

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι μέσω Πιθανοτικής Στρογγυλοποίησης: Μέρος I

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στρογγυλοποίηση Τυχαίων Προγραμμάτων.

Μέχρι στιγμής, όλοι οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι που είδαμε ήταν πλήρως ντετερμινιστικοί. Μπορούμε να κάνουμε καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε τυχειότητα;

Θα σχεδιάσουμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους πολυωνυμικού χρόνου οι οποίοι έχουν έναν λόγο προσέγγισης κατά μέσο όρο.

Κανονικό Παράδειγμα: Κάλυμμα Συνόλου

Δοθέντων συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_m$ με $U := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, ζητείται να βρεθεί ένα υποσύνολο $S \subseteq [m]$ ελάχιστης πληθικότητας έτσι ώστε

$$\bigcup_{j \in S} S_j = U.$$

Κανονικό Παράδειγμα: Κάλυμμα Συνόλου

Δοθέντων συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_m$ με $U := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, ζητείται να βρεθεί ένα υποσύνολο $S \subseteq [m]$ ελάχιστης πληθικότητας έτσι ώστε

$$\bigcup_{j \in S} S_j = U.$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\ & \sum_{j: i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω μια λύση x του γραμμικού προγράμματος.

Κανονικό Παράδειγμα: Κάλυμμα Συνόλου

Δοθέντων συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_m$ με $U := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, ζητείται να βρεθεί ένα υποσύνολο $S \subseteq [m]$ ελάχιστης πληθικότητας έτσι ώστε

$$\bigcup_{j \in S} S_j = U.$$

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\ &\sum_{j: i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U \\ &x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω μια λύση x του γραμμικού προγράμματος.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη x ως κατανομή πιθανότητας;

Κανονικό Παράδειγμα: Κάλυμμα Συνόλου

Δοθέντων συνόλων $S_1, S_2, \dots, S_m$ με $U := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, ζητείται να βρεθεί ένα υποσύνολο $S \subseteq [m]$ ελάχιστης πληθικότητας έτσι ώστε

$$\bigcup_{j \in S} S_j = U.$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\ & \sum_{j: i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω μια λύση x του γραμμικού προγράμματος.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη x ως κατανομή πιθανότητας;

Αν ναι, μετά θα τη χρησιμοποιήσω για να ρίξω ζάρια ποια σύνολα θα βάλω στο κάλυμμα μου!

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\
 &\sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U \\
 &x_j \geq 0
 \end{aligned}$$

(★) Πάρε κάθε j στο κάλυμμα με πιθανότητα $p_j := \min\{1, \ln n \cdot x_j\}$.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\
 &\quad \sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U \\
 &\quad x_j \geq 0
 \end{aligned}$$

(*) Πάρε κάθε j στο κάλυμμα με πιθανότητα $p_j := \min\{1, \ln n \cdot x_j\}$.

(†) Αν κάποιος i , δεν καλύφθηκε, πάρε στο κάλυμμα το σύνολο ελάχιστου κόστους το οποίο το καλύπτει.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} \quad \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\
 &\quad \sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U \\
 &\quad x_j \geq 0
 \end{aligned}$$

($\star$) Πάρε κάθε j στο κάλυμμα με πιθανότητα $p_j := \min\{1, \ln n \cdot x_j\}$.

($\dagger$) Αν κάποιος i , δεν καλύφθηκε, πάρε στο κάλυμμα το σύνολο ελάχιστου κόστους το οποίο το καλύπτει.

Θεώρημα

Ο παραπάνω αλγόριθμος παράγει ένα κάλυμμα με αναμενόμενο κόστος $(1 + \ln n) \cdot OPT$.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\
 &\sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U \\
 &x_j \geq 0
 \end{aligned}$$

($\star$) Πάρε κάθε j στο κάλυμμα με πιθανότητα $p_j := \min\{1, \ln n \cdot x_j\}$.

($\dagger$) Αν κάποιος i , δεν καλύφθηκε, πάρε στο κάλυμμα το σύνολο ελάχιστου κόστους το οποίο το καλύπτει.

Θεώρημα

Ο παραπάνω αλγόριθμος παράγει ένα κάλυμμα με αναμενόμενο κόστος $(1 + \ln n) \cdot OPT$.

Έστω $X_\star, X_\dagger$ οι τυχαίες μεταβλητές που αντιστοιχούν στα κόστη στις γραμμές ($\star$), ($\dagger$) αντίστοιχα. Θα μελετήσουμε το $X_\star + X_\dagger$.

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \ E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j$$

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \ E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j \leq \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot \ln n \cdot x_j$$

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \ E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j \leq \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot \ln n \cdot x_j \leq \ln n \cdot OPT.$$

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \ E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j \leq \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot \ln n \cdot x_j \leq \ln n \cdot OPT.$$

($\dagger$) Μπορούμε να γράψουμε $X_{\dagger} = \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) Y_i$, όπου Y_i είναι τυχαία μεταβλητή που υποδεικνύει αν το στοιχείο i έμεινε ακάλυπτο από το ($\star$) και $S^{(i)}$ είναι το σύνολο ελάχιστου κόστους στο οποίο το i συμμετέχει.

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \ E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j \leq \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot \ln n \cdot x_j \leq \ln n \cdot OPT.$$

($\dagger$) Μπορούμε να γράψουμε $X_{\dagger} = \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) Y_i$, όπου Y_i είναι τυχαία μεταβλητή που υποδεικνύει αν το στοιχείο i έμεινε ακάλυπτο από το ($\star$) και $S^{(i)}$ είναι το σύνολο ελάχιστου κόστους στο οποίο το i συμμετέχει.

$$E[Y_j] = \Pr[Y_j = 1]$$

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \ E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j \leq \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot \ln n \cdot x_j \leq \ln n \cdot OPT.$$

($\dagger$) Μπορούμε να γράψουμε $X_{\dagger} = \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) Y_i$, όπου Y_i είναι τυχαία μεταβλητή που υποδεικνύει αν το στοιχείο i έμεινε ακάλυπτο από το ($\star$) και $S^{(i)}$ είναι το σύνολο ελάχιστου κόστους στο οποίο το i συμμετέχει.

$$E[Y_j] = \Pr[Y_j = 1] = \prod_{j:i \in S_j} (1 - p_j) \leq \prod_{j:i \in S_j} e^{-\ln n \cdot x_j}$$

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \ E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j \leq \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot \ln n \cdot x_j \leq \ln n \cdot OPT.$$

($\dagger$) Μπορούμε να γράψουμε $X_{\dagger} = \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) Y_i$, όπου Y_i είναι τυχαία μεταβλητή που υποδεικνύει αν το στοιχείο i έμεινε ακάλυπτο από το ($\star$) και $S^{(i)}$ είναι το σύνολο ελάχιστου κόστους στο οποίο το i συμμετέχει.

$$E[Y_j] = \Pr[Y_j = 1] = \prod_{j:i \in S_j} (1 - p_j) \leq \prod_{j:i \in S_j} e^{-\ln n \cdot x_j} = n^{\sum_{j:i \in S_j} x_j} \leq \frac{1}{n}.$$

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \quad E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j \leq \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot \ln n \cdot x_j \leq \ln n \cdot OPT.$$

($\dagger$) Μπορούμε να γράψουμε $X_{\dagger} = \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) Y_i$, όπου Y_i είναι τυχαία μεταβλητή που υποδεικνύει αν το στοιχείο i έμεινε ακάλυπτο από το ($\star$) και $S^{(i)}$ είναι το σύνολο ελάχιστου κόστους στο οποίο το i συμμετέχει.

$$E[Y_j] = \Pr[Y_j = 1] = \prod_{j:i \in S_j} (1 - p_j) \leq \prod_{j:i \in S_j} e^{-\ln n \cdot x_j} = n^{\sum_{j:i \in S_j} x_j} \leq \frac{1}{n}.$$

$$E[Y_{\dagger}] = \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) E[Y_i]$$

$$E[X_{\star} + X_{\dagger}] = E[X_{\star}] + E[X_{\dagger}],$$

$$(\star) \quad E[X_{\star}] = \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot p_j \leq \sum_{j=1}^m c(S_j) \cdot \ln n \cdot x_j \leq \ln n \cdot OPT.$$

($\dagger$) Μπορούμε να γράψουμε $X_{\dagger} = \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) Y_i$, όπου Y_i είναι τυχαία μεταβλητή που υποδεικνύει αν το στοιχείο i έμεινε ακάλυπτο από το ($\star$) και $S^{(i)}$ είναι το σύνολο ελάχιστου κόστους στο οποίο το i συμμετέχει.

$$E[Y_j] = \Pr[Y_j = 1] = \prod_{j:i \in S_j} (1 - p_j) \leq \prod_{j:i \in S_j} e^{-\ln n \cdot x_j} = n^{\sum_{j:i \in S_j} x_j} \leq \frac{1}{n}.$$

$$E[Y_{\dagger}] = \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) E[Y_i] \leq \frac{1}{n} \sum_{i \in U} c(S^{(i)}) \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i \in U} OPT = OPT.$$

Πρόβλημα ανεξάρτητου συνόλου.

Δοθέντος γραφήματος $G(V, E)$ με βάρη στις κορυφές w_u να βρεθεί ένα ανεξάρτητο σύνολο $I \subseteq V$ όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βάρους.

Πρόβλημα ανεξάρτητου συνόλου.

Δοθέντος γραφήματος $G(V, E)$ με βάρη στις κορυφές w_u να βρεθεί ένα ανεξάρτητο σύνολο $I \subseteq V$ όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βάρους.

$$\begin{aligned} \text{maximize } & \sum_{u \in V} x_u \\ & x_u + x_v \leq 1, \forall e = (u, v) \in E \\ & x_u \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω x μια λύση του παραπάνω προγράμματος.

Πρόβλημα ανεξάρτητου συνόλου.

Δοθέντος γραφήματος $G(V, E)$ με βάρη στις κορυφές w_u να βρεθεί ένα ανεξάρτητο σύνολο $I \subseteq V$ όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βάρους.

$$\begin{aligned} \text{maximize } & \sum_{u \in V} x_u \\ & x_u + x_v \leq 1, \forall e = (u, v) \in E \\ & x_u \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω x μια λύση του παραπάνω προγράμματος.

Μπορούμε πάλι να δούμε τα x_u ως κατανομές πιθανότητας;

Πρόβλημα ανεξάρτητου συνόλου.

Δοθέντος γραφήματος $G(V, E)$ με βάρη στις κορυφές w_u να βρεθεί ένα ανεξάρτητο σύνολο $I \subseteq V$ όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βάρους.

$$\begin{aligned} \text{maximize } & \sum_{u \in V} x_u \\ & x_u + x_v \leq 1, \forall e = (u, v) \in E \\ & x_u \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω x μια λύση του παραπάνω προγράμματος.

Μπορούμε πάλι να δούμε τα x_u ως κατανομές πιθανότητας;
Θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν $2\sqrt{m}$ -προσεγγιστικό (στη μέση τιμή) αλγόριθμο.

Πιθανοτικός αλγόριθμος για ανεξάρτητο σύνολο.

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Ανεξάρτητο Σύνολο

- 1: $W := \max_{u \in V} w(u)$.
- 2: Έστω x μια βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος.
- 3: Αν x έχει κέρδος το πολύ $2\sqrt{m} \cdot W$
- 4: επέστρεψε κορυφή u βάρους W .
- 5: Φτιάξε ένα σύνολο I στο οποίο κάθε κορυφή συμμετέχει με πιθανότητα $\frac{x_u}{\sqrt{m}}$.
- 6: Για κάθε ακμή $(u, v) \in (I \times I) \cap E$, διέγραψε και τα δύο u, v από το I .
- 7: Επέστρεψε το I .

Θεώρημα

Πιθανοτικός αλγόριθμος για ανεξάρτητο σύνολο.

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Ανεξάρτητο Σύνολο

- 1: $W := \max_{u \in V} w(u)$.
- 2: Έστω x μια βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος.
- 3: Αν x έχει κέρδος το πολύ $2\sqrt{m} \cdot W$
- 4: επέστρεψε κορυφή u βάρους W .
- 5: Φτιάξε ένα σύνολο I στο οποίο κάθε κορυφή συμμετέχει με πιθανότητα $\frac{x_u}{\sqrt{m}}$.
- 6: Για κάθε ακμή $(u, v) \in (I \times I) \cap E$, διέγραψε και τα δύο u, v από το I .
- 7: Επέστρεψε το I .

Θεώρημα

Το I είναι ανεξάρτητο σύνολο με $E[w(I)] \geq \frac{OPT}{2\sqrt{m}}$.

★ Αν x έχει κέρδος το πολύ $2\sqrt{m} \cdot W$, τότε $OPT \leq 2\sqrt{m} \cdot W$ και η κορυφή μέγιστου βάρους είναι από μόνη της επαρκής για $(2\sqrt{m})$ -προσέγγιση.

Ανάλυση.

★ Αν x έχει κέρδος το πολύ $2\sqrt{m} \cdot W$, τότε $OPT \leq 2\sqrt{m} \cdot W$ και η κορυφή μέγιστου βάρους είναι από μόνη της επαρκής για $(2\sqrt{m})$ -προσέγγιση.

★ Υποθέτουμε διαφορετικά, και έστω $\tilde{I}$ το αρχικό δειγματοληπτημένο σύνολο πριν τις διαγραφές

★ Αν x έχει κέρδος το πολύ $2\sqrt{m} \cdot W$, τότε $OPT \leq 2\sqrt{m} \cdot W$ και η κορυφή μέγιστου βάρους είναι από μόνη της επαρκής για $(2\sqrt{m})$ -προσέγγιση.

★ Υποθέτουμε διαφορετικά, και έστω $\tilde{I}$ το αρχικό δειγματοληπτημένο σύνολο πριν τις διαγραφές και D οι διαγραφωμένες κορυφές στο επόμενο βήμα.

★ Αν x έχει κέρδος το πολύ $2\sqrt{m} \cdot W$, τότε $OPT \leq 2\sqrt{m} \cdot W$ και η κορυφή μέγιστου βάρους είναι από μόνη της επαρκής για $(2\sqrt{m})$ -προσέγγιση.

★ Υποθέτουμε διαφορετικά, και έστω $\tilde{I}$ το αρχικό δειγματοληπτημένο σύνολο πριν τις διαγραφές και D οι διαγραφμένες κορυφές στο επόμενο βήμα.

Έστω X_u η δείκτρια ότι $u \in \tilde{I}$ και Z_{uv} η δείκτρια για κάθε $(u, v) \in E \cap (D \times D)$.

★ Αν x έχει κέρδος το πολύ $2\sqrt{m} \cdot W$, τότε $OPT \leq 2\sqrt{m} \cdot W$ και η κορυφή μέγιστου βάρους είναι από μόνη της επαρκής για $(2\sqrt{m})$ -προσέγγιση.

★ Υποθέτουμε διαφορετικά, και έστω $\tilde{I}$ το αρχικό δειγματοληπτημένο σύνολο πριν τις διαγραφές και D οι διαγραφμένες κορυφές στο επόμενο βήμα.

Έστω X_u η δείκτρια ότι $u \in \tilde{I}$ και Z_{uv} η δείκτρια για κάθε $(u, v) \in E \cap (D \times D)$.

$$w(I) = w(\tilde{I}) - w(D)$$

★ Αν x έχει κέρδος το πολύ $2\sqrt{m} \cdot W$, τότε $OPT \leq 2\sqrt{m} \cdot W$ και η κορυφή μέγιστου βάρους είναι από μόνη της επαρκής για $(2\sqrt{m})$ -προσέγγιση.

★ Υποθέτουμε διαφορετικά, και έστω $\tilde{I}$ το αρχικό δειγματοληπτημένο σύνολο πριν τις διαγραφές και D οι διαγραφωμένες κορυφές στο επόμενο βήμα.

Έστω X_u η δείκτρια ότι $u \in \tilde{I}$ και Z_{uv} η δείκτρια για κάθε $(u, v) \in E \cap (D \times D)$.

$$w(I) = w(\tilde{I}) - w(D) \geq \sum_{u \in \tilde{I}} w_u X_u - \sum_{(u,v) \in D \times D} (w_u + w_v) Z_{u,v}.$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[Z_{uv}] = \frac{x_u x_v}{m}$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[Z_{uv}] = \frac{x_u x_v}{m} \leq \frac{1}{m} \left(\frac{x_u + x_v}{2} \right)^2$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[Z_{uv}] = \frac{x_u x_v}{m} \leq \frac{1}{m} \left(\frac{x_u + x_v}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4m}$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[Z_{uv}] = \frac{x_u x_v}{m} \leq \frac{1}{m} \left(\frac{x_u + x_v}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4m}$$

$$w(D) \leq \frac{1}{4m} \sum_{(u,v) \in E} (w_u + w_v) =$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[Z_{uv}] = \frac{x_u x_v}{m} \leq \frac{1}{m} \left(\frac{x_u + x_v}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4m}$$

$$w(D) \leq \frac{1}{4m} \sum_{(u,v) \in E} (w_u + w_v) = \frac{1}{4m} \sum_{u \in V} \deg(u) w_u \leq W.$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[Z_{uv}] = \frac{x_u x_v}{m} \leq \frac{1}{m} \left(\frac{x_u + x_v}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4m}$$

$$w(D) \leq \frac{1}{4m} \sum_{(u,v) \in E} (w_u + w_v) = \frac{1}{4m} \sum_{u \in V} \deg(u) w_u \leq W.$$

$$w(I) \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}} - W$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[Z_{uv}] = \frac{x_u x_v}{m} \leq \frac{1}{m} \left(\frac{x_u + x_v}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4m}$$

$$w(D) \leq \frac{1}{4m} \sum_{(u,v) \in E} (w_u + w_v) = \frac{1}{4m} \sum_{u \in V} \deg(u) w_u \leq W.$$

$$w(I) \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}} - W \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}} - \frac{OPT}{2\sqrt{m}}$$

$$E[X_u] = \frac{x_u}{\sqrt{m}} \Rightarrow E[w(\tilde{I})] \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}}.$$

$$E[Z_{uv}] = \frac{x_u x_v}{m} \leq \frac{1}{m} \left(\frac{x_u + x_v}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4m}$$

$$w(D) \leq \frac{1}{4m} \sum_{(u,v) \in E} (w_u + w_v) = \frac{1}{4m} \sum_{u \in V} \deg(u) w_u \leq W.$$

$$w(I) \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}} - W \geq \frac{OPT}{\sqrt{m}} - \frac{OPT}{2\sqrt{m}} \geq \frac{OPT}{2\sqrt{m}}.$$

Κάλυμμα Κορυφών σε k -μερείς υπεργράφους.

Ένας υπερ-γράφος $G(V, E)$ λέγεται k -μερής αν έχει σύνολο κορυφών $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, ώστε κάθε ακμή e να έχει το πολύ μία κορυφή σε κάθε V_i .

Κάλυμμα Κορυφών σε k -μερείς υπεργράφους.

Ένας υπερ-γράφος $G(V, E)$ λέγεται k -μερής αν έχει σύνολο κορυφών $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, ώστε κάθε ακμή e να έχει το πολύ μία κορυφή σε κάθε V_i .

Δοθέντος k -μερούς υπερ-γράφου $G(V, E)$ με κόστη c_u στις κορυφές να βρεθεί ένα υποσύνολο κορυφών $V' \subseteq V$ ελάχιστου κόστους έτσι ώστε κάθε ακμή $e \in E$ να έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο V .

Κάλυμμα Κορυφών σε k -μερείς υπεργράφους.

Ένας υπερ-γράφος $G(V, E)$ λέγεται k -μερής αν έχει σύνολο κορυφών $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, ώστε κάθε ακμή e να έχει το πολύ μία κορυφή σε κάθε V_i .

Δοθέντος k -μερούς υπερ-γράφου $G(V, E)$ με κόστη c_u στις κορυφές να βρεθεί ένα υποσύνολο κορυφών $V' \subseteq V$ ελάχιστου κόστους έτσι ώστε κάθε ακμή $e \in E$ να έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο V' .

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{j=1}^m c_u x_u \\ & \quad \sum_{u \in e} x_u \geq 1, \forall e \in E \\ & \quad 0 \leq x_u \leq 1 \end{aligned}$$

Κάλυμμα Κορυφών σε k -μερείς υπεργράφους.

Ένας υπερ-γράφος $G(V, E)$ λέγεται k -μερής αν έχει σύνολο κορυφών $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, ώστε κάθε ακμή e να έχει το πολύ μία κορυφή σε κάθε V_i .

Δοθέντος k -μερούς υπερ-γράφου $G(V, E)$ με κόστη c_u στις κορυφές να βρεθεί ένα υποσύνολο κορυφών $V' \subseteq V$ ελάχιστου κόστους έτσι ώστε κάθε ακμή $e \in E$ να έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο V' .

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{j=1}^m c_u x_u \\ & \quad \sum_{u \in e} x_u \geq 1, \forall e \in E \\ & \quad 0 \leq x_u \leq 1 \end{aligned}$$

Πως μπορούμε να πάρουμε προσεγγιστικό αλγόριθμο χρησιμοποιώντας μια λύση του κλασματικού προγράμματος;

Κάλυμμα Κορυφών σε k -μερείς υπεργράφους.

Ένας υπερ-γράφος $G(V, E)$ λέγεται k -μερής αν έχει σύνολο κορυφών $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, ώστε κάθε ακμή e να έχει το πολύ μία κορυφή σε κάθε V_i .

Δοθέντος k -μερούς υπερ-γράφου $G(V, E)$ με κόστη c_u στις κορυφές να βρεθεί ένα υποσύνολο κορυφών $V' \subseteq V$ ελάχιστου κόστους έτσι ώστε κάθε ακμή $e \in E$ να έχει τουλάχιστον ένα άκρο της στο V' .

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{j=1}^m c_u x_u \\ & \quad \sum_{u \in e} x_u \geq 1, \forall e \in E \\ & \quad 0 \leq x_u \leq 1 \end{aligned}$$

Πως μπορούμε να πάρουμε προσεγγιστικό αλγόριθμο χρησιμοποιώντας μια λύση του κλασματικού προγράμματος;

Για $k = 2$ ποιο γνωστό πρόβλημα έχουμε?

Κάλυμμα κορυφών σε διμερείς γράφους ($k = 2$).

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Διμερή Γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Παίρνουμε ένα τυχαία ένα r στο $[0, 1]$ (ομοιόμορφα).
- 4: Για κάθε $u \in V_1$ βάζουμε $u \in C$ αν $x_u \geq r$.
- 5: Για κάθε $v \in V_2$ βάζουμε $v \in C$ αν $x_v \geq 1 - r$.
- 6: Επέστρεψε το C .

Κάλυμμα κορυφών σε διμερείς γράφους ($k = 2$).

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Διμερή Γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Παίρνουμε ένα τυχαία ένα r στο $[0, 1]$ (ομοιόμορφα).
- 4: Για κάθε $u \in V_1$ βάζουμε $u \in C$ αν $x_u \geq r$.
- 5: Για κάθε $v \in V_2$ βάζουμε $v \in C$ αν $x_v \geq 1 - r$.
- 6: Επέστρεψε το C .

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{u \in C} c_u \right] &= \sum_{u \in V_1} c_u \cdot \Pr[u \in C] + \sum_{v \in V_2} c_v \cdot \Pr[v \in C] = \\ &= \sum_{u \in C} c_u \cdot x_u + \sum_{v \in V_2} c_v \cdot x_v = OPT_{LP} \Rightarrow E[c(C)] = OPT_{LP}! \end{aligned}$$

Κάλυμμα κορυφών σε διμερείς γράφους ($k = 2$).

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Διμερή Γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Παίρνουμε ένα τυχαία ένα r στο $[0, 1]$ (ομοιόμορφα).
- 4: Για κάθε $u \in V_1$ βάζουμε $u \in C$ αν $x_u \geq r$.
- 5: Για κάθε $v \in V_2$ βάζουμε $v \in C$ αν $x_v \geq 1 - r$.
- 6: Επέστρεψε το C .

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{u \in C} c_u \right] &= \sum_{u \in V_1} c_u \cdot \Pr[u \in C] + \sum_{v \in V_2} c_v \cdot \Pr[v \in C] = \\ &= \sum_{u \in C} c_u \cdot x_u + \sum_{v \in V_2} c_v \cdot x_v = OPT_{LP} \Rightarrow E[c(C)] = OPT_{LP}! \end{aligned}$$

Το C είναι πάντα έγκυρο κάλυμμα (;) άρα πήραμε ένα ακέραιο κάλυμμα ίσο με το καλύτερο κλασματικό!

Κάλυμμα κορυφών για $k = 3$.

Θέλουμε να γενικεύσουμε την λογική πίσω από τον προηγούμενο αλγόριθμο.

Κάλυμμα κορυφών για $k = 3$.

Θέλουμε να γενικεύσουμε την λογική πίσω από τον προηγούμενο αλγόριθμο.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται καλή αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

Κάλυμμα κορυφών για $k = 3$.

Θέλουμε να γενικεύσουμε την λογική πίσω από τον προηγούμενο αλγόριθμο.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται καλή αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Τριμερή γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Πάrouμε $(r_1, r_2, r_3) \sim \mathcal{D}$.
- 4: Για κάθε i και $u \in V_i$ το βάζουμε στο C αν $x_u \geq r_i$.
- 5: Επέστρεψε το C .

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Τριμερή γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Πάrouμε $(r_1, r_2, r_3) \sim \mathcal{D}$.
- 4: Για κάθε i και $u \in V_i$ το βάζουμε στο C αν $x_u \geq r_i$.
- 5: Επέστρεψε το C .

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα κάλυμμα C με $E[c(C)] \leq \frac{3}{2}OPT$.

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Τριμερή γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Πάrouμε $(r_1, r_2, r_3) \sim \mathcal{D}$.
- 4: Για κάθε i και $u \in V_i$ το βάζουμε στο C αν $x_u \geq r_i$.
- 5: Επέστρεψε το C .

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα κάλυμμα C με $E[c(C)] \leq \frac{3}{2}OPT$.

Για κάθε ακμή $e = (u_1, u_2, u_3) \in E$ δεν γίνεται να ισχύει $C \cap e = \emptyset$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Τριμερή γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Πάrouμε $(r_1, r_2, r_3) \sim \mathcal{D}$.
- 4: Για κάθε i και $u \in V_i$ το βάζουμε στο C αν $x_u \geq r_i$.
- 5: Επέστρεψε το C .

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα κάλυμμα C με $E[c(C)] \leq \frac{3}{2}OPT$.

Για κάθε ακμή $e = (u_1, u_2, u_3) \in E$ δεν γίνεται να ισχύει $C \cap e = \emptyset$ αλλιώς $1 \leq x_{u_1} + x_{u_2} + x_{u_3} < r_{u_1} + r_{u_2} + r_{u_3} = 1$.

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Τριμερή γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Πάrouμε $(r_1, r_2, r_3) \sim \mathcal{D}$.
- 4: Για κάθε i και $u \in V_i$ το βάζουμε στο C αν $x_u \geq r_i$.
- 5: Επέστρεψε το C .

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα κάλυμμα C με $E[c(C)] \leq \frac{3}{2}OPT$.

Για κάθε ακμή $e = (u_1, u_2, u_3) \in E$ δεν γίνεται να ισχύει $C \cap e = \emptyset$ αλλιώς $1 \leq x_{u_1} + x_{u_2} + x_{u_3} < r_{u_1} + r_{u_2} + r_{u_3} = 1$.

$$\Pr[u \in C] = \Pr[r_i \in [0, x_u]] \leq \frac{x_u}{2/3} = \frac{3x_u}{2}$$

$$E[c(C)] \leq \sum_{u \in V} c_u \cdot \Pr[u \in C] \leq \sum_{u \in V} c_u \cdot \frac{3x_u}{2} \leq \frac{3}{2}OPT$$

Πιθανοτικός Αλγόριθμος για Κάλυμμα κορυφών σε Τριμερή γράφο

- 1: $C \leftarrow \emptyset$.
- 2: Λύνουμε το γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μια λύση x .
- 3: Πάrouμε $(r_1, r_2, r_3) \sim \mathcal{D}$.
- 4: Για κάθε i και $u \in V_i$ το βάζουμε στο C αν $x_u \geq r_i$.
- 5: Επέστρεψε το C .

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα κάλυμμα C με $E[c(C)] \leq \frac{3}{2}OPT$.

Για κάθε ακμή $e = (u_1, u_2, u_3) \in E$ δεν γίνεται να ισχύει $C \cap e = \emptyset$ αλλιώς $1 \leq x_{u_1} + x_{u_2} + x_{u_3} < r_{u_1} + r_{u_2} + r_{u_3} = 1$.

$$\Pr[u \in C] = \Pr[r_i \in [0, x_u]] \leq \frac{x_u}{2/3} = \frac{3x_u}{2}$$

$$E[c(C)] \leq \sum_{u \in V} c_u \cdot \Pr[u \in C] \leq \sum_{u \in V} c_u \cdot \frac{3x_u}{2} \leq \frac{3}{2}OPT$$

Ύπαρξης καλής κατανομής.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται καλή αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

Ύπαρξης καλής κατανομής.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται *καλή* αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

❶ Δειγματοληπτούμε $r_1 \in [0, \frac{2}{3}]$.

Υπόρξης καλής κατανομής.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται καλή αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

- 1 Δειγματοληπούμε $r_1 \in [0, \frac{2}{3}]$.
- 2 Αν $r_1 \leq \frac{1}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (\frac{1}{3} + r_1, \frac{2}{3} - 2r_1)$.

Υπάρξης καλής κατανομής.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται καλή αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

- 1 Δειγματοληπτούμε $r_1 \in [0, \frac{2}{3}]$.
- 2 Αν $r_1 \leq \frac{1}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (\frac{1}{3} + r_1, \frac{2}{3} - 2r_1)$.
- 3 Αν $\frac{1}{3} < r_1 \leq \frac{2}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (r_1 - \frac{1}{3}, \frac{4}{3} - 2r_1)$.

Υπάρξης καλής κατανομής.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται καλή αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

- 1 Δειγματοληπτούμε $r_1 \in [0, \frac{2}{3}]$.
- 2 Αν $r_1 \leq \frac{1}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (\frac{1}{3} + r_1, \frac{2}{3} - 2r_1)$.
- 3 Αν $\frac{1}{3} < r_1 \leq \frac{2}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (r_1 - \frac{1}{3}, \frac{4}{3} - 2r_1)$.
- 4 Επέστρεψε το (r_1, r_2, r_3) .

Υπάρξης καλής κατανομής.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται καλή αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

- 1 Δειγματοληπτούμε $r_1 \in [0, \frac{2}{3}]$.
- 2 Αν $r_1 \leq \frac{1}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (\frac{1}{3} + r_1, \frac{2}{3} - 2r_1)$.
- 3 Αν $\frac{1}{3} < r_1 \leq \frac{2}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (r_1 - \frac{1}{3}, \frac{4}{3} - 2r_1)$.
- 4 Επέστρεψε το (r_1, r_2, r_3) .

Λήμμα

Η κατανομή $\mathcal{D}$ είναι καλή.

Υπάρξης καλής κατανομής.

★ (Καλή κατανομή) Μία κατανομή $\mathcal{D}$ πάνω σε τριάδες $(r_1, r_2, r_3) \in [0, 1]^3$ λέγεται καλή αν κάθε r_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, \frac{2}{3}]$ και πάντα $r_1 + r_2 + r_3 = 1$.

- 1 Δειγματοληπτούμε $r_1 \in [0, \frac{2}{3}]$.
- 2 Αν $r_1 \leq \frac{1}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (\frac{1}{3} + r_1, \frac{2}{3} - 2r_1)$.
- 3 Αν $\frac{1}{3} < r_1 \leq \frac{2}{3}$ θέτουμε $(r_2, r_3) \leftarrow (r_1 - \frac{1}{3}, \frac{4}{3} - 2r_1)$.
- 4 Επέστρεψε το (r_1, r_2, r_3) .

Λήμμα

Η κατανομή $\mathcal{D}$ είναι καλή. Υπάρχουν καλές κατανομές $\mathcal{D}$ πάνω στο $[0, \frac{2}{k}]^k$ για κάθε $k \geq 2$, και μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να σχεδιάσουμε αλγόριθμους για Κάλυμμα Κορυφών σε k -μερείς γράφους.

Απόδειξη με επαγωγή!