

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Στρογγυλοποίηση Γραμμικών Προγραμμάτων II

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Δίνονται δύο σύνολα C, F σε ένα χώρο με μετρική $d(\cdot, \cdot)$. Σε κάθε θέση του C υπάρχει ένας πελάτης. Σε κάθε $i \in F$ μπορούμε να ανοίξουμε μια υπηρεσία με κόστος f_i .

Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Δίνονται δύο σύνολα C, F σε ένα χώρο με μετρική $d(\cdot, \cdot)$. Σε κάθε θέση του C υπάρχει ένας πελάτης. Σε κάθε $i \in F$ μπορούμε να ανοίξουμε μια υπηρεσία με κόστος f_i .

Θέλουμε να ανοίξουμε κάποιες υπηρεσίες $F' \subseteq F$ και να αναθέσουμε κάθε πελάτη $j \in C$ σε κάποια υπηρεσία $\sigma(j) \in F'$: το κόστος είναι $d(i(j), j)$ για την ανάθεση.

Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

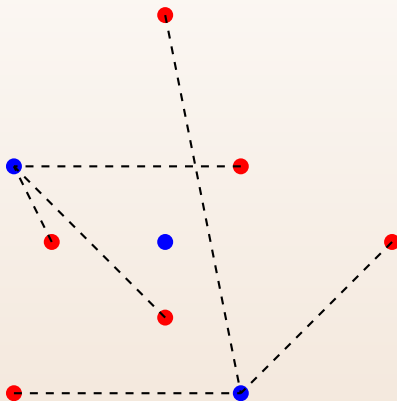
Δίνονται δύο σύνολα C, F σε ένα χώρο με μετρική $d(\cdot, \cdot)$. Σε κάθε θέση του C υπάρχει ένας πελάτης. Σε κάθε $i \in F$ μπορούμε να ανοίξουμε μια υπηρεσία με κόστος f_i .

Θέλουμε να ανοίξουμε κάποιες υπηρεσίες $F' \subseteq F$ και να αναθέσουμε κάθε πελάτη $j \in C$ σε κάποια υπηρεσία $\sigma(j) \in F'$: το κόστος είναι $d(i(j), j)$ για την ανάθεση.

$$C_{ALG} = \underbrace{\sum_{j \in F'} f_i}_{\text{κόστος ανοίγματος}} + \underbrace{\sum_{i \in C} d(\sigma(j), j)}_{\text{κόστος ανάθεσης}}$$

Πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών

Στο παρακάτω στιγμιότυπο τα κόκκινα σημεία αντιστοιχούν στους πελάτες και τα μπλε στις πιθανές υπηρεσίες. Είναι ανοικτές ακριβώς δύο υπηρεσίες.



★ Για κάθε υπηρεσία $i \in F$ έχουμε μια μεταβλητή y_i , η οποία υποδηλώνει κατά πόσο την διαλέξαμε.

Γραμμικό Πρόγραμμα

- ★ Για κάθε υπηρεσία $i \in F$ έχουμε μια μεταβλητή y_i , η οποία υποδηλώνει κατά πόσο την διαλέξαμε.
- ★ Για κάθε πελάτη $j \in C$ και υπηρεσία $i \in F$ έχουμε μια μεταβλητή x_{ij} , η οποία υποδηλώνει αν ο πελάτης j θα ανατεθεί στην υπηρεσία i .

Γραμμικό Πρόγραμμα

- ★ Για κάθε υπηρεσία $i \in F$ έχουμε μια μεταβλητή y_i , η οποία υποδηλώνει κατά πόσο την διαλέξαμε.
- ★ Για κάθε πελάτη $j \in C$ και υπηρεσία $i \in F$ έχουμε μια μεταβλητή x_{ij} , η οποία υποδηλώνει αν ο πελάτης j θα ανατεθεί στην υπηρεσία i .

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{i \in F} f_i y_i + \sum_{i \in F, j \in C} d(i, j) x_{i,j} \\ & \sum_{i \in F} x_{i,j} \geq 1, \forall j \in C \\ & x_{i,j} \leq y_i, \forall i \in F, j \in C \\ & x_{ij}, y_i \geq 0, \forall j \in C, i \in F \end{aligned}$$

Προς στρογγυλοποίηση μιας κλασματικής λύσης

Βρίσκουμε μία *βέλτιστη* λύση (x, y) του παραπάνω γραμμικού προγράμματος, και ορίζουμε

Προς στρογγυλοποίηση μιας κλασματικής λύσης

Βρίσκουμε μία βέλτιστη λύση (x, y) του παραπάνω γραμμικού προγράμματος, και ορίζουμε

$$F_{LP} := \sum_{i \in F} y_i f_i, \quad C_j := \sum_{i \in F} x_{i,j} \cdot d_{i,j}.$$

Προς στρογγυλοποίηση μιας κλασματικής λύσης

Βρίσκουμε μία βέλτιστη λύση (x, y) του παραπάνω γραμμικού προγράμματος, και ορίζουμε

$$F_{LP} := \sum_{i \in F} y_i f_i, \quad C_j := \sum_{i \in F} x_{i,j} \cdot d_{i,j}.$$

Οπότε, το κόστος του γραμμικού προγράμματος ισούται με

$$F_{LP} + \underbrace{\sum_{j \in C} C_j}_{C_{LP}}.$$

Θα σχεδιάσουμε προσεγγιστικό αλγόριθμο με κόστος $4(F_{LP} + C_{LP})$.

Μεταβολή της κλασματικής λύσης.

★ Ερώτηση: Αν στην κλασματική λύση ένας πελάτης $j \in C$ έχει ανατεθεί σε μία πολύ μακρινή υπηρεσία j , έστω και πολύ λίγο, π.χ. $1/1000$,

Μεταβολή της κλασματικής λύσης.

★ Ερώτηση: Αν στην κλασματική λύση ένας πελάτης $j \in C$ έχει ανατεθεί σε μία πολύ μακρινή υπηρεσία j , έστω και πολύ λίγο, π.χ. $1/1000$, υπάρχει ενδεχόμενο ποτέ όταν στρογγυλοποιήσουμε τη λύση να αναθέσουμε τον i στην j ?

Μεταβολή της κλασματικής λύσης.

★ Ερώτηση: Αν στην κλασματική λύση ένας πελάτης $j \in C$ έχει ανατεθεί σε μία πολύ μακρινή υπηρεσία j , έστω και πολύ λίγο, π.χ. $1/1000$, υπάρχει ενδεχόμενο ποτέ όταν στρογγυλοποιήσουμε τη λύση να αναθέσουμε τον i στην j ?

★ Μάλλον όχι, άρα μήπως να αλλάξουμε τη λύση (x, y) σε $(\hat{x}, \hat{y})$ έτσι ώστε το παραπάνω να μην συμβαίνει?

Μεταβολή της κλασματικής λύσης.

★ Ερώτηση: Αν στην κλασματική λύση ένας πελάτης $j \in C$ έχει ανατεθεί σε μία πολύ μακρινή υπηρεσία j , έστω και πολύ λίγο, π.χ. $1/1000$, υπάρχει ενδεχόμενο ποτέ όταν στρογγυλοποιήσουμε τη λύση να αναθέσουμε τον i στην j ?

★ Μάλλον όχι, άρα μήπως να αλλάξουμε τη λύση (x, y) σε $(\hat{x}, \hat{y})$ έτσι ώστε το παραπάνω να μην συμβαίνει?

★ Τι σημαίνει μακριά?

Μεταβολή της κλασματικής λύσης.

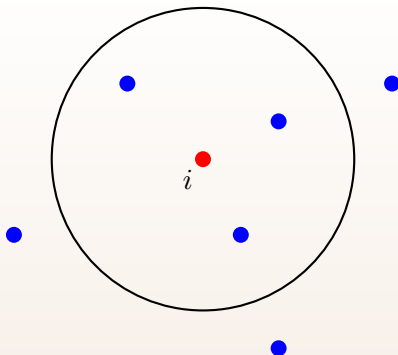
★ Ερώτηση: Αν στην κλασματική λύση ένας πελάτης $j \in C$ έχει ανατεθεί σε μία πολύ μακρινή υπηρεσία j , έστω και πολύ λίγο, π.χ. $1/1000$, υπάρχει ενδεχόμενο ποτέ όταν στρογγυλοποιήσουμε τη λύση να αναθέσουμε τον i στην j ?

★ Μάλλον όχι, άρα μήπως να αλλάξουμε τη λύση (x, y) σε $(\hat{x}, \hat{y})$ έτσι ώστε το παραπάνω να μην συμβαίνει?

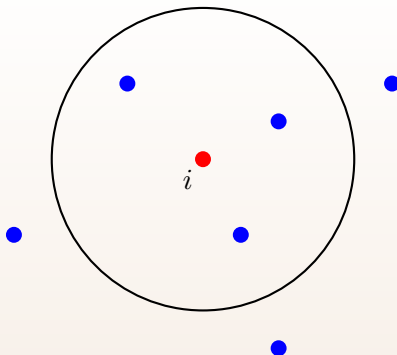
★ Τι σημαίνει μακριά? Ορίζουμε για μια παράμετρο ρ τις 'κοντινές' υπηρεσίες στο j

$$N_j := \{i \in F : d(i, j) \leq \rho \cdot C_j\},$$

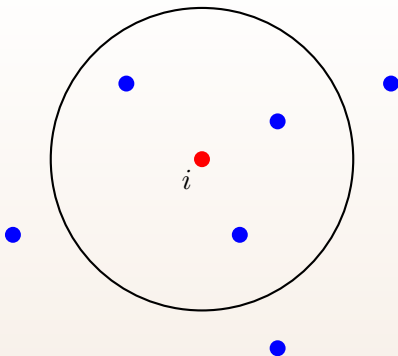
όπου C_j το κλασματικό κόστος ανάθεσης του j .



Το κέντρο είναι ο πελάτης j και η ακτίνα είναι $\rho \cdot C_j$.

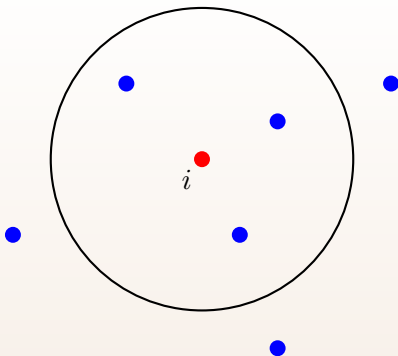


Το κέντρο είναι ο πελάτης j και η ακτίνα είναι $\rho \cdot C_j$. Τα στοιχεία εντός του κύκλου είναι το σύνολο N_j .



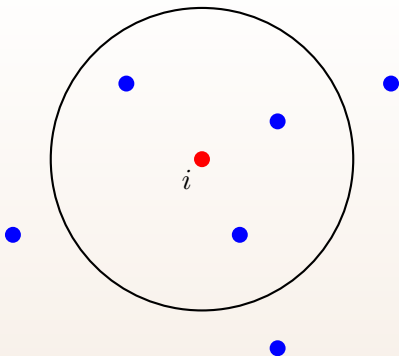
Το κέντρο είναι ο πελάτης j και η ακτίνα είναι $\rho \cdot C_j$. Τα στοιχεία εντός του κύκλου είναι το σύνολο N_j .

$$C_j \geq \sum_{i \notin N_j} x_{i,j} d(i, j)$$



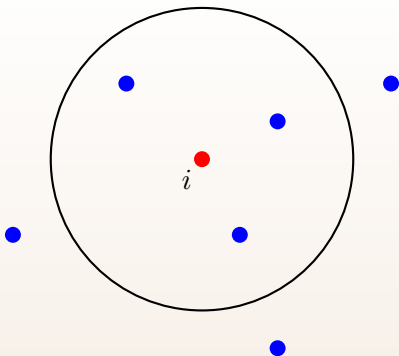
Το κέντρο είναι ο πελάτης j και η ακτίνα είναι $\rho \cdot C_j$. Τα στοιχεία εντός του κύκλου είναι το σύνολο N_j .

$$C_j \geq \sum_{i \notin N_j} x_{i,j} d(i, j) \geq \sum_{j \notin N_j} x_{i,j} \cdot (\rho C_j)$$



Το κέντρο είναι ο πελάτης j και η ακτίνα είναι $\rho \cdot C_j$. Τα στοιχεία εντός του κύκλου είναι το σύνολο N_j .

$$C_j \geq \sum_{i \notin N_j} x_{i,j} d(i,j) \geq \sum_{j \notin N_j} x_{i,j} \cdot (\rho C_j) \Rightarrow \sum_{i \notin N_j} x_{i,j} \leq \frac{1}{\rho}$$



Το κέντρο είναι ο πελάτης j και η ακτίνα είναι $\rho \cdot C_j$. Τα στοιχεία εντός του κύκλου είναι το σύνολο N_j .

$$C_j \geq \sum_{i \notin N_j} x_{i,j} d(i,j) \geq \sum_{j \notin N_j} x_{i,j} \cdot (\rho C_j) \Rightarrow \sum_{i \notin N_j} x_{i,j} \leq \frac{1}{\rho} \Rightarrow \sum_{i \in N_j} x_{i,j} \geq 1 - \frac{1}{\rho}$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε πελάτη i έχουμε ότι

$$\sum_{i \in N_j} x_{i,j} \geq 1 - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

Χαλάρωση λύσης

Αποδείξαμε ότι για κάθε πελάτη i έχουμε ότι

$$\sum_{i \in N_j} x_{i,j} \geq 1 - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

Ορίζουμε νέα λύση $(\hat{x}, \hat{y})$ με

① $\hat{x}_{i,j} = \frac{\rho}{\rho-1} x_{i,j},$

Χαλάρωση λύσης

Αποδείξαμε ότι για κάθε πελάτη i έχουμε ότι

$$\sum_{i \in N_j} x_{i,j} \geq 1 - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

Ορίζουμε νέα λύση $(\hat{x}, \hat{y})$ με

- ❶ $\hat{x}_{i,j} = \frac{\rho}{\rho-1} x_{i,j},$
- ❷ $\hat{x}_{i,j} = 0, \text{ αν } i \notin N_j,$

Αποδείξαμε ότι για κάθε πελάτη i έχουμε ότι

$$\sum_{i \in N_j} x_{i,j} \geq 1 - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

Ορίζουμε νέα λύση $(\hat{x}, \hat{y})$ με

- ❶ $\hat{x}_{i,j} = \frac{\rho}{\rho-1} x_{i,j},$
- ❷ $\hat{x}_{i,j} = 0, \text{ αν } i \notin N_j,$
- ❸ $\hat{y}_i = \frac{\rho}{\rho-1} y_i$

Χαλάρωση λύσης

Αποδείξαμε ότι για κάθε πελάτη i έχουμε ότι

$$\sum_{i \in N_j} x_{i,j} \geq 1 - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

Ορίζουμε νέα λύση $(\hat{x}, \hat{y})$ με

- ❶ $\hat{x}_{i,j} = \frac{\rho}{\rho-1} x_{i,j},$
- ❷ $\hat{x}_{i,j} = 0, \text{ αν } i \notin N_j,$
- ❸ $\hat{y}_i = \frac{\rho}{\rho-1} y_i$

$$\sum_{i \in F} f_i \hat{y}_i + \sum_{i \in F, j \in C} d(i, j) \hat{x}_{i,j} \leq \frac{\rho}{\rho-1} \cdot (F_{LP} + C_{LP})$$

$$\sum_{i \in F} \hat{x}_{i,j} \geq 1, \forall j \in C$$

$$\hat{x}_{i,j} \leq \hat{y}_i, \forall i \in F, j \in C$$

$$\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_i \geq 0, \forall j \in C, i \in F$$

Στρογγυλοποίηση της λύσης $(\hat{x}, \hat{y})$

- 1: $U \leftarrow C, R \leftarrow \emptyset$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Βρες $j \in U$ με το ελάχιστο C_j και κάνε $R \leftarrow R \cup \{j\}$.
- 4: $F_j \leftarrow \{i \in F : \hat{x}_{ij} > 0\}$
- 5: Αφαίρεσε όλους τους $j' \in U$ ώστε $\hat{x}_{i,j'} > 0$ για κάποιο $i \in F_j$
- 6: Για $j \in R$ άνοιξε την υπηρεσία F_j με το μικρότερο κόστος f_i .
- 7: Κάθε πελάτης αντίκειται στην κοντινότερη ανοικτή υπηρεσία.

Ο παραπάνω αλγόριθμος δημιουργεί μια ομαδοποίηση των υπηρεσιών και των πελατών:

Στρογγυλοποίηση της λύσης $(\hat{x}, \hat{y})$

- 1: $U \leftarrow C, R \leftarrow \emptyset$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Βρες $j \in U$ με το ελάχιστο C_j και κάνε $R \leftarrow R \cup \{j\}$.
- 4: $F_j \leftarrow \{i \in F : \hat{x}_{ij} > 0\}$
- 5: Αφαίρεσε όλους τους $j' \in U$ ώστε $\hat{x}_{i,j'} > 0$ για κάποιο $i \in F_j$
- 6: Για $j \in R$ άνοιξε την υπηρεσία F_j με το μικρότερο κόστος f_i .
- 7: Κάθε πελάτης αντίκειται στην κοντινότερη ανοικτή υπηρεσία.

Ο παραπάνω αλγόριθμος δημιουργεί μια ομαδοποίηση των υπηρεσιών και των πελατών:

- ❶ Το R περιέχει πελάτες, οι οποίοι αποκαλούνται *αντιπρόσωποι*.

Στρογγυλοποίηση της λύσης $(\hat{x}, \hat{y})$

- 1: $U \leftarrow C, R \leftarrow \emptyset$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Βρες $j \in U$ με το ελάχιστο C_j και κάνε $R \leftarrow R \cup \{j\}$.
- 4: $F_j \leftarrow \{i \in F : \hat{x}_{ij} > 0\}$
- 5: Αφαίρεσε όλους τους $j' \in U$ ώστε $\hat{x}_{i,j'} > 0$ για κάποιο $i \in F_j$
- 6: Για $j \in R$ άνοιξε την υπηρεσία F_j με το μικρότερο κόστος f_i .
- 7: Κάθε πελάτης αντίκειται στην κοντινότερη ανοικτή υπηρεσία.

Ο παραπάνω αλγόριθμος δημιουργεί μια ομαδοποίηση των υπηρεσιών και των πελατών:

- ❶ Το R περιέχει πελάτες, οι οποίοι αποκαλούνται *αντιπρόσωποι*.
- ❷ Σε κάθε πελάτη $j \in R$ αντιστοιχούν κάποια πιθανά $i \in F$ (το σύνολο F_j), και κανένα i δεν αντιστοιχεί σε δύο πελάτες στο R .

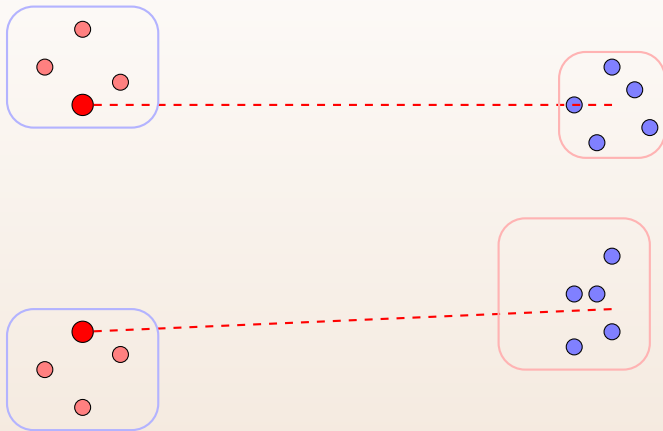
Στρογγυλοποίηση της λύσης $(\hat{x}, \hat{y})$

- 1: $U \leftarrow C, R \leftarrow \emptyset$
- 2: Όσο $F \neq \emptyset$
- 3: Βρες $j \in U$ με το ελάχιστο C_j και κάνε $R \leftarrow R \cup \{j\}$.
- 4: $F_j \leftarrow \{i \in F : \hat{x}_{ij} > 0\}$
- 5: Αφαίρεσε όλους τους $j' \in U$ ώστε $\hat{x}_{i,j'} > 0$ για κάποιο $i \in F_j$
- 6: Για $j \in R$ άνοιξε την υπηρεσία F_j με το μικρότερο κόστος f_i .
- 7: Κάθε πελάτης αντίκειται στην κοντινότερη ανοικτή υπηρεσία.

Ο παραπάνω αλγόριθμος δημιουργεί μια ομαδοποίηση των υπηρεσιών και των πελατών:

- ❶ Το R περιέχει πελάτες, οι οποίοι αποκαλούνται *αντιπρόσωποι*.
- ❷ Σε κάθε πελάτη $j \in R$ αντιστοιχούν κάποια πιθανά $i \in F$ (το σύνολο F_j), και κανένα i δεν αντιστοιχεί σε δύο πελάτες στο R .
- ❸ Κάθε $j' \in C$ αντιστοιχεί και αυτό σε έναν αντιπρόσωπο $j \in R$.

Οι μπλες ομάδες είναι τα σύνολα F_j και οι αντιπρόσωποι οι έντονοι κόκκινοι κόμβοι. Από κάθε F_j θα ανοίξουμε την φθηνότερη υπηρεσία.



Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $j \in R$ ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{y}_i \geq 1$.

Ανάλυση κόστους ανοίγματος

Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $j \in R$ ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{y}_i \geq 1$.

Απόδειξη. Πρέπει για κάθε $j \in R$ να ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{x}_{i,j} \geq 1$

Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $j \in R$ ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{y}_i \geq 1$.

Απόδειξη. Πρέπει για κάθε $j \in R$ να ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{x}_{i,j} \geq 1$ και μαζί με το $\hat{y}_i \geq \hat{x}_{i,j}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $j \in R$ ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{y}_i \geq 1$.

Απόδειξη. Πρέπει για κάθε $j \in R$ να ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{x}_{i,j} \geq 1$ και μαζί με το $\hat{y}_i \geq \hat{x}_{i,j}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Εφόσον για κάθε F_j ανοίγουμε την φθηνότερη υπηρεσία $\sigma(j)$ ισχύει ότι

$$f_{\sigma(j)} \leq \sum_{i \in F_j} f_i \hat{y}_i,$$

Ανάλυση κόστους ανοίγματος

Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $j \in R$ ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{y}_i \geq 1$.

Απόδειξη. Πρέπει για κάθε $j \in R$ να ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{x}_{i,j} \geq 1$ και μαζί με το $\hat{y}_i \geq \hat{x}_{i,j}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Εφόσον για κάθε F_j ανοίγουμε την φθηνότερη υπηρεσία $\sigma(j)$ ισχύει ότι

$$f_{\sigma(j)} \leq \sum_{i \in F_j} f_i \hat{y}_i,$$

άρα

$$F_{ALG} = \sum_{j \in R} f_{\sigma(j)}$$

Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $j \in R$ ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{y}_i \geq 1$.

Απόδειξη. Πρέπει για κάθε $j \in R$ να ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{x}_{i,j} \geq 1$ και μαζί με το $\hat{y}_i \geq \hat{x}_{i,j}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Εφόσον για κάθε F_j ανοίγουμε την φθηνότερη υπηρεσία $\sigma(j)$ ισχύει ότι

$$f_{\sigma(j)} \leq \sum_{i \in F_j} f_i \hat{y}_i,$$

άρα

$$F_{ALG} = \sum_{j \in R} f_{\sigma(j)} \leq \sum_{j \in R} \sum_{i \in F_j} f_i \hat{y}_i$$

Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $j \in R$ ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{y}_i \geq 1$.

Απόδειξη. Πρέπει για κάθε $j \in R$ να ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{x}_{i,j} \geq 1$ και μαζί με το $\hat{y}_i \geq \hat{x}_{i,j}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Εφόσον για κάθε F_j ανοίγουμε την φθηνότερη υπηρεσία $\sigma(j)$ ισχύει ότι

$$f_{\sigma(j)} \leq \sum_{i \in F_j} f_i \hat{y}_i,$$

άρα

$$F_{ALG} = \sum_{j \in R} f_{\sigma(j)} \leq \sum_{j \in R} \sum_{i \in F_j} f_i \hat{y}_i = \sum_{i \in F} f_i \hat{y}_i$$

Ανάλυση κόστους ανοίγματος

Θα δείξουμε ότι $F_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $j \in R$ ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{y}_i \geq 1$.

Απόδειξη. Πρέπει για κάθε $j \in R$ να ισχύει ότι $\sum_{i \in F_j} \hat{x}_{i,j} \geq 1$ και μαζί με το $\hat{y}_i \geq \hat{x}_{i,j}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Εφόσον για κάθε F_j ανοίγουμε την φθηνότερη υπηρεσία $\sigma(j)$ ισχύει ότι

$$f_{\sigma(j)} \leq \sum_{i \in F_j} f_i \hat{y}_i,$$

άρα

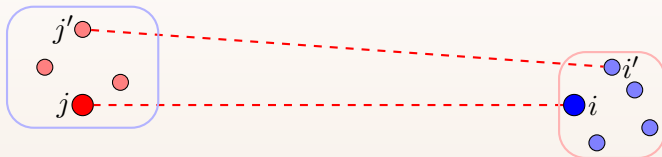
$$F_{ALG} = \sum_{j \in R} f_{\sigma(j)} \leq \sum_{j \in R} \sum_{i \in F_j} f_i \hat{y}_i = \sum_{i \in F} f_i \hat{y}_i \leq \frac{\rho}{\rho-1} F_{LP}$$

Ανάλυση κόστους ανάθεσης

Ας επικεντρωθούμε σε μια ομάδα που αντιστοιχεί σε έναν αντιπρόσωπο j . Το κόστος ανάθεσης του j είναι το πολύ ρC_j .

Ανάλυση κόστους ανάθεσης

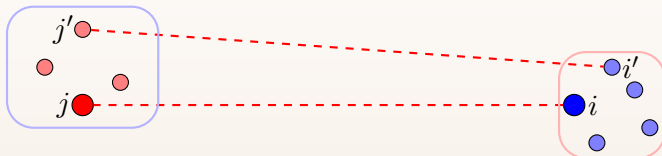
Ας επικεντρωθούμε σε μια ομάδα που αντιστοιχεί σε έναν αντιπρόσωπο j . Το κόστος ανάθεσης του j είναι το πολύ ρC_j .



Έστω $j' \in C \setminus R$ με αντιπρόσωπο τον j .

Ανάλυση κόστους ανάθεσης

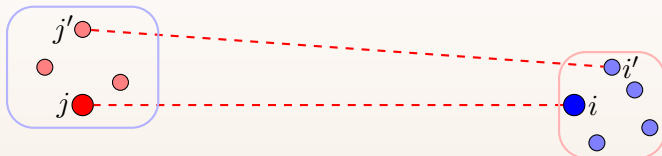
Ας επικεντρωθούμε σε μια ομάδα που αντιστοιχεί σε έναν αντιπρόσωπο j . Το κόστος ανάθεσης του j είναι το πολύ ρC_j .



Έστω $j' \in C \setminus R$ με αντιπρόσωπο τον j . Έστω i' η υπηρεσία που έδωσε τον j' .

Ανάλυση κόστους ανάθεσης

Ας επικεντρωθούμε σε μια ομάδα που αντιστοιχεί σε έναν αντιπρόσωπο j . Το κόστος ανάθεσης του j είναι το πολύ ρC_j .

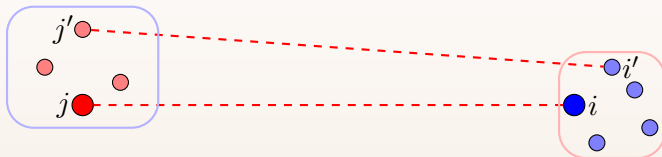


Έστω $j' \in C \setminus R$ με αντιπρόσωπο τον j . Έστω i' η υπηρεσία που έδωξε τον j' .

$$d(j', i)$$

Ανάλυση κόστους ανάθεσης

Ας επικεντρωθούμε σε μια ομάδα που αντιστοιχεί σε έναν αντιπρόσωπο j . Το κόστος ανάθεσης του j είναι το πολύ ρC_j .

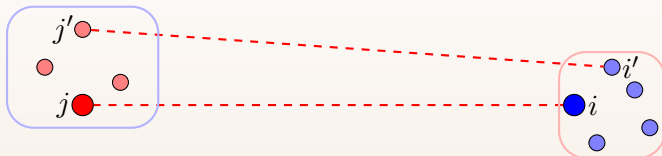


Έστω $j' \in C \setminus R$ με αντιπρόσωπο τον j . Έστω i' η υπηρεσία που έδωξε τον j' .

$$d(j', i) \leq d(j', i') + d(i', j) + d(j, i)$$

Ανάλυση κόστους ανάθεσης

Ας επικεντρωθούμε σε μια ομάδα που αντιστοιχεί σε έναν αντιπρόσωπο j . Το κόστος ανάθεσης του j είναι το πολύ ρC_j .



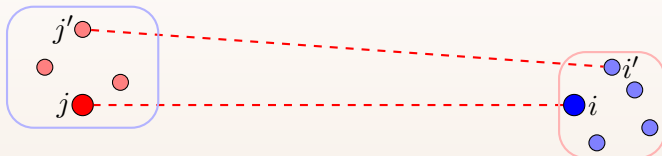
Έστω $j' \in C \setminus R$ με αντιπρόσωπο τον j . Έστω i' η υπηρεσία που έδωσε τον j' .

$$d(j', i) \leq d(j', i') + d(i', j) + d(j, i).$$

$$\leq \rho C_{j'} + \rho C_j + \rho C_j$$

Ανάλυση κόστους ανάθεσης

Ας επικεντρωθούμε σε μια ομάδα που αντιστοιχεί σε έναν αντιπρόσωπο j . Το κόστος ανάθεσης του j είναι το πολύ ρC_j .



Έστω $j' \in C \setminus R$ με αντιπρόσωπο τον j . Έστω i' η υπηρεσία που έδιωξε τον j' .

$$d(j', i) \leq d(j', i') + d(i', j) + d(j, i).$$

$$\leq \rho C_{j'} + \rho C_j + \rho C_j \leq 3\rho C_{j'} \Rightarrow C_{ALG} \leq 3\rho \sum_{j \in C} C_j = 3\rho C_{LP}$$

Συνολικά, έχουμε ότι

$$F_{ALG} + C_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho - 1} F_{LP} + 3\rho C_{LP},$$

Βελτιστοποιώντας το ρ

Συνολικά, έχουμε ότι

$$F_{ALG} + C_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho - 1} F_{LP} + 3\rho C_{LP},$$

το οποίο για $\rho = \frac{4}{3}$ μας δίνει

$$F_{ALG} + C_{ALG} \leq 4(F_{LP} + C_{LP}),$$

άρα έχουμε αλγόριθμο με λόγο προσέγγισης 4.

Συνολικά, έχουμε ότι

$$F_{ALG} + C_{ALG} \leq \frac{\rho}{\rho - 1} F_{LP} + 3\rho C_{LP},$$

το οποίο για $\rho = \frac{4}{3}$ μας δίνει

$$F_{ALG} + C_{ALG} \leq 4(F_{LP} + C_{LP}),$$

άρα έχουμε αλγόριθμο με λόγο προσέγγισης 4.

Ιστορικό σημείωμα: Ο καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος (πολυωνυμικού χρόνου) πετυχαίνει λόγο προσέγγισης 1.488 [Shi Li, 2013].