Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Βασίλης Ζησιμόπουλος

Θεωριτική Πληροφορική
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μέτρο ποιότητας λύσεων

Αλγόριθμος $A : I \to f_A(I)$
$\hat{f}(I)$: βέλτιστη λύση για το στιγμιότυπο I

- Απόλυτο λάθος: $\varepsilon^{\alpha} = |\hat{f}(I) - f_A(I)|$
- Σχετικό λάθος: $\varepsilon^{r} = \dfrac{|\hat{f}(I) - f_A(I)|}{\hat{f}(I)}$

Λόγος προσέγγισης (approximation ratio)

$$\rho = \frac{f_A(I)}{\hat{f}(I)} = 1 + \varepsilon^r \text{ (Minimization)}$$

Λόγος προσέγγισης (approximation ratio)

$$\rho = \frac{f_A(I)}{\hat{f}(I)} = 1 + \varepsilon^r \text{ (Minimization)}$$

$$\rho = \frac{\hat{f}(I)}{f_A(I)} = \frac{1}{1 - \varepsilon^r} \text{ (Maximization)}$$

Λόγος προσέγγισης (approximation ratio)

$$\rho = \frac{f_A(I)}{\hat{f}(I)} = 1 + \varepsilon^r \text{ (Minimization)}$$

$$\rho = \frac{\hat{f}(I)}{f_A(I)} = \frac{1}{1 - \varepsilon^r} \text{ (Maximization)}$$

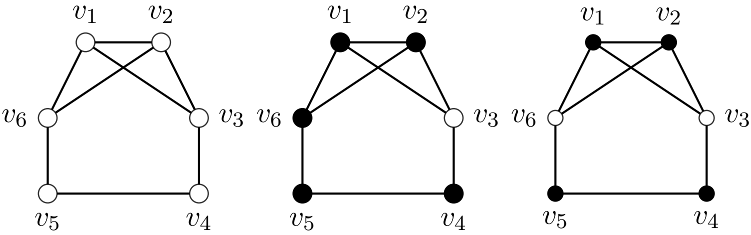
$$\varepsilon^d = \frac{|worst(I) - f_A(I)|}{|worst(I) - \hat{f}(I)|} \text{ (Differential ratio)}$$

Vertec Cover (VC)

Ορισμός

Δοθέντος ενός μη κατευθυνόμενου γράφου $G = (V, E)$, να βρεθεί το ελάχιστο υποσύνολο $V^{'} \subseteq V$ τέτοιο ώστε
$\forall\ \{u_i, v_j\} \in E,\ u_i \in V^{'}$ or $v_j \in V^{'}$

Vertec Cover (VC)



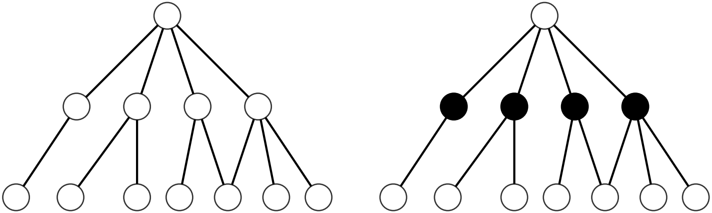
(a) Graph G (b) A Vertex Cover (c) Minimal VC

Ευριστικά για το Vertex Cover

Algorithm 1 Ευρεστικός για το Vertex Cover

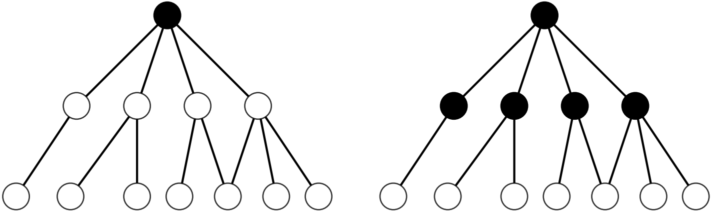
```
V' ← ∅
while E ≠ ∅ do
    Επέλεξε u ∈ V με μέγιστο βαθμό
    V' ← V' ∪ {u}
    διάγραψε τις προσκείμενες στο u πλευρές
end while
return V'
```

Παράδειγμα ευρεστικού 1



(a) Ο γράφος G (b) Το βέλτιστο Vertex Cover

Παράδειγμα ευρεστικού 1

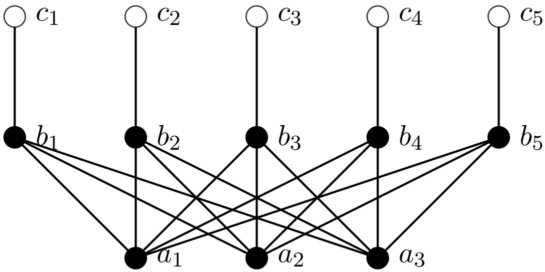


(a) Το Vertex Cover μετά την πρώτη εφαρμογή του ευριστικού

(b) Το Vertex Cover που δίνει το ευριστικό

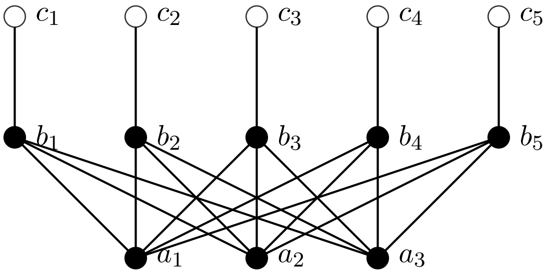
Figure: $\rho = \frac{5}{4}$ και $\varepsilon^r = 25\%$

Μπορεί το λάθος να είναι πιο μεγάλο;



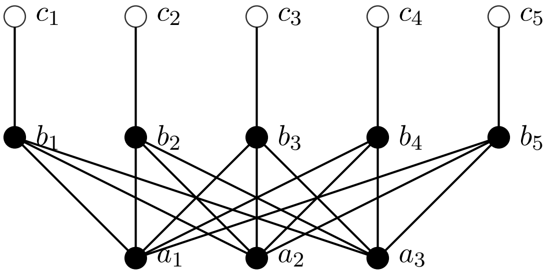
- n a-κόμβοι, $n+2$ b-κόμβοι, $n+2$ c-κόμβοι.

Μπορεί το λάθος να είναι πιο μεγάλο;



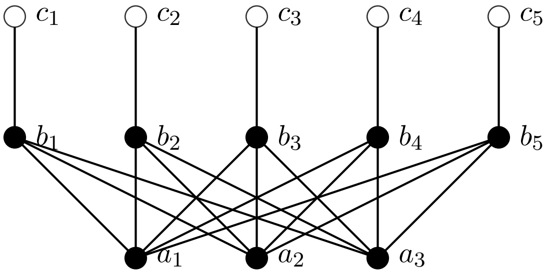
- n a-κόμβοι, $n+2$ b-κόμβοι, $n+2$ c-κόμβοι.
- $d(a_i) = n+2$, $d(b_i) = n+1$, $d(c_i) = 1$.

Μπορεί το λάθος να είναι πιο μεγάλο;



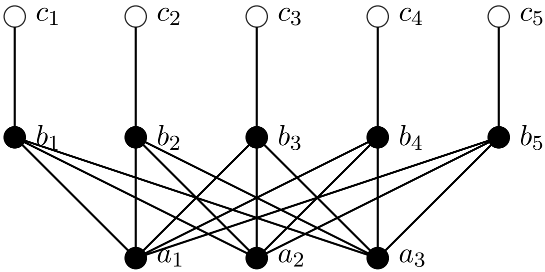
- n a-κόμβοι, $n+2$ b-κόμβοι, $n+2$ c-κόμβοι.
- $d(a_i) = n+2$, $d(b_i) = n+1$, $d(c_i) = 1$.
- $|OPT| = n+2$, $|H| = n+n+2 = 2n+2$

Μπορεί το λάθος να είναι πιο μεγάλο;



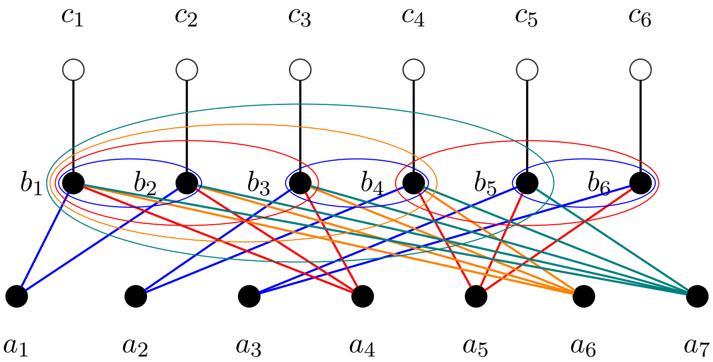
- n a-κόμβοι, $n+2$ b-κόμβοι, $n+2$ c-κόμβοι.
- $d(a_i) = n+2$, $d(b_i) = n+1$, $d(c_i) = 1$.
- $|OPT| = n+2$, $|H| = n+n+2 = 2n+2$
- $\rho = \dfrac{H}{OPT} = \dfrac{2n+2}{n+2}$, $\lim_{n\to\infty} \rho = 2$

Μπορεί το λάθος να είναι πιο μεγάλο;



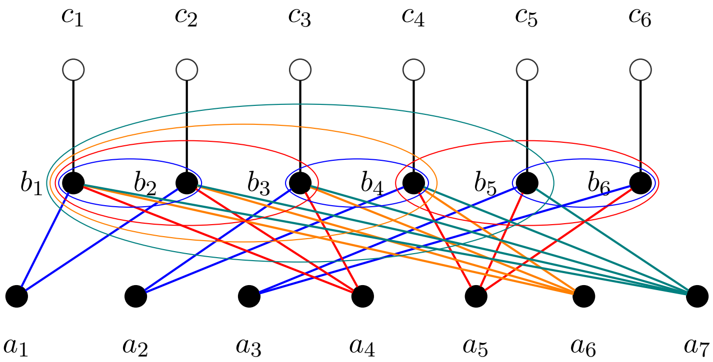
- n a-κόμβοι, $n+2$ b-κόμβοι, $n+2$ c-κόμβοι.
- $d(a_i) = n+2$, $d(b_i) = n+1$, $d(c_i) = 1$.
- $|OPT| = n+2$, $|H| = n + n + 2 = 2n+2$
- $\rho = \dfrac{H}{OPT} = \dfrac{2n+2}{n+2}$, $\lim_{n\to\infty} \rho = 2$
- $\varepsilon^r = 100\%$

Μπορεί το λάθος να ξεπεράσει το 100%;



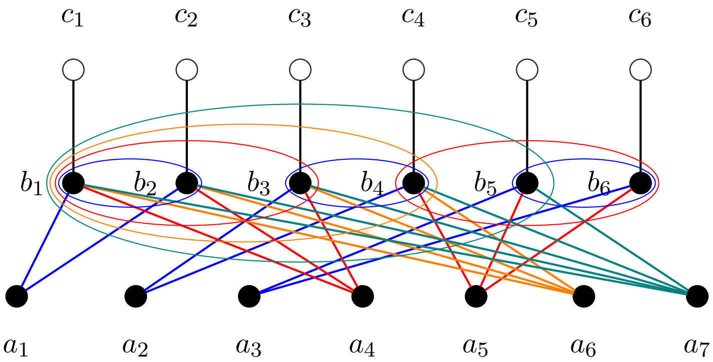
- Πρόσθεσε έναν a-κόμβο για κάθε σύνολο σε κάθε διαμέριση των b-κόμβων.

Μπορεί το λάθος να ξεπεράσει το 100%;



- Πρόσθεσε έναν a-κόμβο για κάθε σύνολο σε κάθε διαμέριση των b-κόμβων.
- Στο παράδειγμα: 3 ζεύγη ή 2 τριάδες ή 1 τετράδα ή 1 πεντάδα.

Μπορεί το λάθος να ξεπεράσει το 100%;



- Πρόσθεσε έναν a-κόμβο για κάθε σύνολο σε κάθε διαμέριση των b-κόμβων.
- Στο παράδειγμα: 3 ζεύγη ή 2 τριάδες ή 1 τετράδα ή 1 πεντάδα.
- $\rho = 1 + 7/6$, $\varepsilon^r > 100\%$

Ανάλυση παραδείγματος

- Ο τελευταίος a-κόμβος έχει πάντα το μεγαλύτερο βαθμό.
- Λύση ευριστικού: $|\{a\text{-κόμβοι}\}| + n = L(n) + n$
- Βέλτιστη λύση: $|\{b\text{-κόμβοι}\}| = n$
- Το σφάλμα αυξάνει όπως το $ln(n)$.

Ανάλυση παραδείγματος

- Ο τελευταίος a-κόμβος έχει πάντα το μεγαλύτερο βαθμό.
- Λύση ευριστικού: $|\{a\text{-κόμβοι}\}| + n = L(n) + n$
- Βέλτιστη λύση: $|\{b\text{-κόμβοι}\}| = n$
- Το σφάλμα αυξάνει όπως το $ln(n)$.

$$\rho = \frac{L(n) + n}{n} = 1 + \frac{L(n)}{n}, \text{με } L(n) = \sum_{j=2}^{n-1} \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

$$\varepsilon^r = \frac{L(n)}{n}$$

Ανάλυση παραδείγματος

- Ο τελευταίος a-κόμβος έχει πάντα το μεγαλύτερο βαθμό.
- Λύση ευριστικού: $|\{a\text{-κόμβοι}\}| + n = L(n) + n$
- Βέλτιστη λύση: $|\{b\text{-κόμβοι}\}| = n$
- Το σφάλμα αυξάνει όπως το $ln(n)$.

$$\rho = \frac{L(n)+n}{n} = 1 + \frac{L(n)}{n}, \text{με } L(n) = \sum_{j=2}^{n-1} \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

$$\varepsilon^r = \frac{L(n)}{n}$$

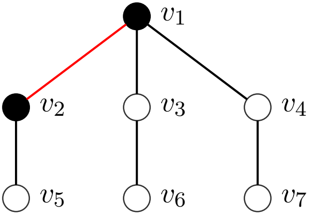
n	6	10	30	100	1000	...
$\frac{L(n)}{n}(\%)$	117	160	267	380	600	...

Ευριστικά για το Vertex Cover

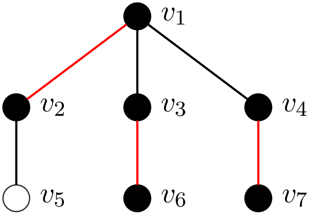
Algorithm 2 Ευρεστικός για το Vertex Cover

$C \leftarrow \emptyset$
while $E \neq \emptyset$ **do**
    Επέλεξε $[u, v] \in E$ τυχαία
    $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
    διάγραψε u, v από τον γράφο
end while
return C

Παράδειγμα ευρεστικού 2



(a) Το Vertex Cover μετά την πρώτη εφαρμογή του ευριστικού



(b) Το Vertex Cover που δίνει το ευριστικό

Προσεγγιστικός λόγος ευρεστικού 2

- $\rho = 2$.
- Λάθος το πολύ 100%.
- Λύση ευρεστικού: C
- Κάθε επικάλυψη περιέχει τουλάχιστον έναν κόμβο από κάθε πλευρά
- Καμία επικάλυψη δεν μπορεί να είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}|C|$.
- Βέλτιστη λύση: $OPT \geq \frac{1}{2}|C|$
- $\rho = \frac{H}{OPT} \leq \frac{|C|}{\frac{1}{2}|C|} = 2$

Ερώτημα: Επιτυγχάνεται το μέγιστο σφάλμα για κάποιο στιγμιότυπο;