -\log S(\mathcal{L}) = \pi^2 h^2 \quad (67)'$$

Εφαρμογή για το πρόβλημα μοντέλο.



$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}, \quad \bar{\mu} = S(B)$$

$$S(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \omega_0 - 1.$$

Εφαρμογή για το πρόβλημα μοντέλο.

Επειδή για το πρόβλημα μοντέλο έχουμε $\bar{\mu} = \cos \pi h$ έπεται ότι

$$S(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \frac{1 - \sin \pi h}{1 + \sin \pi h} \simeq 1 - 2\pi h \quad (68)$$

$$\text{με } \omega_0 = \frac{2}{1 + \sin \pi h} \quad (69)$$

$$\text{Άρα } R(S(\mathcal{L}_{\omega_0})) \simeq 2\pi h \quad (70)$$

Συμπέρασμα: Συγκρίνοντας την (67)' με την (70) συμπεραίνουμε ότι η SOR είναι καλύτερη από την GS κατά μία τάξη μεγέθους.

Εφαρμογή για το πρόβλημα μοντέλο.

h	$\bar{\mu}$	$R(B)$	$R(\mathcal{L})$	$n_{\pi}(J)$	$n_{\pi}(GS)$	$n_{\theta}(J)$	$n_{\theta}(GS)$
$\frac{1}{10}$	0.9511	0.0502	0.100	285	143	276	138
$\frac{1}{20}$	0.9877	0.0124	0.0248	1154	578	1116	558
$\frac{1}{40}$	0.9969	0.0031	0.0062	4631	2317	4475	2238

$$U_{ij}^{(0)} = 1, \|U^{(n+1)} - U^{(n)}\|_{\infty} < \epsilon = 10^{-6}$$

- n_{π} = αριθμός επαναλήψεων (πειραματικός)
- n_{θ} = Θεωρητικός αριθμός επαναλήψεων
- $n_{\theta} \geq \frac{\log \frac{1}{\epsilon}}{R}, R = -\log S$

Ορισμός

Ένας πίνακας A είναι δικυκλικός αν με κατάλληλη μετάθεση των γραμμών του και των αντίστοιχων στηλών του, μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} I_1 & F \\ G & I_2 \end{bmatrix}$$

όπου I_1 , I_2 είναι τετραγωνικοί μοναδιαίοι πίνακες και F , G είναι τυχαίοι ορθογώνιοι πίνακες.

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ a & 1 & c \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & c \\ 0 & 1 & \vdots & a \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a & c & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, ο αρχικός πίνακας είναι δικυκλικός, μετά από την ανταλλαγή της δεύτερης με την τρίτη γραμμή και στη συνέχεια μετά την ανταλλαγή της δεύτερης με την τρίτη στήλη.

Ορισμός

Ένας πίνακας A είναι ασθενά δίκυκλικός αν με κατάλληλη μετάθεση των γραμμών του και των αντίστοιχων στηλών του, μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} 0_1 & F \\ G & 0_2 \end{bmatrix}$$

όπου $0_1, 0_2$ είναι τετραγωνικοί μηδενικοί πίνακες.

Ορισμός

Αν ο πίνακας $(I - L - U)$ είναι δικυκλικός, τότε είναι συνεπώς διατεταγμένος αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$aL + \frac{1}{a}U \quad (a \neq 0)$$

είναι ανεξάρτητες του a .

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} = I - L - U$$

όπου

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$aL + \frac{1}{a}U = \begin{bmatrix} 0 & 2/a & 0 \\ 4a & 0 & 3a \\ 0 & 5a & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές λ του $aL + (1/a)U$ δίνονται από την

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2/a & 0 \\ 4a & -\lambda & 3a \\ 0 & 5a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = 0, \pm\sqrt{23}$ οι οποίες είναι ανεξάρτητες του a και επομένως ο $I - L - U$ είναι συνεπώς διατεταγμένος.

Άσκηση

Ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος.

Άσκηση

Με τη βοήθεια της εξίσωσης (:::), ναδειχθεί ότι για έναν δικυκλικό και συνεπώς διατεταγμένο πίνακα, η Gauss-Seidel μέθοδος συγκλίνει αν η point Jacobi μέθοδος συγκλίνει και μάλιστα με γρηγορότερη ταχύτητα.

Έστω ότι ο πίνακας $I - L - U$ είναι συμμετρικός καθώς επίσης δίκυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος και ο $L + U$ είναι συμμετρικός έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του $L + U$ να είναι πραγματικές. Αποδεικνύεται εύκολα ότι αφού ο $L + U$ είναι ασθενά δίκυκλικός, οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του είναι σε \pm ζεύγη, και έτσι $-\rho(L + U) \leq \mu \leq \rho(L + U)$.

Μετά την ανταλλαγή των γραμμών και των αντίστοιχων στηλών, ο $L + U$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} 0_1 & F \\ G & 0_2 \end{bmatrix},$$

όπου $0_1, 0_2$ είναι τετραγωνικοί μηδενικοί πίνακες τάξης r και s αντίστοιχα, και ο $L + U$ είναι τάξης $r + s$. Αφού οι ιδιοτιμές των γραμμών και των αντίστοιχων στηλών δεν επηρεάζουν τις ιδιοτιμές του πίνακα, οι ιδιοτιμές του $L + U$ δίνονται από την

$$\begin{bmatrix} -\mu I_1 & F \\ G & -\mu I_2 \end{bmatrix} = 0,$$

όπου I_1, I_2 είναι μοναδιαίοι πίνακες τάξης r και s αντίστοιχα. Πολλαπλασιάζοντας τις πρώτες r γραμμές και τις τελευταίες s στήλες της ορίζουσας με -1 , έχουμε το αποτέλεσμα

$$\begin{bmatrix} \mu I_1 & F \\ G & \mu I_2 \end{bmatrix} = 0,$$

το οποίο μας δείχνει ότι η $-\mu$ είναι επίσης ιδιοτιμή του $L + U$.

Θεώρημα 47

Έστω ότι ο πίνακας A της (72) είναι ένας p -κυκλικός πίνακας συνεπώς διατεταγμένος με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες $A_{i,i}$, $1 \leq i \leq N$. Αν $\omega \neq 0$, λ είναι μια μη μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα

$$\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}((I - \omega L)I + \omega U)$$

και αν ο μ ικανοποιεί την

$$(\lambda + \omega - 1)^p = \lambda^{p-1} \omega^p \mu^p, \quad (71)$$

τότε η μ είναι μια ιδιοτιμή του κατά ομάδες πίνακα Jacobi

$$B = I - D^{-1}A = L + U$$

. Αντίστροφα, αν μ είναι μια ιδιοτιμή του B και το λ ικανοποιεί την (71), τότε το λ είναι μια ιδιοτιμή του \mathcal{L}_ω .

Θεώρημα

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix}, \quad (72)$$

είναι ένας συνεπώς διατεταγμένος p -κυκλικός πίνακας με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες $A(i, i)$, $1 \leq i \leq N$. Αν όλες οι ιδιοτιμές p -τάξης του κατά ομάδες πίνακα Jacobi B είναι πραγματικές, μη αρνητικές και $0 \leq \rho(B) < 1$, τότε όταν το ω_b ορίζεται από την

$$(\rho(B)\omega_b)^p = [p^p(p-1)^{1-p}] \cdot (\omega_b - 1) \quad (73)$$

έχουμε

1. $\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = (\omega_b - 1)(p - 1)$
 2. $\rho(\mathcal{L}_{\omega}) > \rho(\mathcal{L}_{\omega_b})$, για κάθε $\omega \neq \omega_b$.
- (74)

Επίσης, ο κατά ομάδες επαναληπτικός πίνακας \mathcal{L}_{ω} της SOR μεθόδου συγκλίνει για κάθε ω που βρίσκεται στο διάστημα $(0, p/p - 1)$.

Για $p = 2$, η ω_b μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα σαν

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} = 1 + \left(\frac{\rho(B)}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} \right)^2. \quad (75)$$

Για λόγους απλότητας, θα επαληθεύσουμε ότι η παράμετρος ω_b της (75) δίνει πραγματικά τη λύση της

$$\min_{\omega} \rho(\mathcal{L}_{\omega}) = \rho(\mathcal{L}_{\omega_b}). \quad (76)$$

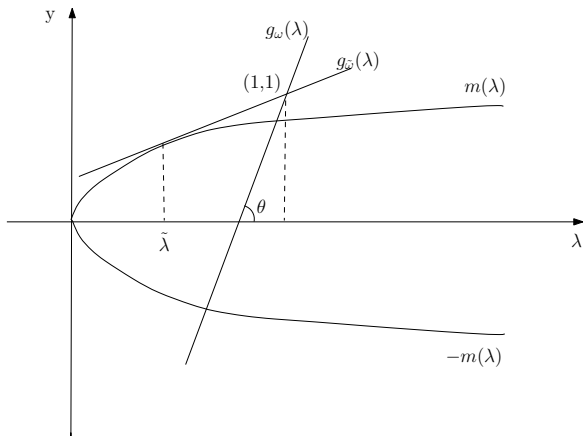
για την ειδική περίπτωση όπου $p = 2$.

Σύμφωνα με το θεώρημα 47, οι ιδιοτιμές λ του κατά ομάδες SOR πίνακα και οι ιδιοτιμές μ του κατά ομάδες πίνακα Jacobi σχετίζονται με την

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda \omega^2 \mu^2, \quad (77)$$

Για $\omega \neq 0$ ότι

$$\frac{\lambda + \omega - 1}{\omega} = \pm \lambda^{1/2} \mu. \quad (78)$$



Σχήμα: Γραφική παράσταση των $g_{\omega}(\lambda)$, $g_{\bar{\omega}}(\lambda)$ και $m(\lambda)$ στην περίπτωση που οι ρίζες της (77) είναι πραγματικές.

Στη συνέχεια ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_{\omega}(\lambda) = \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega}, \omega \neq 0, \quad (79)$$

και

$$m(\lambda) = \lambda^{1/2} \mu, \quad 0 \leq \mu \leq \rho(B) < 1, \quad (80)$$

όπου η $g_{\omega}(\lambda)$ είναι μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από το σημείο (1,1) και της οποίας η κλίση φθίνει όσο αυξάνει το ω .

Η μεγαλύτερη τετμημένη των δύο σημείων τομής φθίνει όσο αυξάνει το ω μέχρι η ευθεία $g_{\omega}(\lambda)$ να εφάπτεται στην παραβολή $m(\lambda)$. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (81)$$

και η τετμημένη $\tilde{\lambda} = \tilde{\omega} - 1$, όπου τα $\tilde{\omega}$ και $\tilde{\lambda}$, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος της παραβολής και της εφαπτομένης της παραβολής (βλ. παράρτημα).

Για $\omega > \tilde{\omega}$, το οποίο συμβαίνει όταν η διακρίνουσα της (77) είναι αρνητική, έχουμε ότι η (77) έχει μιγαδικές συζυγείς ρίζες με μέτρο $\omega - 1$, το οποίο αυξάνει κατά μέτρο όσο αυξάνει το ω .

Επομένως, για μια σταθερή τιμή μ του B , η τιμή του ω που ελαχιστοποιεί τη ρίζα της μεγαλύτερης κατά μέτρο ιδιοτιμής είναι η $\tilde{\omega}$.

Η καμπύλη $\pm m(\lambda) = \pm \lambda^{1/2} \rho(B)$ είναι ένας φάκελος για όλες τις ευθείες $\pm \lambda^{1/2} \mu$, $0 \leq \mu \leq \rho(B)$ και δεδομένου ότι ισχύει η

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \max_{\mu} \{ \min_{\omega} (\mathcal{L}_{\omega}) \}, \quad (82)$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_b}) = \omega_b - 1, \quad (83)$$

όπου το ω_b δίνεται από την (75).

Η εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής δίνεται από την

$$y - y_0 = m'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) \quad (84)$$

όπου

$$m'(\lambda_0) = \pm \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_0}} \quad (85)$$

Αφού η $g_\omega(\lambda)$ διέρχεται από το $(1,1)$, το σημείο αυτό θα επαληθεύει την (84),
οπότε από τις (84) και (85) προκύπτει ότι

$$1 - y_0 = \pm \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda_0}}(1 - \lambda_0). \quad (86)$$

Ισχύει επίσης ότι

$$y_0 = \frac{\lambda_0 + \omega - 1}{\omega} \quad (87)$$

αφού η $g_\omega(\lambda)$ περιστρέφεται μέχρις ότου να περάσει από το σημείο επαφής.
Λύνοντας το σύστημα των (86) και (87) βρίσκουμε το σημείο επαφής

$$(\lambda_0, y_0) = \left(\frac{\omega^2 \mu^2}{4}, \frac{\omega^2 \mu^2 + 4\omega - 4}{4\omega} \right). \quad (88)$$

Το σημείο αυτό θα επαληθεύει την παραβολή, οπότε από την (78) έχουμε ότι $y_0 = \pm\sqrt{\lambda_0\mu}$ και λόγω της (88) προκύπτει

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} \quad \text{και} \quad \hat{\omega} = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - \mu^2}} \quad (89)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{\omega} < \hat{\omega}, \quad (90)$$

όπου $0 < \tilde{\omega} < 2 < \hat{\omega}$. Επίσης επειδή η λ_0 , όπως δίνεται από την (88), είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς ω , θα ισχύει λόγω της (90) ότι $\lambda_0(\tilde{\omega}) < \lambda_0(\hat{\omega})$, δηλαδή $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} - 1$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η βέλτιστη τιμή του overrelaxation παράγοντα όταν η Crank-Nicolson μέθοδος διαφορών χρησιμοποιείται για την επίλυση της εξίσωσης θερμότητας σε μονοδιάστατο χώρο στην ανοικτή περιοχή $[0 \leq x \leq 1] \times [t \geq 0]$.

Λύση

Το σύστημα των εξισώσεων που λύνεται σε κάθε βήμα δίνεται από την (81 (βλ. βιβλίο)). Προκειμένου να παράγουμε τη μονάδα στη θέση κάθε στοιχείου στην κύρια διαγώνιο, κάθε εξίσωση της (81 (βλ. βιβλίο)) διαιρείται με το $1 + r$, οπότε παράγεται ο

$$I - L - U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{r}{2(1+r)} & 0 & 0 \\ -\frac{r}{2(1+r)} & 1 & -\frac{r}{2(1+r)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{r}{2(1+r)} \\ 0 & 0 & -\frac{r}{2(1+r)} & 1 \end{bmatrix}$$

... συνέχεια λύσης

Στη συνέχεια δείχνεται πως ένας τριδιαγώνιος πίνακας είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος. Επίσης θα πρέπει να πούμε ότι στην περίπτωση που είναι συμμετρικός εφαρμόζεται η θεωρία της SOR.

Αφού

$$L + U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

οι ιδιοτιμές του $L + U$ δίνονται από την

$$\mu_s = \frac{r}{1+r} \cos \frac{s\pi}{M}, \quad (s = 1(1)M - 1)$$

και

$$\mu_0 = \frac{r}{1+r} \cos \frac{\pi}{M}.$$

Από την (81) έχουμε ότι

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \left\{ 1 - \left(\frac{r}{1+r} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{M} \right\}^{1/2}}.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η βέλτιστη τιμή όταν η άμεση μέθοδος διαφορών που περιγράφεται στη συνέχεια χρησιμοποιείται για τη λύση της εξίσωσης διάχυσης-θερμότητας σε ένα διαδιάστατο χώρο στην ανοιχτή περιοχή $[0 \leq x_1, x_2 \leq 1] \times [t \geq 0]$

Λύση

Η μέθοδος διαφορών δίνεται από την

$$\frac{1}{k}(U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n) = \frac{1}{2h^2} \left\{ U_{i+1,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1} - 4U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 4U_{i,j}^n \right\}$$

η οποία δίνει

$$U_{i,j}^{n+1} - \frac{r}{2(1+r)} \left\{ U_{i+1,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1} \right\} = \text{γνωστές ποσότητες}$$

για το πλέγμα σημείων $x_1 = ih$, $x_2 = jh$, $t = (n+1)k$. Το σύνολο των εξισώσεων στα ενδιάμεσα σημεία του πλέγματος $1 \leq i, j \leq M-1$ τη χρονική στιγμή $t = (n+1)k$ οδηγεί στο

$$L + U = \frac{r}{2(1+2r)} \begin{bmatrix} D & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & D & I & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & D \end{bmatrix}$$

.... συνέχεια

όπου

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι τάξης $M - 1$, και I είναι μοναδιαίος πίνακας τάξης $M - 1$. Οι ιδιοτιμές του $L + U$ είναι

$$\mu_{p,q} = \frac{r}{1+2r} \left(\cos \frac{p\pi}{M} + \cos \frac{q\pi}{M} \right), \quad (p, q = 1(1)M-1)$$

και έτσι

$$\mu_0 = \frac{2r}{1+2r} \cos \frac{\pi}{M}$$

δίνει

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \left\{ 1 - \left(\frac{2r}{1+2r} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{M} \right\}^{1/2}}.$$

Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

Τελικά, κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί αν στην πράξη ο $I - L - U$ είναι ένας συμμετρικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας. Για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών σε μια ορθογώνια περιοχή, ο πίνακας έχει συχνά τις επιθυμητές ιδιότητες. Όμως, σε προβλήματα μεταβλητών παραμέτρων και σε μη ορθογώνιες περιοχές, οι απαιτήσεις δεν είναι σίγουρο ότι πληρούνται. Η *SOR* μέθοδος όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα με εμπειρικό τρόπο, είτε παίρνοντας προσεγγιστικές τιμές των μ_0 και ω_0 , είτε τρέχοντας το πρόβλημα σε υψηλής ταχύτητας υπολογιστή για μια συγκεκριμένη περιοχή τιμών του ω και επιλέγοντας την τιμή του ω η οποία δίνει γρηγορότερη σύγκλιση. Σε άλλη περίπτωση μπορεί η υπερεκτίμηση της $\rho(L + U)$ να έχει σαν αποτέλεσμα μια μικρή μείωση της ταχύτητας σύγκλισης σε σχέση με μια υποεκτιμώμενη τιμή της $\rho(L + U)$.

Block Επαναληπτικές Μέθοδοι

$$Au = b \quad (91)$$

$$\sum_{s=1}^q A_{r,s} U_s = B_s, s = 1, 2, \dots, q \quad (92)$$

$A_{r,s}$ σχηματίζεται αν από τον A διαγραφούν όλες οι γραμμές εκτός αυτών που βρίσκονται στο R_r και όλες οι στήλες εκτός αυτών που βρίσκονται στο R_s , όπου R_1, R_2, \dots, R_q groups.

Block Επαναληπτικές Μέθοδοι

Παράδειγμα:

$$Au = b, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad R_1 = \{1, 3\}, \quad R_2 = \{2\}$$

τότε

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix}, \quad U_{12} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = (\alpha_{21}, \alpha_{23}), \quad A_{22} = (\alpha_{22}), \quad U_2 = (u_2), \quad B_2 = (b_2)$$

$$A^{(\pi)} = D^{(\pi)} - C_L^{(\pi)} - C_U^{(\pi)}$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau(R^\pi)^{-1}(b^\pi - A^{(\pi)}u^{(n)}) \quad (93)$$

$$R(\pi) = D(\pi) \rightarrow \text{BJOR}$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau(D(\pi))^{-1}(b^\pi - A^{(\pi)}u^{(n)})$$

$$D(\pi)u^{(n+1)} = D(\pi)u^{(n)} + \tau b^{(\pi)} - \tau A^{(\pi)}u^{(n)}$$

$$D(\pi)u^{(n+1)} = (1 - \tau)D(\pi)u^{(n)} + \tau(C_L^{(\pi)} + C_U^{(\pi)})u^{(n)} + \tau b^{(\pi)} \quad (94)$$

$$D^{(\pi)}u \rightarrow A_{rr}U_r,$$

$$C_L^{(\pi)}u \rightarrow - \sum_{s=1}^{r-1} A_{rs}U_s, \quad (95)$$

$$C_U^{(\pi)}u \rightarrow - \sum_{s=r+1}^q A_{rs}U_s$$

Από τις (94) και (95) προκύπτει

$$A_{rr}U_r^{(n+1)} = (1 - \tau)A_{rr}U_r^{(n)} - \tau \sum_{s=1, s \neq r}^q A_{rs}U_s^{(n)} + \tau B_r, \quad r = 1, 2, \dots, q \quad (96)$$

Block Επαναληπτικές Μέθοδοι

$$R(\pi) = D(\pi) - \omega C_L^{(\pi)}, \quad \tau = \omega \rightarrow \text{BSOR}$$

Από την (93) έχουμε

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau(D(\pi) - \omega C_L^{(\pi)})^{-1}(b^{(\pi)} - A^{(\pi)}u^{(n)})$$

ή για $\tau = \omega$

$$(D(\pi) - \omega C_L^{(\pi)})u^{(n+1)} = (D(\pi) - \omega C_L^{(\pi)})u^{(n)} + \omega(b^{(\pi)} - A^{(\pi)}u^{(n)})$$

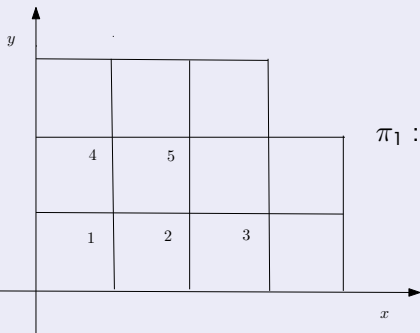
$$\text{ή } (D(\pi) - \omega C_L^{(\pi)})u^{(n+1)} = [(1 - \omega)D(\pi) - \omega C_U^{(\pi)}]u^{(n)} + \omega b^{(\pi)}$$

η οποία λόγω της (95) γράφεται:

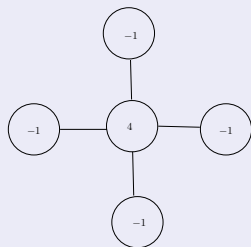
$$\begin{aligned} A_{rr}U_r^{(n+1)} &= -\omega \sum_{s=1}^{r-1} A_{rs}U_s^{(n+1)} + (1 - \omega)A_{rr}U_r^{(n)} \\ &\quad - \omega \sum_{s=r+1}^q A_{rs}U_s^{(n)} + \omega B_r, \quad r = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (97)$$

Block Επαναληπτικές Μέθοδοι

Παράδειγμα:



$$\pi_1 : R_1 = \{1, 2, 3\}$$
$$R_2 = \{4, 5\}$$



Block Επαναληπτικές Μέθοδοι

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mu\epsilon \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^{(\pi_1)} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad C_L^{(\pi_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_U^{(\pi_1)} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Block Επαναληπτικές Μέθοδοι

Για το παράδειγμά μας το (99) θα είναι

Για την πρώτη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Για τη δεύτερη γραμμή

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα (99) λύνεται με άμεση μέθοδο π.χ. LU και επειδή επαναλαμβάνεται η λύση του γι' αυτό οι L και U πίνακες υπολογίζονται μόνο μια φορά.

$$\varepsilon^{(n+1)} = B^{(\pi)} \varepsilon^{(n)}$$

$$\varepsilon^{(n+1)}(x, y) = B^{(\pi)} \varepsilon^{(n)}(x, y),$$

Β ο επαναληπτικός πίνακας της J , άρα

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n+1)}(x, y) = \frac{1}{4} \varepsilon^{(n+1)}(x+h, y) + \frac{1}{4} \varepsilon^{(n+1)}(x-h, y) + \frac{1}{4} \varepsilon^{(n)}(x, y+h) \\ + \frac{1}{4} \varepsilon^{(n)}(x, y-h) \end{aligned} \quad (100)$$

Για τον προσδιορισμό μιας ιδιοτιμής του $B^{(\pi)}$ και ενός ιδιοδιανύσματος \mathbf{u} , αναζητούμε έναν αριθμό μ και μια συνάρτηση $\mathbf{v}(x, y)$ η οποία μηδενίζεται στο S_h τέτοια ώστε:

$$\mu \mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{4} [\mu \mathbf{v}(x+h, y) + \mu \mathbf{v}(x-h, y) + \mathbf{v}(x, y+h) - \mathbf{v}(x, y-h)] \quad (101)$$

όπου $\varepsilon^{(n+1)}(x, y) = \mu \mathbf{v}(x, y)$ και $\varepsilon^{(n)}(x, y) = \mathbf{v}(x, y)$ στην (100).

Block Επαναληπτικές Μέθοδοι- Εφαρμογές

Από την (101) προκύπτει:

$$\mu_{pq} = \frac{\cos q\pi h}{2 - \cos q\pi h}, \quad p, q = 1, 2, \dots, h^{-1} - 1 \quad (102)$$

και

$$\mathbf{v}_{pq}(x, y) = \sin p\pi x \sin q\pi y \quad (103)$$

Συνεπώς,

$$\bar{\mu}^{\pi_1} = S(B^{(\pi_1)}) = \frac{\cos \pi h}{2 - \cos \pi h} \sim 1 - \pi^2 h^2$$

Θυμηθείτε ότι

$$\bar{\mu} = S(B) = \cos \pi h \sim 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2}$$

για τη σημειακή μέθοδο J .

Block Επαναληπτικές Μέθοδοι- Εφαρμογές

Συνεπώς, η ταχύτητα σύγκλισης της *line* J μεθόδου είναι περίπου διπλάσια της σημειακής J μεθόδου για μικρά h .

$$\begin{aligned}R(B_{LJ}) &\simeq 2R(B_J) \\R(\mathcal{L}_{LGS}) &\simeq 2R(\mathcal{L}_{GS}) \\R(\mathcal{L}_{LSOR}) &\simeq \sqrt{2}R(\mathcal{L}_{SOR})\end{aligned}\tag{104}$$

Για πολλαπλές γραμμές (k το πλήθος)

$$R(\mathcal{L}(k)_{LSOR}) \simeq \sqrt{2k}R(\mathcal{L}_{SOR})\tag{105}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F(x, y)u = G \quad (106)$$

$A, C > 0, F \leq 0$ για όλα τα $(x, y) \in R$.

Η διακριτοποίηση της (106) με τον τύπο των 5-σημείων παράγει την

$$H_0[u](x, y) + V_0[u](x, y) + E_0[u](x, y) = -h^2 G \quad (107)$$

όπου

$$\begin{aligned} H_0[u](x, y) = & [A(x + \frac{h}{2}, y) + A(x - \frac{h}{2}, y)]u(x, y) - A(x + \frac{h}{2}, y)u(x + h, y) \\ & + A(x - \frac{h}{2}, y)u(x - h, y) \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} V_0[u](x, y) = & [C(x, y + \frac{h}{2}) + C(x, y - \frac{h}{2})]u(x, y) - A(x + \frac{h}{2}, y)u(x + h, y) \\ & + A(x - \frac{h}{2}, y)u(x - h, y) \end{aligned}$$

Block Επαναληπτικές Μέθοδοι-ADI

$$E_0[u](x, y) = -h^2 F(x, y)u(x, y)$$

$$V_0[u](x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(A(x, y))\frac{\partial u}{\partial x}$$

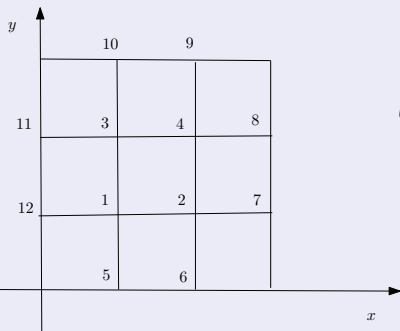
$$E_0[u](x, y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(C(x, y))\frac{\partial u}{\partial y}$$

Η (107) σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$Au = b, \tag{109}$$

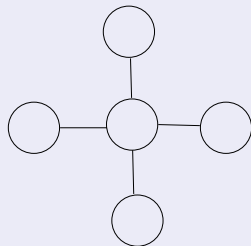
$$A = H_0 + V_0 + E_0$$

Παράδειγμα



$$u_{xx} + u_{yy} - u = 0$$

$$h = \frac{1}{3}$$



$$\begin{bmatrix} 4 + h^2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 + h^2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 + h^2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 + h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_5 + u_{12} \\ u_6 + u_7 \\ u_{10} + u_{11} \\ u_8 + u_9 \end{bmatrix} \quad (110)$$

Παράδειγμα

$$Au = (H_0 + V_0 + E_0)u = b$$

όπου

$$H_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad V_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E_0 = h^2 I \quad (111)$$

Θέτοντας

$$H = H_0 + \frac{1}{2}E_0 \text{ και } V = V_0 + \frac{1}{2}E_0 \quad (112)$$

έχουμε ότι $Au = b$ με

$$A = H + V \quad (113)$$

Παράδειγμα

Θυμηθείτε ότι

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau R^{-1}(b - Au^{(n)}) \quad (114)$$

Αν

$$R = (H + \rho I)(V + \rho' I) \quad (115)$$

τότε η (114) λόγω της (115) γράφεται

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \tau(V + \rho' I)^{-1}(H + \rho I)^{-1}(b - Au^{(n)}) \quad (116)$$

υποθέτωντας ότι οι πίνακες $V + \rho' I$ και $H + \rho I$ είναι μη ιδιάζοντες (και άρα υπάρχουν οι αντίστροφοί τους) για $\forall \rho \in R$.

Παράδειγμα

Ακολουθώντας παρόμοια εργασία, όπως για την PSD μέθοδο, λαμβάνουμε από την (116) διαδοχικά τα ακόλουθα

$$(H + \rho I)u = b - (V - \rho I)u$$

$$(V + \rho' I)u = b - (H - \rho' I)u$$

$$\text{ή } (H + \rho_{n+1} I)u^{(n+\frac{1}{2})} = b - (V - \rho_{n+1} I)u^{(n)}$$

$$(V + \rho'_{n+1} I)u^{(n+1)} = b - (H - \rho'_{n+1} I)u^{(n+\frac{1}{2})}$$

$$\text{ή } u^{(n+1)} = T_{\rho\rho'} u^{(n)} + k, \rho_{n+1} = \rho, \rho'_{n+1} = \rho'$$

όπου

$$T_{\rho\rho'} = (V + \rho' I)^{-1} (H - \rho' I) (H + \rho I)^{-1} (V - \rho I)$$

$$k = (\rho + \rho') (V + \rho' I)^{-1} (H + \rho I)^{-1}$$

$$\text{ή } T_{\rho\rho'} = I - \underbrace{(\rho + \rho')}_{\tau} \underbrace{(V + \rho I)(H + \rho I)^{-1}}_{R^{-1}} A$$

Άσκηση 1

Η συνάρτηση ϕ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 = 0$$

σε κάθε σημείο εσωτερικά του τετραγώνου που ορίζεται από τις ευθείες $x = \pm 1, y = \pm 1$, και 0 στην περίμετρο. Υπολογίστε τη λύση πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας ένα τετράγωνο πλέγμα (square mesh) πλευράς $\frac{1}{2}$. Υποθέτοντας ότι το discretization λάθος διακριτοποίησης είναι ανάλογο του h^2 υπολογίστε την τιμή της ϕ στο σημείο $(0, 0)$. (Η αναλυτική λύση είναι 0.589)

Άσκηση 1 - Λύση

Λόγω της συμμετρίας υπάρχουν μόνο τρεις άγνωστοι:

ϕ_1 στο $(0, 0)$, ϕ_2 στο $(\frac{1}{2}, 0)$, ϕ_3 στο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Οι εξισώσεις είναι:

$$8\phi_2 - 8\phi_1 + 1 = 0$$

$$4\phi_3 + 2\phi_1 - 8\phi_2 = 1 = 0$$

$$4\phi_2 - 8\phi_3 + 1 = 0$$

και δίνουν $\phi_1 = 0.562$, $\phi_2 = 0.438$ και $\phi_3 = 0.344$ στο τρισδιάστατο χώρο.

Ένα coarse πλέγμα πλευράς $h = 1$ δίνει την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών

$$-4\phi_1 + 2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0.5$$

Συνεπώς η μέθοδος (deferred approach to the limit) δίνει μια βελτιωμένη τιμή της $\phi_1 = 0.562 + \frac{1}{3}(0.062) = 0.583$, η οποία είναι πολύ κοντά στην αναλυτική λύση 0.589 σε αντίθεση με την λύση του crude πλέγματος πλευράς $h = 1$.

Άσκηση 2

Η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 32u = 0$$

σε κάθε εσωτερικό σημείο του τετραγώνου $x = \pm 1, y = \pm 1$, και υπόκεινται στις εξής συνοριακές συνθήκες

- $u = 0$ στο $y = 1, -1 \leq x \leq 1$,
- $u = 1$ στο $y = -1, -1 \leq x \leq 1$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}u$ στο $x = 1, -1 < y < 1$,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}u$ στο $x = -1, -1 < y < 1$.

Θεωρήστε τετράγωνο πλέγμα πλευράς $\frac{1}{4}$ και ονοματίστε τα σημεία με συντεταγμένες

$(0, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (1, \frac{3}{4}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \dots$ ως $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$.

Άσκηση 2 (συν.)

Χρησιμοποιώντας την πιο απλή φόρμουλα κεντρικών διαφορών, δείξτε ότι οι τριανταπέντε εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών που προσεγγίζουν αυτό το πρόβλημα μπορούν να γραφτούν σε μορφή πίνακα ως εξής

$$Au = b,$$

όπου

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{34} \\ u_{35} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2 (συν.)

και

$$A = \begin{bmatrix} B & I & & & & & & & \\ & I & B & & & & & & \\ & & I & B & & & & & \\ & & & I & B & & & & \\ & & & & I & B & & & \\ & & & & & I & B & & \\ & & & & & & I & B & \\ & & & & & & & I & B \end{bmatrix}$$

όπου

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & & & & & & & \\ & 1 & -6 & & & & & & \\ & & 1 & -6 & & & & & \\ & & & 1 & -6 & & & & \\ & & & & 1 & -6 & & & \\ & & & & & 2 & -6 & & \end{bmatrix} \text{ και } I = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2 (συν.)

Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της εξίσωσης $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2H(u-u_0)}{KD} = 0$, η οποία αποφασίζει την σταθερή θερμοκρασία των σημείων μιας λεπτής πλάκας που ακτινοβολεί θερμότητα από την επιφάνειά της σε ένα μέσο σε θερμοκρασία u_0 . Το D αναπαριστά την πυκνότητα της, το K την θερμική αγωγιμότητά της και το H την αγωγιμότητα της επιφάνειάς της.

Άσκηση 3

Η αργή σταθερή κίνηση παχύρρευστου υγρού που ρέει σε έναν κυλινδρικό σωλήνα, του οποίου η διατομή είναι η επιφάνεια S που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη C , μπορεί να υπολογιστεί από μια συνάρτηση ψ που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλα τα σημεία της S και ισούται με $\frac{1}{2}r^2$ στην καμπύλη C , όπου (r, θ) οι κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο της S . Υπολογίστε λύση πεπερασμένων διαφορών για τη ροή μέσω ενός κυκλικού τομέα που ορίζεται από τις γραμμές $\theta = 0, \theta = 0.8$ ακτίνια, και τον κύκλο $r = 1$, στα σημεία του πλέγματος που προσδιορίζονται από $r = \frac{1}{3}i, (i = 1, 2), \theta = 0.2j, (j = 1, 2, 3)$.

Άσκηση 3 - Λύση

Το πρόβλημα είναι συμμετρικό για $\theta = 0.4$, οπότε υπάρχουν τέσσερεις άγνωστοι, ψ_1 στο $(\frac{1}{3}, 0.2)$, ψ_2 στο $(\frac{1}{3}, 0.4)$, ψ_3 στο $(\frac{2}{3}, 0.2)$, ψ_4 στο $(\frac{2}{3}, 0.4)$. Οι οριακές τιμές, και οι κυλινδρικές συντεταγμένες της εξίσωσης Laplace, δίνουν τις εξής εξισώσεις

$$-52\psi_1 + 25\psi_2 + \frac{1}{2}\psi_3 + 1\frac{7}{18} = 0,$$

$$50\psi_1 - 52\psi_2 + 1\frac{1}{2}\psi_4 + \quad = 0,$$

$$\frac{3}{4}\psi_1 - 14\frac{1}{2}\psi_3 + 6\frac{1}{4}\psi_4 + 2\frac{1}{72} = 0,$$

$$\frac{3}{4}\psi_2 + 12\frac{1}{2}\psi_3 - 14\frac{1}{2}\psi_4 + \frac{5}{8} = 0$$

Η λύση τους είναι

$$\psi_1 = 0.0705, \psi_2 = 0.0756, \psi_3 = 0.2591, \psi_4 = 0.2704.$$

Άσκηση 4

Η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace σε κάθε σημείο στο εσωτερικό του κυκλικού τομέα που οριοθετείται από τις ευθείες γραμμές $\theta = 0$, $\theta = (m+1)\delta\theta$, και τον κύκλο $r = n\delta r$, όπου n, m ακέραιοι. Επίσης, είναι γνωστές τιμές κατα μήκος αυτών των ακτινών καθώς και η παράγωγος $\partial u/\partial r$, στην παράμετρο του κύκλου. Όταν η παράγωγος αυτή αναπαρίσταται από τη φόρμουλα κεντρικών διαφορών $(u_{n+1,j} - u_{n-1,j})/2\delta r$, δείξτε ότι οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών μπορούν να γραφτούν ως

$$\begin{bmatrix} B_1 & (1 + \frac{1}{2})I & & & & \\ (1 - \frac{1}{4})I & B_2 & (1 + \frac{1}{2})I & & & \\ & (1 - \frac{1}{6})I & B_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (1 - \frac{1}{2(n-1)})I & B_{n-1} & (1 + \frac{1}{2(n-1)})I & & \\ & & 2I & B_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4 (συν.)

όπου

$$u_r = \begin{bmatrix} u_{r,1} \\ u_{r,2} \\ u_{r,3} \\ \vdots \\ u_{r,m} \end{bmatrix},$$

b_1, b_2, \dots , είναι γνωστά διανύσματα στήλες που προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες, I είναι ο μοναδιαίος πίνακας τάξης m , και B_p ο ίδιος τετράγωνος πίνακας τάξης m που δόθηκε σε προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 4 - Λύση

Γράψτε τις εξισώσεις πεεπρασμένων διαφορών που προσεγγίζουν την εξίσωση Laplace για $i = 1(1)(n - 1), j = 1(1)m$. Διατηρήστε τα τελευταία μπλοκ των m εξισώσεων εξαλείφοντας την τιμή u_{n+1} μεταξύ της φόρμουλας της παραγώγου και της εξίσωσης διαφορών για $i = n$.

Άσκηση 5

Ο χώρος λύσεων για τη δισδιάστατη εξίσωση Laplace $\nabla^2\phi = 0$ είναι η περιοχή που οριοθετείται από την κλειστή καμπύλη C κατά την οποία είναι γνωστές οι τιμές της ϕ . Αντλήστε τη φόρμουλα για το υπόλοιπο στο σημείο του πλέγματος O , όταν η καμπύλη C τέμνει και τις δύο κάθετες γραμμές του πλέγματος μήκους h που διέρχονται από το O .

Ένα ημικυκλικό έλασμα με ακτίνα $2h$, και ομοιόμορφη αγωγιμότητα, διατηρεί τη διάμετρό του σε θερμοκρασία 0°C και τη περιφέρειά του σε θερμοκρασία 100°C . Υπολογίστε τη λύση πεπερασμένων διαφορών στη κατάσταση που η θερμοκρασία είναι σταθερή στα κομβικά σημεία του πλέγματος πλευράς h .

Άσκηση 5 - Λύση

$$\theta = \sqrt{3} - 1.$$

$$R_A = \frac{400}{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{3}} + \frac{2\phi_B}{\sqrt{3}} - \frac{4\phi_A}{\sqrt{3} - 1},$$

$$R_B = 2\phi_A + 100 - 4\phi_B \cdot R_A = R_B = 0 \Rightarrow \phi_A = 70.5^\circ, \phi_B = 60.2^\circ.$$

Παρόλο που αυτό το πλέγμα χρησιμοποιείται για να παράξει μια απλά άσκηση, στην πραγματικότητα δίνει σωστά τις θερμοκρασίες με απόκλιση 1° . Η αναλυτική λύση του προβλήματος με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών, και σε όρους πολικών συντεταγμένων (r, θ) , είναι

$$\phi = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \left(\frac{r}{2h}\right)^{2n-1} \sin(2n-1)\theta,$$

και δίνει $\phi_A = 70.5^\circ, \phi_B = 59^\circ$.

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι το σφάλμα αποκοπής της εξίσωσης της πέντε-σημείων φόρμουλας πεπερασμένων διαφορών που προσεγγίζει την εξίσωση Laplace στο σημείο (x_i, y_j) , για ένα τετράγωνο πλέγμα πλευράς h , μπορεί να γραφτεί

$$\frac{1}{12}h^2\left\{\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\xi, y_j) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x_i, \eta)\right\},$$

όπου

$$x_i - h < \xi < x_i + h, \quad y_j - h < \eta < y_j + h$$

και θεωρείται ότι η πρώτη, δεύτερη, τρίτη και τέταρτη μερική παράγωγος του u ως προς το x και y είναι συνεχείς σε αυτά τα διαστήματα αντίστοιχα.

Άσκηση 6 - Λύση

$$T = u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} - \left(\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \right).$$

Από το ανάπτυγμα Taylor

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{1}{24} h^4 \frac{\partial^4 u_{\xi_1, \gamma_1}}{\partial x^4},$$

όπου

$$x_i < \xi_1 < x_i + h, \text{ κτλ}$$

Άσκηση 7

Η ελλειπτική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

ικανοποιείται από την συνάρτηση u σε κάθε σημείο στην επιφάνεια S .

Αποδείξτε ότι μια μη σταθερή τιμή της u δεν μπορεί να πάρει ένα θετικό μέγιστο ή ένα αρνητικό ελάχιστο στο εσωτερικό της S όταν η f είναι αρνητική.

Άσκηση 7 - Λύση

Έστω ότι η u έχει θετικό μέγιστο στο σημείο P στην S . Τότε στο σημείο P θα ισχύει

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0$$

Συνεπώς, το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι αρνητικό, πράγμα το οποίο σημαίνει πως η u δεν μπορεί να είναι η λύση. Όμοια αποδεικνύεται και για αρνητικό ελάχιστο.

Άσκηση 8

Θεωρείστε τις εξισώσεις (5.5 ;;;) για S_1 , S_2 και S_3 . Αποδείξτε ότι

- 1 $\nabla^2 u_0 = \frac{4S_1 + S_2 - 20u_0}{6h^2} - \frac{1}{12}h^2 \nabla^4 u_0 - \frac{1}{180}h^4 \left(\frac{1}{2} \nabla^6 u_0 + \mathcal{D}^4 \nabla^2 u_0 \right) + O(h^6)$
- 2 $\nabla^4 u_0 = \frac{1}{h^4} (S_3 + 2S_2 - 8S_1 + 20u_0) + O(h^2)$.

Άσκηση 9

Χρησιμοποιείτε την 8(a) να αποδείξετε ότι όταν η f είναι σταθερή, η εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 u + f = 0,$$

μπορεί να αναπασρασταθεί στο κεντρικό σημείο $'O'$, από την εννέα-σημειών εξίσωση πεπερασμένων διαφορών

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} u + 6h^2 f = 0$$

και το λάθος αποκοπής είναι της τάξης h^6 .

Χρησιμοποιείτε το αποτέλεσμα για να λύσετε την άσκηση 1, το πρόβλημα τρέψης για ένα τετράγωνο τμήμα.

Άσκηση 9 - Λύση

Σύμφωνα με το συμβολισμό της άσκησης 1 οι εξισώσεις είναι

$$\phi_1 + 8\phi_2 - 20\phi_3 + 3 = 0,$$

$$4\phi_1 - 18\phi_2 + 8\phi_3 + 3 = 0,$$

$$-20\phi_1 + 16\phi_2 + 4\phi_3 + 3 = 0.$$

Οπότε

$$\phi_1 = 0.590,$$

$$\phi_2 = 0.459,$$

$$\phi_3 = 0.363$$

στον τρισδιάστατο χώρο. Δεδομένου ότι η αναλυτική λύση για την ϕ_1 είναι 0.589, προκύπτει ότι η φόρμουλα εννέα σημείων δίνει μια πολύ καλή σε ακρίβεια λύση σε αυτή τη περίπτωση.

Άσκηση 10

Η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλα τα σημεία στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος και έχει συνοριακές συνθήκες που απεικονίζονται. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο SOR για να υπολογίσετε μια λύση με περιθώριο λάθους ± 2 .

Άσκηση 11

Η συνάρτηση u ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλα τα σημεία στο τετράγωνο του παραπάνω σχήματος και έχει συνοριακές συνθήκες που απεικονίζονται. Χρησιμοποιείτε την μέθοδο SOR για να υπολογίσετε μια λύση με περιθώριο λάθους ± 2 . (Εκμεταλλευτείτε την διαγώνιο συμμετρία και χρησιμοποιείτε μόνο το μισό σχήμα)

Άσκηση 12

Η συνάρτηση ροής γ για σταθερή αστρόβιλη ροή δυο διαστάσεων, παράλληλη του επιπέδου xOy , ενός ασυμπίεστου ιδεατού υγρού, ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε όλα τα σημεία εσωτερικά του πεδίου της ροής. Υπολογίστε μια αριθμητική λύση με περιθώριο λάθους ± 2 στα κομβικά σημεία τετράγωνου πλέγματος πλευράς $\frac{1}{4}$, για τη ροή μέσα από το κανάλι που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Δίνεται ότι η $ABCD$ είναι η $\gamma = 0$, η EFG είναι η $\gamma = 1$ και το γ μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος των AE και GD .

Άσκηση 13

Στο σχήμα 5.23 η περιοχή που ορίζουν οι $ABCD$, $EFGH$ αντιπροσωπεύει το ένα τέταρτο της διατομής ενός παχύ σωλήνα, η οποία είναι συμμετρική ως προς τις OA , OD . Η συνάρτηση ϕ είναι 0 έξω από τα όρια, 1 στα όρια και ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 = 0$$

κάθε εσωτερικό σημείο. Υπολογίστε μια λύση πεπερασμένων διαφορών με περιθώριο λάθους ± 2 , στα κομβικά σημεία ενός τετράγωνου πλέγματος πλευράς $\frac{1}{4}$.

Άσκηση 14

Μια συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε κάθε εσωτερικό σημείο ενός τετραγώνου που ορίζεται από τις ευθείες $x \pm 1, y \pm 1$, έχει γνωστές συνοριακές τιμές και είναι συμμετρική ως προς την Ox και Oy . Γράψτε τις πιο απλές εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών που δίνουν μια προσεγγιστική λύση στα κομβικά σημεία τετράγωνου πλέγματος πλευράς $\frac{1}{4}$. Αποδείξτε ότι οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel συγκλίνουν. Επίσης επιβεβαιώστε ότι ο ασυμπτωτικός ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου Gauss-Seidel είναι διπλάσιος της Jacobi.

Άσκηση 14 - Λύση

Έστω a, b, c οι τιμές στα σημεία $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών σε αυτά τα σημεία είναι

$$a - b = \text{σταθερά}$$

$$-\frac{1}{4}a + b - \frac{1}{2}c = \text{σταθερά}$$

$$-\frac{1}{2}b + c = \text{σταθερά}$$

Ο πίνακας των συντελεστών είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = I - (L + U) = I - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 14 - Λύση (συν.)

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $L + U$ της μεθόδου Jacobi δίνονται από την λύση της εξίσωσης

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda(\lambda^2 - \frac{1}{2}).$$

Οπότε η φασματική ακτίνα $\rho(J)$ είναι $1/\sqrt{2} < 1$, οπότε υπάρχει σύγκλιση.
Ο επαναληπτικός πίνακας της Gauss-Seidel είναι

$$\begin{aligned} (I - L)^{-1}U &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άσκηση 14 - Λύση (συν.)

Οι ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα της Gauss-Seidel δίνονται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4} - \lambda) & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & (\frac{1}{4} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2(\lambda - \frac{1}{2}).$$

Οπότε η φασματική ακτίνα $\rho(G)$ είναι $1/\sqrt{2} < 1$, οπότε υπάρχει σύγκλιση. Δεδομένου ότι ο ασυμπτωτικός ρυθμός σύγκλισης προκύπτει από το υπόλοιπο του λογαρίθμου της φασματικής ακτίνας, βγαίνει το αποτέλεσμα.