

Branch And Bound

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Βασίλης Ζησιμόπουλος

Θεωρητική Πληροφορική
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

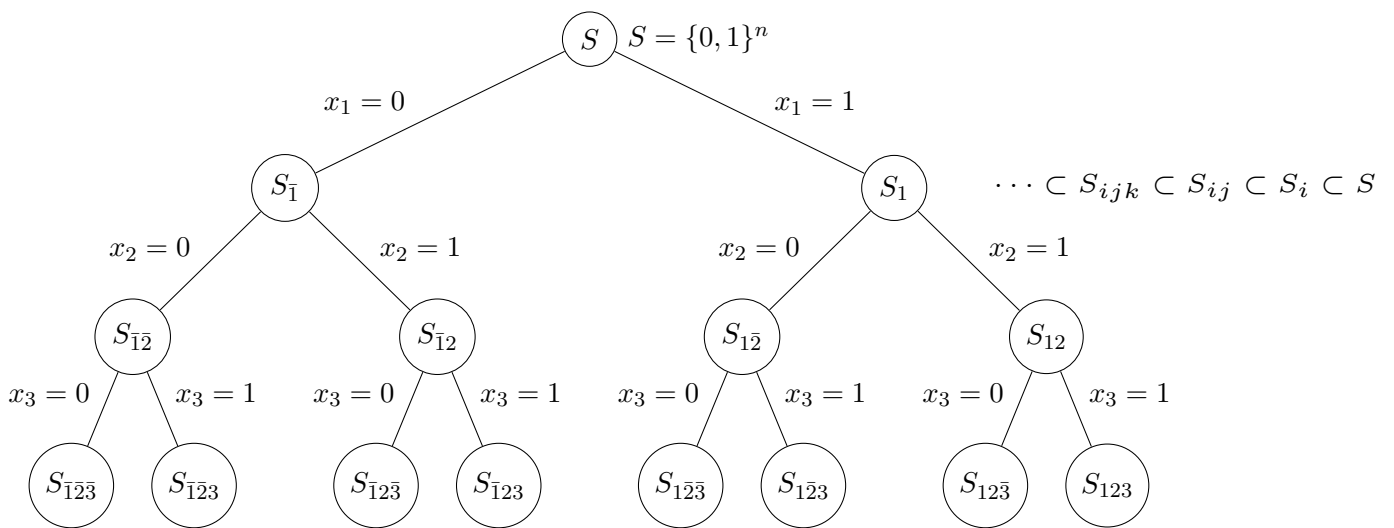
Branch And Bound

- Διαχώριση
 - διαμέτιση του χώρου αναζήτησης σε μικρότερα υποσύνολα
- Εκτίμηση
 - πάνω φράγμα: υπερεκτίμηση της τιμής μέσα στο υποδέντρο

Branch And Bound

■ Στρατηγική διάσχισης - διαχώρισης

- διαχώριση: ποια υποσύνολα·
- διάσχιση: ποια σειρά·



Διαχώριση

- Επιλογή της μεταβλητής διαχώρισης
 - στην τύχη
 - συστηματικά
 - εμπειρία παρελθόντος
 - επίλυση ενός υποπροβλήματος
- Επηρεασμός στον χρόνο και αριθμό ανιχνευμένων κόμβων

Εκτίμηση

Ελαχιστοποίηση

S_i : κόμβος στο δένδρο

$f(S_i) \equiv$ εκτίμηση (κάτω φράγμα καλύτερης λύσης στο S_i)

$$f(S_i) \leq \min_{x \in S_i} \{cx\}$$

Εκτίμηση

Ελαχιστοποίηση

S_i : κόμβος στο δένδρο

$f(S_i) \equiv$ εκτίμηση (κάτω φράγμα καλύτερης λύσης στο S_i)

$$f(S_i) \leq \min_{x \in S_i} \{cx\}$$

Έστω \bar{x} μια προσεγγιστική ακέραια λύση με $\bar{z} = c\bar{x}$:

$$\text{Αν } f(S_i) \begin{cases} > \bar{z}, & \text{δεν συνεχίζουμε τη διαχώριση του } S_i \\ \leq \bar{z} & \text{συνεχίζουμε τη διαχώριση του } S_i \end{cases}$$

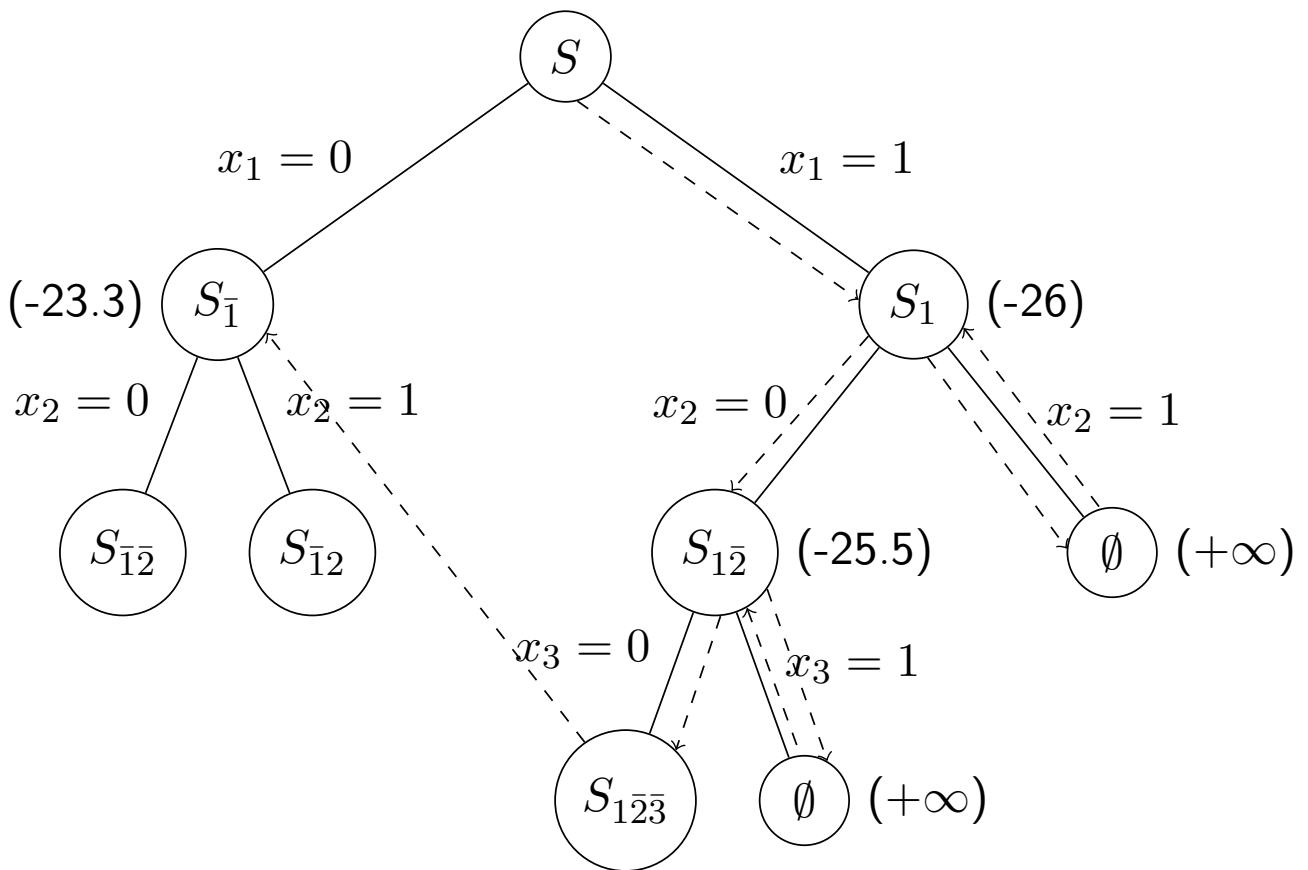
Χονδρική εκτίμηση / Πολύ καλή εκτίμηση

Συμβιβασμός: χρόνος - ποιότητα πληροφοριών

Στρατηγική διάσχισης

- Κατά πλάτος (BFS)
- Κατά βάθος (DFS)
- Καλύτερο ή χειρότερο

Παράδειγμα



Σχήμα: Καλύτερη εκτίμηση

Πολυπλοκότητα

- Θεωρητική: εκθετική
- πρακτική: πως να μετρηθεί:
 - χρόνος
 - αριθμός κόμβων
 - χώρος μνήμης

Αλγόριθμος Branch And Bound

Algorithm 1 Branch And Bound

```
1: function BRANCH AND BOUND( $S$  σύνολο λύσεων,  $z$  βέλτιστη λύση)
2:    $\bar{z} = z_0$  ▷ αρχική λύση αν υπάρχει διαφορετικά  $z_0 = +\infty$ 
3:    $Q = \emptyset$ , EVAL( $S$ ,  $Q$ )
4:   while  $Q \neq \emptyset$  do
5:      $s = \text{top}(Q)$ 
6:     Επέλεξε μεταβλητή  $x_i$  από τις μη φιξαρισμένες μεταβλητές του  $S$ 
7:      $P_i^-$ : υποπρόβλημα με χώρο λύσεων  $s_i^-$  όπου η μεταβλητή  $x_i$  είναι 0
8:      $P_i^+$ : υποπρόβλημα με χώρο λύσεων  $s_i^+$  όπου η μεταβλητή  $x_i$  είναι 0
9:   end while
10:  EVAL( $S_i^-, Q$ ), EVAL( $S_i^+, Q$ )
11:  Επέστρεψε την καλύτερη λύση  $\bar{z}$  που βρέθηκε σε όλη την αναζήτηση
12: end function
```

Αλγόριθμος Branch And Bound

Algorithm 2 Branch And Bound - EVAL

```
1: function EVAL(χώρος λύσεων  $s$ , structure  $q$ )
2:   if  $s = \emptyset$  then
3:     Το πρόβλημα διαγράφεται από την  $q$ , exit
4:     Εύρεση κάτω φράγματος  $f(s)$  για το πρόβλημα  $p$ 
5:     if  $f(s) \geq \bar{z}$  then
6:       το πρόβλημα  $p$  διαγράφεται από την  $q$ 
7:     else
8:       if  $f(s)$  εφικτή λύση για το πρόβλημα  $p$  then
9:          $\bar{z} = f(s)$ 
10:        το  $p$  διαγράφεται από την  $q$ 
11:      else
12:        το πρόβλημα  $p$  προστίθεται στην  $q$ 
13:      end if
14:    end if
15:  end if
16: end function
```

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}\min z &= -20x_1 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 &\leq 12 \\ x_j &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}\min z &= -20x_1 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 &\leq 12 \\ x_j &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

$$\frac{C_{j1}}{a_{j1}} \leq \frac{C_{j2}}{a_{j2}} \leq \dots \leq \frac{C_{jn}}{a_{jn}}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}\min z &= -20x_1 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 &\leq 12 \\ x_j &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

$$\frac{C_{j1}}{a_{j1}} \leq \frac{C_{j2}}{a_{j2}} \leq \dots \leq \frac{C_{jn}}{a_{jn}}$$

Συνεχής λύση: $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{8}, z = -26$

Greedy: $x_1 = 1, x_2 = 1, z = -21$

Παράδειγμα

Διαχωρισμός: \bar{S}_1 (BFS)

$$x_1 = \begin{cases} 0, & S_1 : \begin{cases} 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 3 \\ \min -20 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \end{cases} \\ 1, & \bar{S}_1 : \begin{cases} 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12 \\ \min -16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \end{cases} \end{cases}$$

Παράδειγμα

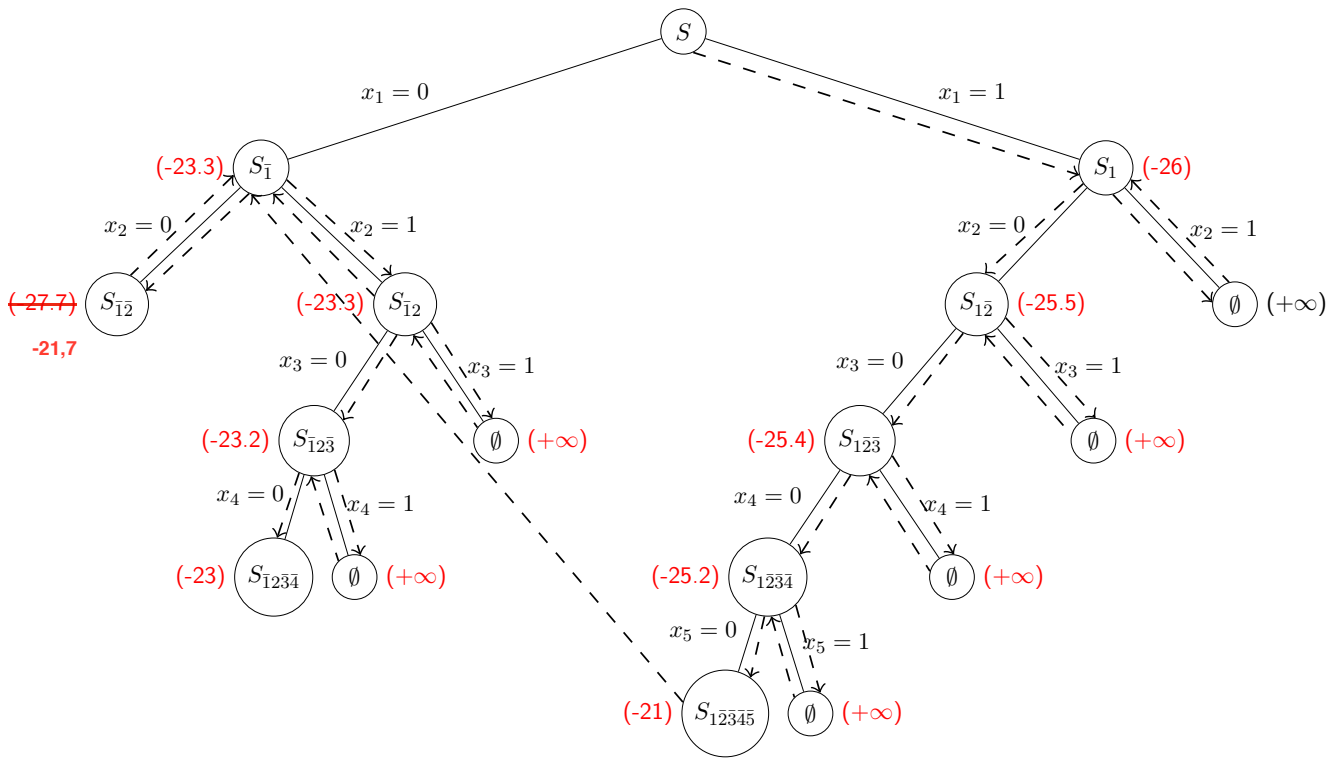
Διαχωρισμός: \bar{S}_1 (BFS)

$$x_1 = \begin{cases} \mathbf{1} \\ 0, & S_1 : \begin{cases} 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 3 \\ \min -20 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \end{cases} \\ \mathbf{0} \\ 1, & \bar{S}_1 : \begin{cases} 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 \leq 12 \\ \min -16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \end{cases} \end{cases}$$

S_1 συνεχής λύση: $x_2 = \frac{3}{8}, z = -26$

\bar{S}_1 συνεχής λύση: $x_2 = 1, x_3 = \frac{2}{3}, z = \frac{10}{3} \simeq -23.3$

Παράδειγμα



Σχήμα: 17 κόμβοι εξετάστηκαν από τους $2^7 - 1$