Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός

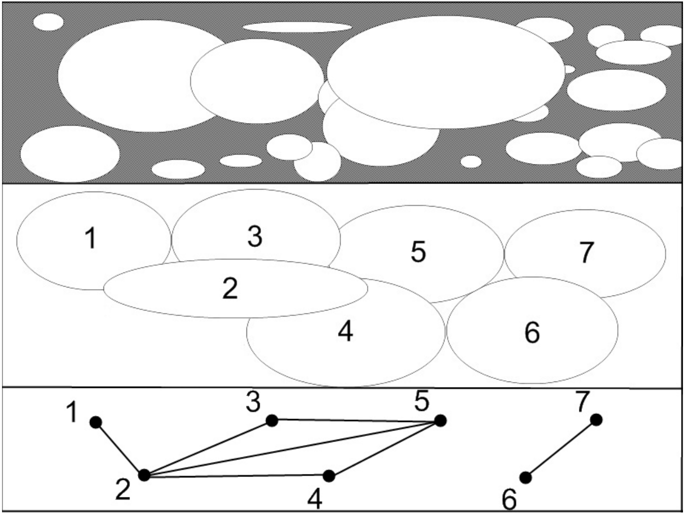
ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο



Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Εφαρμογές :

- Παράλληλη εκτέλεση εργασιών
- Χρονοπρογραμματισμός (scheduling)
- Ανάθεση πόρων (resource allocation)
- Πρόβλημα k-βασιλισσών
- Τηλεπικοινωνίες

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Εφαρμογές :

- Παράλληλη εκτέλεση εργασιών
- Χρονοπρογραμματισμός (scheduling)
- Ανάθεση πόρων (resource allocation)
- Πρόβλημα k-βασιλισσών
- Τηλεπικοινωνίες

Επίλυση :

- Θεωρία Γράφων
- Γραμμικό Ακέραιο Πρόγραμμα
  - Χαλάρωση (προσεγγιστική λύση)
  - Μέθοδοι ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Εφαρμογές :

- Παράλληλη εκτέλεση εργασιών
- Χρονοπρογραμματισμός (scheduling)
- Ανάθεση πόρων (resource allocation)
- Πρόβλημα k-βασιλισσών
- Τηλεπικοινωνίες

Επίλυση :

- Θεωρία Γράφων
- Γραμμικό Ακέραιο Πρόγραμμα
  - Χαλάρωση (προσεγγιστική λύση)
  - Μέθοδοι ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Γενίκευση κόστους ανάλογα με την εφαρμογή

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Μοντελοποίηση)

Πρόβλημα

Δίνεται γράφος $G(V, E)$

Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των κόμβων $V' \subseteq V$ ώστε $\forall u, v \in V' : [u, v] \notin E$.

Πρόβλημα

Δίνεται γράφος $G(V, E)$
Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των κόμβων $V' \subseteq V$ ώστε $\forall u, v \in V' : [u, v] \notin E$.

Βέλτιστη Λύση

Μια βέλτιστη λύση V^* είναι μέγιστη ως προς το πληθάριθμο :
$V^* = \arg\max_{V' \in 2^V} |V'|$

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού:

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού:

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού:

- Μεταβλητές :
  $x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
- Περιορισμοί :
  $x_i + x_j \leq 1$ για κάθε $[v_i, v_j] \in E$

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Μοντελοποίηση)

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού:

- Μεταβλητές :

  $$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Περιορισμοί :

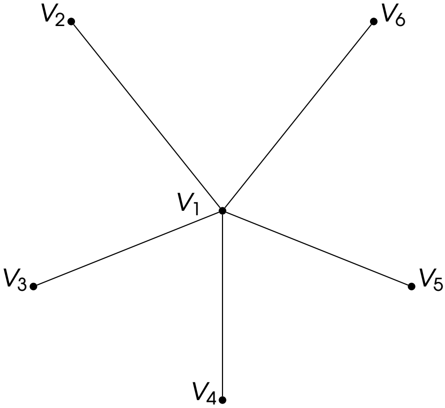
  $x_i + x_j \leq 1$ για κάθε $[v_i, v_j] \in E$

- Αντικειμενική Συνάρτηση :

  Μεγιστοποίησε τη ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} x_i$

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Παραδείγματα)

Γράφος $G(V, E)$, $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$

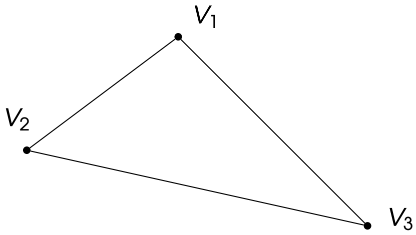


Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Παραδείγματα)

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
\max z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & \\
s.t. & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & \leq & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Παραδείγματα)

Γράφος $G(V, E)$, $V = \{V_1, V_2, V_3\}$



Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο (Παραδείγματα)

$$
\begin{array}{lccccccc}
\max z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
s.t. & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \in & \{0, 1\}
\end{array}
$$

Πίνακας πρόσπτωσης

Έστω γράφος $G(V, E)$ με $|V| = n$ και $|E| = m$

Ορίζουμε τον $m \times n$ πίνακα πρόσπτωσης A ως εξής :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } j \in e_i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Πίνακας πρόσπτωσης

Έστω γράφος $G(V,E)$ με $|V| = n$ και $|E| = m$

Ορίζουμε τον $m \times n$ πίνακα πρόσπτωσης A ως εξής :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } j \in e_i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για το παράδειγμα 2 :

$$A = \begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline e_1 & 1 & 1 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 1 \\ e_3 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Θέτουμε $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbb{1}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. Το γραμμικό πρόβλημα γίνεται :

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbb{1}_n^t x \\ \text{s.t.} \quad & A\,x \leq \mathbb{1}_m \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Βεβαρημένο Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Στο πρόβλημα του Βεβαρημένου Μεγίστου Ανεξάρτητου Συνόλου (Weighted Maximum Independent Set) έχουμε ένα βάρος c_i για κάθε κόμβο v_i.

Βεβαρημένο Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Στο πρόβλημα του Βεβαρημένου Μεγίστου Ανεξάρτητου Συνόλου (Weighted Maximum Independent Set) έχουμε ένα βάρος c_i για κάθε κόμβο v_i.

Η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει σε $\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

Βεβαρημένο Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Στο πρόβλημα του Βεβαρημένου Μεγίστου Ανεξάρτητου Συνόλου (Weighted Maximum Independent Set) έχουμε ένα βάρος c_i για κάθε κόμβο v_i.

Η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει σε $\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

(Το πρόβλημα Μεγίστου Ανεξάρτητου Συνόλου είναι μια ειδική περίπτωση όπου $\forall i : c_i = 1$)

Βεβαρημένο Μέγιστο Ανεξάρτητο Σύνολο

Στο πρόβλημα του Βεβαρημένου Μεγίστου Ανεξάρτητου Συνόλου (Weighted Maximum Independent Set) έχουμε ένα βάρος c_i για κάθε κόμβο v_i.

Η αντικειμενική συνάρτηση αλλάζει σε $\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

(Το πρόβλημα Μεγίστου Ανεξάρτητου Συνόλου είναι μια ειδική περίπτωση όπου $\forall i: \; c_i = 1$)
Η μοντελοποίηση με πίνακες :

$$\begin{aligned} \max z = & \; c^t x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq \mathbb{1} \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

όπου $c^t = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$

Εφαρμογές :

- Επίβλεψη χώρων
- Εγκατάσταση εξυπηρετητών
- Λήψη φωτογραφιών από δορυφόρους

Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη

Εφαρμογές :

- Επίβλεψη χώρων
- Εγκατάσταση εξυπηρετητών
- Λήψη φωτογραφιών από δορυφόρους

Επίλυση :

- Θεωρία Γράφων
- Γραμμικό Ακέραιο Πρόγραμμα
    - Χαλάρωση (προσεγγιστική λύση)
    - Μέθοδοι ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη

Εφαρμογές :

- Επίβλεψη χώρων
- Εγκατάσταση εξυπηρετητών
- Λήψη φωτογραφιών από δορυφόρους

Επίλυση :

- Θεωρία Γράφων
- Γραμμικό Ακέραιο Πρόγραμμα
  - Χαλάρωση (προσεγγιστική λύση)
  - Μέθοδοι ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

Γενίκευση κόστους ανάλογα με την εφαρμογή

Ελάχιστη Κομβική επικάλυψη (Μοντελοποίηση)

Πρόβλημα

Δίνεται γράφος $G(V, E)$

Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των κόμβων $V' \subseteq V$ ώστε $\forall [u, v] \in E : u \in V' \lor v \in V'$.

Ελάχιστη Κομβική επικάλυψη (Μοντελοποίηση)

Πρόβλημα

Δίνεται γράφος $G(V, E)$
Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των κόμβων $V' \subseteq V$ ώστε $\forall [u, v] \in E : u \in V' \vee v \in V'$.

Βέλτιστη Λύση

Μια βέλτιστη λύση V^* είναι ελάχιστη ως προς το πληθάριθμο :
$V^* = \arg \min_{V' \in 2^V} |V'|$.

Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη (Μοντελοποίηση)

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού:

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού:

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη (Μοντελοποίηση)

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού:

- Μεταβλητές :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Περιορισμοί:

$x_i + x_j \geq 1$ για κάθε $[v_i, v_j] \in E$

Μοντελοποίηση μέσω Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού:

- Μεταβλητές :

  $$x_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in V' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

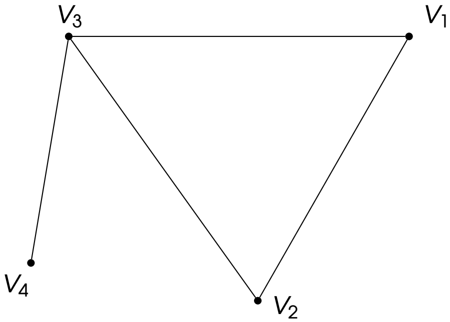
- Περιορισμοί:

  $x_i + x_j \geq 1$ για κάθε $[v_i, v_j] \in E$

- Αντικειμενική Συνάρτηση :

  Ελαχιστοποίησε τη ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} x_i$

Γράφος $G(V, E)$, $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$



Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη (Παραδείγματα)

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\min w = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & \\
s.t. & x_1 & & & + & x_3 & & & \geq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & \geq & 1 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & & & \geq & 1 \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in & \{0, 1\}
\end{array}
$$

Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη (Μοντελοποίηση με Πίνακες)

Το γραμμικό πρόβλημα με χρήση πινάκων γίνεται :

$$
\begin{aligned}
\min w &= \mathbb{1}^t x \\
\text{s.t.} \quad & Ax \geq \mathbb{1} \\
& x_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Βεβαρημένη Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη

Στο πρόβλημα της Βεβαρημένης Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης (Weighted Vertex Cover) έχουμε πάλι βάρη στους κόμβους και στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$\min w = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Βεβαρημένη Ελάχιστη Κομβική Επικάλυψη

Στο πρόβλημα της Βεβαρημένης Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης (Weighted Vertex Cover) έχουμε πάλι βάρη στους κόμβους και στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$\min w = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Η μοντελοποίηση με πίνακες :

$$\begin{aligned} \min w \; &= c^t x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq \mathbb{1} \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

όπου $c^t = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$

Πρόταση 1

Έστω μια εφικτή λύση x' του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x'$ είναι μια εφικτή λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Πρόταση 1

Έστω μια εφικτή λύση x' του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x'$ είναι μια εφικτή λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} Ax' &\leq \mathbb{1} \\ Ax' - A\mathbb{1} &\leq \mathbb{1} - A\mathbb{1} \end{aligned}$$

Πρόταση 1

Έστω μια εφικτή λύση x' του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x'$ είναι μια εφικτή λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} Ax' &\leq \mathbb{1} \\ Ax' - A\mathbb{1} &\leq \mathbb{1} - A\mathbb{1} \end{aligned}$$

αφού κάθε γραμμή του πίνακα A έχει ακριβώς δύο στοιχεία ίσον με 1 και τα υπόλοιπα μηδέν : $A\mathbb{1} = \mathbb{2}$

Σχέση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης -Μέγιστου Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου

Πρόταση 1

Έστω μια εφικτή λύση x' του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου :
Η λύση $1 - x'$ είναι μια εφικτή λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} Ax' &\leq \mathbb{1} \\ Ax' - A\mathbb{1} &\leq \mathbb{1} - A\mathbb{1} \end{aligned}$$

αφού κάθε γραμμή του πίνακα A έχει ακριβώς δύο στοιχεία ίσον με 1 και τα υπόλοιπα μηδέν : $A\mathbb{1} = \mathbb{2}$

$$\begin{aligned} A(x' - \mathbb{1}) &\leq -\mathbb{1} \\ A(\mathbb{1} - x') &\geq \mathbb{1} \end{aligned}$$

Σχέση Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψησ-Μέγιστου Ανεξαρτήτου Υποσυνόλου

Πρόταση 2

Έστω μια βέλτιστη λύση x^* του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου:
Η λύση $1 - x^*$ είναι μια βέλτιστη λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Πρόταση 2

Έστω μια βέλτιστη λύση x^* του Μέγιστου Ανεξάρτητου Υποσυνόλου: Η λύση $1 - x^*$ είναι μια βέλτιστη λύση της Ελάχιστης Κομβικής Επικάλυψης.

Απόδειξη

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* \geq \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq -\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i^*) \leq \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

Ελάχιστη Επικάλυψη ακμών

Δίνεται γράφος $G(V, E)$
Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των ακμών $E' \subseteq E$ ώστε $\forall v \in V : \exists e \in E' : v \in e$. Η Αντικειμενική Συνάρτηση σκοπεύει στην ελαχιστοποίηση του πληθάριθμο αριθμού $|E'|$.

Ελάχιστος Χρωματισμός Γράφων

Δίνεται γράφος $G(V, E)$
Μία εφικτή λύση είναι μια ανάθεση χρωμάτων $Color : V \rightarrow C$ έτσι ώστε $\forall [u, v] \in E : Color(v) \neq Color(u)$. Η Αντικειμενική Συνάρτηση σκοπεύει στην ελαχιστοποίηση του αριθμού των διαφορετικών χρωμάτων που ανατίθενται στους κόμβους.

Ασκήσεις

1. Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα της Ελάχιστης Επικάλυψης Ακμών ως πρόβλημα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού.

Ασκήσεις

1. Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα της Ελάχιστης Επικάλυψης Ακμών ως πρόβλημα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού.
2. Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα του Ελάχιστου Χρωματισμού Γράφων ως πρόβλημα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού.