Γραμμικός προγραμματισμός

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Βασίλης Ζησιμόπουλος

Θεωριτική Πληροφορική
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κανονική μορφή (Canonical form)

$$\min Z = -cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Ακέραιος Προγραμματισμός

Κανονική μορφή (Canonical form)

$$\min Z = -cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$$c_j, a_{ij}, b_i$$
$$1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$$
$$i, j, m, n \in \mathbb{N}$$

$P = \{x | x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}$
P φραγμένο
$P \neq \emptyset$

Ακέραιος Προγραμματισμός

$$
\begin{aligned}
\max\, & x_j \\
Ax &= b \\
x &\geq 0 \\
a_j \leq x_j &\leq b_j
\end{aligned}
$$

Ακέραιος Προγραμματισμός

$$
\begin{aligned}
\max x_j & \\
Ax &= b \\
x &\geq 0 \\
a_j \leq x_j &\leq b_j
\end{aligned}
$$

$x_j \rightarrow k+1$ ακέραιες τιμές

$x_j \in \{0,1\}$

$$
\begin{aligned}
x_j &= y_0 + 2y_1 + 4y_2 + \cdots + 2^p y_p \\
k &\leq 2^{p+1} - 1
\end{aligned}
$$

Ακέραιος Προγραμματισμός

$$
\begin{aligned}
\max x_j & \\
Ax &= b \\
x &\geq 0 \\
a_j \leq x_j &\leq b_j
\end{aligned}
$$

$x_j \rightarrow k+1$ ακέραιες τιμές

$x_j \in \{0, 1\}$

$$x_j = y_0 + 2y_1 + 4y_2 + \cdots + 2^p y_p$$

$$k \leq 2^{p+1} - 1$$

$P = \{x | x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}$

P φραγμένο

$P \neq \emptyset$

Παραδείγματα

$$
\begin{aligned}
\min Z = 3x_1 - 4x_2 \\
x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
-2 \leq x_1 \leq 4 \\
1 \leq x_2 \leq 3 \\
x_1, x_2 \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Παραδείγματα

$$\min Z = 3x_1 - 4x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$-2 \leq x_1 \leq 4$$
$$1 \leq x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

$$x_1 = -2 + y_1 + 2y_2 + 4y_3$$
$$x_2 = 1 + y_4 + 2y_5$$

Παραδείγματα

$$\begin{aligned} \min Z &= 3x_1 - 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -2 \leq x_1 &\leq 4 \\ 1 \leq x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 &= 1 + y_4 + 2y_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min Z = -10 + 3y_1 + 6y_2 + 12y_3 - 4y_4 - 8y_5 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 \leq 6 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 6 \\ y_4 + 2y_5 \leq 2 \\ y_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Παραδείγματα

IP

$$\begin{aligned} \min Z &= cx \\ Ax &= b \\ x &\leq 0 \\ x_j &\in \mathbb{N} \end{aligned}$$

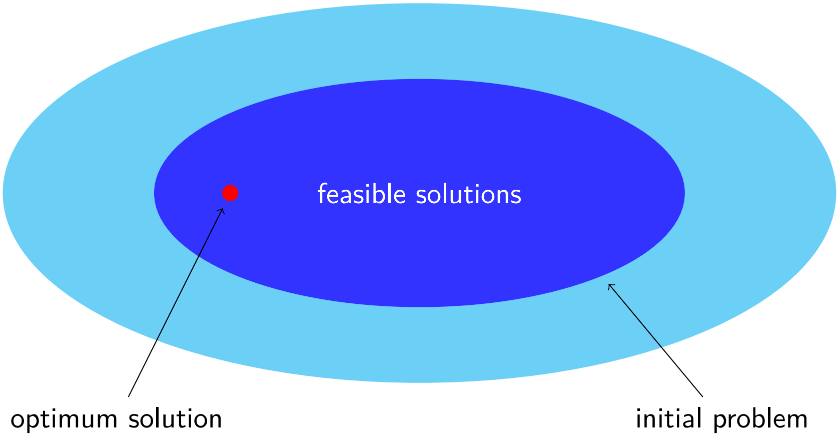
$$\begin{aligned} \min Z = -10x_1 - 11x_2 \\ 10x_1 + 12x_2 \leq 59 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$x_1 = 5.9, x_2 = 0 \Rightarrow Z = -59$
$x_1 = 6, x_2 = 0 \Rightarrow ?$
$x_1^* = 1, x_2^* = 4 \Rightarrow Z = -54$

Γραμμική αποδυνάμωση (Linear relaxation)

$$
\begin{aligned}
\min 15x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 10x_4 \\
x_3 - x_4 \leq 0 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 20 \\
x_2 + x_4 \leq 1 \\
\\
x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \\
(LP) \Rightarrow \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0, 1]
\end{aligned}
$$

Φράγματα και αποδυναμώσεις



Φράγματα και αποδυναμώσεις

$R(p) \to V^*(R)$
$P \to V^*(P)$

$V^*(R) \geq V^*(P)$ (maximization)
$V^*(R) \leq V^*(P)$ (minimization)

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
\max x_1 + x_2 + x_3 & \\
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 + x_3 &\leq 1 \\
x_2 + x_3 &\leq 1 \\
x_1, x_2, x_3 &\in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 + x_3 & \\ x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_3 &\le 1 \\ x_2 + x_3 &\le 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$V^*(P) = 1 \quad x^* = (1, 0, 0)$$
$$V^*(R) = \frac{3}{2} \quad \bar{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} \min 20x_1 + 9x_2 + 7x_3 & \\ 10x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\geq 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\min 20x_1 + 9x_2 + 7x_3$$
$$10x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 7$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

$$V^*(P) = 16 \quad x^* = (0, 1, 1)$$
$$V^*(R) = 14 \quad \bar{x} = (\frac{7}{10}, 0, 0)$$

Γραμμική αποδυνάμωση (Linear relaxation)

Αν το $\bar{x}$ είναι εφικτή λύση για το P τότε η $\bar{x}$ είναι ΒΕΛΤΙΣΤΗ για το P.