Αδιάσπαστοι, p-κυκλικοί, συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες και γραφήματα

Νικόλαος Μισυρλής

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

19 Δεκεμβρίου 2018

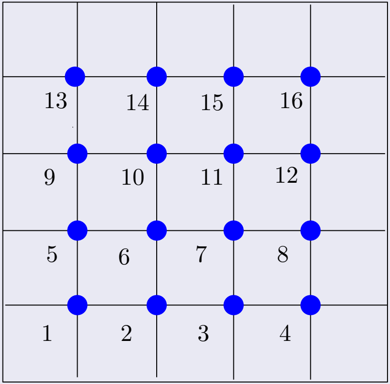
Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Φυσική διάταξη

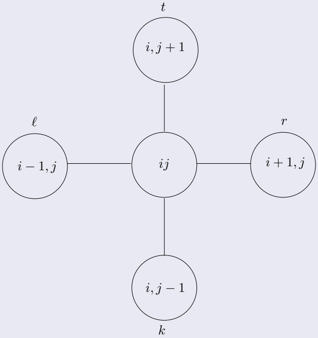
$$\Delta u - f(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

στο $\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \ell_1, 0 \leq y \leq \ell_2 \}$.



Φυσική διάταξη

$$u_{ij} = l_{ij}u_{i-1,j} + r_{ij}u_{i+1,j} + t_{ij}u_{i,j+1} + b_{ij}u_{i,j-1} \qquad (2)$$



$$l_{ij} = \frac{k^2}{2(k^2+h^2)}\left(1 + \frac{1}{2}hf_{ij}\right), \quad r_{ij} = \frac{k^2}{2(k^2+h^2)}\left(1 - \frac{1}{2}hf_{ij}\right),$$

$$t_{ij} = \frac{k^2}{2(k^2+h^2)}\left(1 - \frac{1}{2}kg_{ij}\right), \quad b_{ij} = \frac{k^2}{2(k^2+h^2)}\left(1 + \frac{1}{2}kg_{ij}\right),$$

Φυσική διάταξη

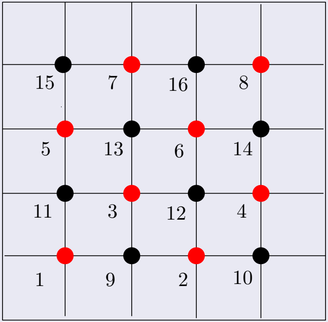
$$Au = b \tag{3}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & T_1 & & & 0 & \\ B_2 & M_2 & T_2 & & & \\ & B_3 & M_3 & T_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & B_{N-1} & M_{N-1} & T_{N-1} \\ & 0 & & & B_N & M_N \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Κόκκινη-Μαύρη διάταξη

Κόκκινη-Μαύρη διάταξη - Παραλληλία.



$$Au = b$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & F \\ E & D_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

- D_1, D_2 τετραγωνικοί διαγώνιοι.

Αδιάσπαστοι πίνακες

Ορισμός

Για $n \geq 2$, ο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγεται διασπάσιμος (reducible) αν υπάρχει ένας $n \times n$ μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \tag{6}$$

όπου A_{11} είναι ένας $r \times r$ υποπίνακας και A_{22} είναι ένας $(n-r) \times (n-r)$ υποπίνακας, με $1 \leq r < n$.
Αν δεν υπάρχει τέτοιος μεταθετικός πίνακας τότε ο A λέγεται αδιάσπαστος (irreducible).

Αδιάσπαστοι πίνακες

Η έννοια της διάσπασης είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς το αρχικό σύστημα μπορεί να μετασχηματιστεί στο $Au = k$, όπου $A = PAP^T$ είναι της μορφής (6). Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\begin{array}{rcrcl} A_{11}u_1 & + & A_{12}u_2 & = & k_1 \\ & & A_{22}u_2 & = & k_2 \end{array} \qquad (7)$$

οπότε το αρχικό σύστημα υποβιβάζεται σε δύο μικρότερης τάξης συστήματα, τα οποία διατηρούν μεταξύ τους τη σχέση των εξισώσεων με τους αγνώστους και μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα από το αρχικό σύστημα.

Αδιάσπαστοι πίνακες και Γραφήματα

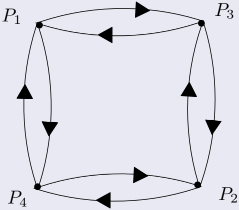
Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος κόμβων (P_i, P_j), υπάρχει ένα μονοπάτι από τον P_i στον P_j και από τον P_j στον P_i. Δηλαδή, οι κόμβοι P_i και P_j βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο.

Παράδειγμα

$$B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$G(B)$

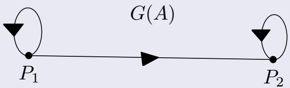


Το παραπάνω κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό, γιατί για κάθε ζεύγος κόμβων υπάρχει ένα μονοπάτι.

Αδιάσπαστοι πίνακες και Γραφήματα

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Το παραπάνω κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό διότι δεν υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο P_2 προς τον κόμβο P_1.

Αδιάσπαστοι πίνακες και Γραφήματα

Θεώρημα

Ένας πίνακας A τάξης n είναι αδιάσπαστος αν και μόνο αν το κατευθυνόμενο γράφημα του G(A) είναι ισχυρά συνεκτικό.

Σημείωση

Όταν ένας πίνακας είναι αδιάσπαστος, όλα τα εκτός της διαγωνίου του στοιχεία σε κάθε γραμμή ή στήλη του πίνακα δεν είναι μηδενικά.

p-κυκλικοί πίνακες

Ορισμός

Έστω $A \geq 0$ ένας αδιάσπαστος $n \times n$ πίνακας και k το πλήθος των ιδιοτιμών του A με μέτρο $\rho(A)$. Αν $k = 1$, τότε ο A λέγεται πρωτεύων. Αν $k > 1$, τότε ο A λέγεται κυκλικός με δείκτη k.

Ορισμός

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη k (> 1) αν υπάρχει ένας μεταθετικός $n \times n$ πίνακας P τέτοιος ώστε ο PAP^T να είναι της μορφής

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A_{1,k} \\ A_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{k,k-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

όπου οι μηδενικοί διαγώνιοι υποπίνακες είναι τετραγωνικοί.

Η (8) είναι η κανονική μορφή ενός αδιάσπαστου $n \times n$ πίνακα $A \geq 0$, ο οποίος είναι κυκλικός με δείκτη $k(> 1)$.

p-κυκλικοί πίνακες-Γραφήματα

Θεώρημα

Έστω $A = (a_{ij}) \geq 0$ ένας αδιάσπαστος $n \times n$ πίνακας και $G(A)$ το κατευθυνόμενο γράφημά του. Για κάθε κόμβο P_i του $G(A)$, θεωρούμε όλα τα κλειστά μονοπάτια (κύκλους) που συνδέουν το P_i με τον εαυτό του. Αν S_i είναι το σύνολο όλων των μηκών m_i αυτών των κλειστών μονοπατιών και k_i είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) των μηκών, δηλαδή

$$k_i = \text{ΜΚΔ}_{m_i \in S_i}\{m_i\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Τότε, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = k$, όπου $k = 1$ όταν ο A είναι πρωτεύων, και $k > 1$ όταν ο A είναι κυκλικός με δείκτη k.

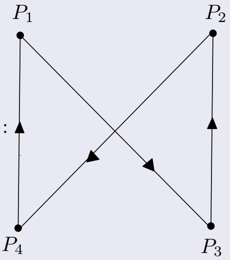
p-κυκλικοί πίνακες-Γραφήματα

Παράδειγμα

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει το κατευθυνόμενο γράφημα

$G(B_1)$:



Παρατηρούμε ότι για το γράφημα $G(B_1)$ ισχύει ότι

$$k_1 = \text{ΜΚΔ}\{4, 8, 12, \dots\} = 4,$$

οπότε ο πίνακας B_1 είναι κυκλικός με δείκτη 4. Παρατηρήστε ότι και

$$k_2 = k_3 = k_4 = 4$$

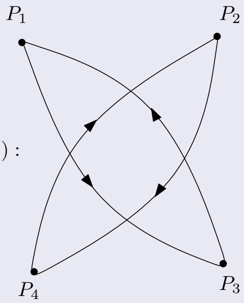
p-κυκλικοί πίνακες-Γραφήματα

Παράδειγμα

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει το κατευθυνόμενο γράφημα

$G(B_2)$:



Παρατηρούμε ότι το γράφημα $G(B_2)$ είναι μη συνεκτικό διότι δεν υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει τους κόμβους P_1, P_3 με τους κόμβους P_2, P_4 και αντίστροφα, με αποτέλεσμα ο πίνακας B_2 να είναι μη κυκλικός.

p-κυκλικοί πίνακες

Ορισμός

Αν G είναι ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα, τότε το G είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη $k > 1$, ή ένα πρωτεύων γράφημα αν ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης όλων των μηκών των κύκλων του είναι, αντίστοιχα, $k > 1$ ή $k = 1$.

p-κυκλικοί πίνακες

Έστω το γραμμικό σύστημα (3), όπου ο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geq 2$, ο οποίος έχει διαμερισθεί στην ακόλουθη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

όπου κάθε διαγώνιος υποπίνακας $A_{i,i}$ $(1 \leq i \leq N)$ είναι τετραγωνικός. Υποθέτουμε ότι οι διαγώνιοι υποπίνακες $A_{i,i}$ $(1 \leq i \leq N)$ είναι μη ιδιάζοντες. Θεωρούμε ότι ο πίνακας των συντελεστών A αναλύεται ως ακολούθως

$$A = D - C_L - C_U, \tag{10}$$

και ο κατά ομάδες Jacobi πίνακας του A που αντιστοιχεί στη διαμέριση (9) είναι ο

$$B = I - D^{-1}A = L + U \tag{11}$$

όπου $L = D^{-1}C_L$ και $U = D^{-1}C_U$. Ο D είναι μη ιδιάζων αφού οι $A_{i,i}$ $(1 \leq i \leq N)$ είναι μη ιδιάζοντες.

p-κυκλικοί πίνακες

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ακόλουθοι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & & & \mathbf{0} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2.3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & A_{N-1,N} \\ \mathbf{0} & & & A_{N,N-1} & A_{N,N} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B_{1,p} \\ B_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{3,2} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} & & & \mathbf{0} \\ B_{2,1} & 0 & B_{2,3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B_{N-1,N} \\ \mathbf{0} & & & B_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $p \geq 2$.
Ο πίνακας B_1 είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p.

Ο πίνακας B_2 με κατάλληλη μετάθεση των ομάδων του είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη $p = 2$.

p-κυκλικοί πίνακες

Ορισμός

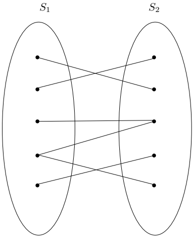
Αν ο κατά ομάδες πίνακας Jacobi B της (11) του πίνακα A της (9) είναι ασθενώς κυκλικός με δείκτη p (≥ 2), τότε ο A είναι $p-$κυκλικός, σε σχέση με τη διαμέριση (9).

Σημείωση

Αν οι διαγώνιοι υποπίνακες $A_{i,i}$ της (9) είναι 1×1 πίνακες, τότε ο πίνακας Jacobi είναι ασθενώς δικυκλικός και κατά συνέπεια προκύπτει ότι ο πίνακας A είναι δικυκλικός. Ισοδύναμα, θα λέμε ότι ο πίνακας A έχει την ιδιότητα A. (Young)

p-κυκλικοί πίνακες - Ιδιότητα A

Το γράφημα ενός δικυκλικού πίνακα είναι διμερές (bipartite).



Ο έλεγχος αν ένα γράφημα είναι διμερές χρησιμοποιεί την Οριζόντια διερεύνηση και βασίζεται στο γεγονός ότι δεν μπορεί να περιέχει κύκλο περιττού μήκους.

p-κυκλικοί πίνακες - Ιδιότητα A

Αξίζει να σημειωθεί ότι επιλέγοντας το N=2 στην (9), ο πίνακας B της (11) είναι της μορφής

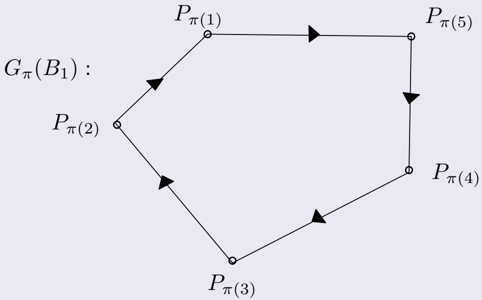
$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,2} \\ B_{2,1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

δηλαδή είναι ένας ασθενώς κυκλικός πίνακας με δείκτη 2. Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε διαμέριση του πίνακα A της (9) με N=2, για την οποία οι διαγώνιοι υποπίνακες είναι μη ιδιάζοντες, είναι τέτοια ώστε ο πίνακας A να είναι δικυκλικός.

p-κυκλικοί πίνακες - Γραφήματα

Παράδειγμα 1

Κυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα με δείκτη $p = 5$ του πίνακα B_1.

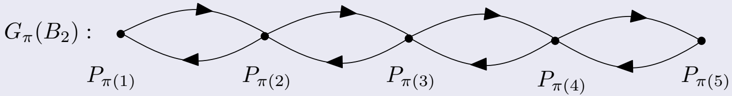


Έχει ΜΚΔ=5, οπότε είναι ένα κατά ομάδες κατευθυνόμενο γράφημα το οποίο είναι κυκλικό με δείκτη 5.

p-κυκλικοί πίνακες - Γραφήματα

Παράδειγμα 2

Το κατά ομάδες κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα B_2 για $p = 2$



Έχει ΜΚΔ=2, οπότε είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη 2.

Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες

Θεώρημα

Έστω ότι το κατά ομάδες (block) κατευθυνόμενο γράφημα του διαμερισμένου πίνακα Jacobi B της (11) είναι ισχυρά συνεκτικό. Τότε ο πίνακας A της (9) είναι p-κυκλικός αν το κατά ομάδες (block) κατευθυνόμενο γράφημα του πίνακα B είναι ένα κυκλικό γράφημα με δείκτη p.

Ορισμός

Αν ο πίνακας A της (9) είναι $p-$κυκλικός, τότε ο A είναι συνεπώς διατεταγμένος (consistently ordered) αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$B(a) = aL + a^{-(p-1)}U \tag{13}$$

που προκύπτει από τον κατά ομάδες πίνακα Jacobi B της (11), είναι ανεξάρτητες του a, για $a \neq 0$. Ο πίνακας B θα λέγεται επίσης συνεπώς διατεταγμένος. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση οι πίνακες A και B είναι μη συνεπώς διατεταγμένοι.

Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες

Για το παράδειγμα του πίνακα A_1 έχουμε σύμφωνα με την (13), ότι

$$B_1(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a^{-(p-1)}B_{1,p} \\ aB_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & aB_{3,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & aB_{p,p-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

και με απλούς πολλαπλασιασμούς πινάκων έχουμε ότι

$$B_1^p(a) = B_1^p$$

για όλα τα $a \neq 0$, δηλαδή, οι ιδιοτιμές του $B_1(a)$ είναι ανεξάρτητες του a. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας A_1 είναι ένας $p-$κυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας.

Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες

Για το παράδειγμα του πίνακα A_2 έχουμε ότι

$$B_2(a)x = \lambda x \tag{15}$$

όπου $x \neq 0$. Η (15) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$aB_{j,j-1}X_{j-1} + \frac{1}{a}B_{j,j+1}X_{j+1} = \lambda X_j, \quad 1 \leq j \leq N \tag{16}$$

όπου $B_{1,0}$ και $B_{N,N+1}$ είναι μηδενικοί πίνακες. Για $Z_j = \frac{1}{a^{j-1}}X_j, \ 1 \leq j \leq N$, η (16) λαμβάνει τη μορφή

$$B_{j,j-1}Z_{j-1} + B_{j,j+1}Z_{j+1} = \lambda Z_j, \ 1 \leq j \leq N. \tag{17}$$

Συνεπώς, κάθε ιδιοτιμή λ του $B_2(a)$ είναι για $a \neq 0$, ιδιοτιμή και του B_2 αποδεικνύοντας έτσι ότι ο πίνακας A_2 είναι ένας δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας.

Συμπέρασμα

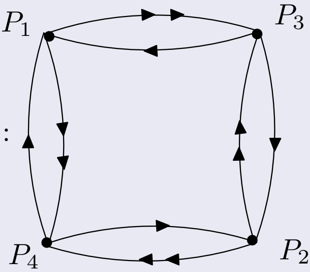
Κάθε κατά ομάδες τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής (18), με μη ιδιάζοντες διαγώνιους υποπίνακες, είναι ένας δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος πίνακας.

Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες

Παράδειγμα

$$B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{G}(B)$:



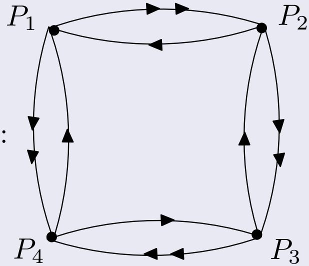
Σχήμα: Γράφημα δικυκλικού και συνεπώς διατεταγμένου πίνακα

Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες

Παράδειγμα

$$B_\phi = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

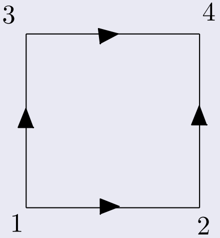
$\hat{G}(B_\phi)$:



Σχήμα: Γράφημα δικυκλικού μη συνεπώς διατεταγμένου πίνακα

Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες - Γραφήματα

Παράδειγμα



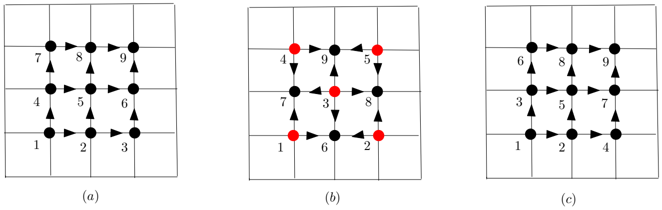
Σχήμα: Πλέγμα τεσσάρων σημείων

Παρατήρηση

Ακολουθώντας τη φορά $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ έχουμε δύο τόξα με φορά ίδια με αυτή των δεικτών του ρολογιού και δύο τόξα με φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού. Επομένως ο πίνακας του συστήματος που προκύπτει από αυτά τα 4 σημεία του πλέγματος, είναι συνεπώς διατεταγμένος.

Συνεπώς διατεταγμένοι πίνακες - Γραφήματα

Στο ακόλουθο σχήμα παρατηρείται ότι ο πίνακας που προκύπτει από την φυσική διάταξη, την κόκκινη μαύρη διάταξη και την κατά διαγωνίους διάταξη των σημείων του πλέγματος είναι δικυκλικός συνεπώς διατεταγμένος.



Σχήμα: (a) Φυσική διάταξη (b) Κόκκινη μαύρη διάταξη (c) Κατά διαγωνίους διάταξη

Συμπέρασμα

Οι διατάξεις εκείνες που παράγουν συνεπώς διατεταγμένους πίνακες είναι οι βέλτιστες.

Βιβλογραφία

- R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- D. M. Young, Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, New York, 1971.