

Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Γραμμικά Προγράμματα μέσω Μεθόδου Πολλαπλασιαστικών Βαρών

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στόχος διάλεξης.

Θα δούμε ότι μια συγκεκριμένη μέθοδος ‘πρωτεύοντος-δυϊκού’ μας επιτρέπει να λύσουμε γραμμικά προγράμματα *συγκεκριμένης μορφής* $(1 + \epsilon)$ προσεγγιστικά. Για διδακτικούς λόγους, θα επικεντρωθούμε στο γραμμικό πρόγραμμα του Καλύματος Συνόλου.

Στόχος διάλεξης.

Θα δούμε ότι μια συγκεκριμένη μέθοδος ‘πρωτεύοντος-δυϊκού’ μας επιτρέπει να λύσουμε γραμμικά προγράμματα συγκεκριμένης μορφής $(1 + \epsilon)$ προσεγγιστικά. Για διδακτικούς λόγους, θα επικεντρωθούμε στο γραμμικό πρόγραμμα του Καλύματος Συνόλου.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{j=1}^m c(S_j)x_j \\ & \quad \sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U \\ & \quad x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Η αρχική ιδέα.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\ & \sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U(\dagger) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

- ❶ Η βασική ιδέα είναι να διαλέξουμε δυϊκές μεταβλητές y_i για κάθε $i \in U$.

Η αρχική ιδέα.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j)x_j \\ & \sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U(\dagger) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

- 1 Η βασική ιδέα είναι να διαλέξουμε δυϊκές μεταβλητές y_i για κάθε $i \in U$.
- 2 Ωστόσο, αυτές οι δυϊκές μεταβλητές οφείλουν να **μην** δημιουργήσουν ένα μεγάλο δυϊκό κόστος.

Η αρχική ιδέα.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j)x_j \\ & \sum_{j:i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in U(\dagger) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

- 1 Η βασική ιδέα είναι να διαλέξουμε δυϊκές μεταβλητές y_i για κάθε $i \in U$.
- 2 Ωστόσο, αυτές οι δυϊκές μεταβλητές οφείλουν να **μην** δημιουργήσουν ένα μεγάλο δυϊκό κόστος.
- 3 Αντίθετα, θα 'συγκεντρώσουμε' όλους τους $n := |U|$ περιορισμούς του πρωτεύοντος, με ανάλογο τρόπο όπως όταν εξάγαμε το δυϊκό από το πρωτεύον.

Μία ιδέα που έχουμε ξαναδεί.

Έστω $y_i \in [0, 1], \forall i \in U$ και έστω το εξής ‘συγκεντρωτικό’ γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\ & \sum_{i \in U} y_i \cdot \left(\sum_{j: i \in S_j} x_j \right) \geq \sum_{i \in U} y_i, \forall i \in U \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Αν $OPT(y)$ το βέλτιστο κόστος για το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα

Μία ιδέα που έχουμε ξαναδεί.

Έστω $y_i \in [0, 1], \forall i \in U$ και έστω το εξής ‘συγκεντρωτικό’ γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j) x_j \\ & \sum_{i \in U} y_i \cdot \left(\sum_{j: i \in S_j} x_j \right) \geq \sum_{i \in U} y_i, \forall i \in U \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Αν $OPT(y)$ το βέλτιστο κόστος για το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα
 $OPT(y) \leq OPT$.

Η βασική ιδέα, ποιοτικά.

- 1 Δοθέντος $y \in [0, 1]^n$, βρίσκουμε μια λύση x του ευκολότερου συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.

Η βασική ιδέα, ποιοτικά.

- 1 Δοθέντος $y \in [0, 1]^n$, βρίσκουμε μια λύση x του ευκολότερου συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.
- 2 Για τα στοιχεία i για τα οποία ο αντιστοίχος περιορισμός δεν ικανοποιείται, **αυξάνουμε** τη y_i τιμή με τη διαίσθηση ότι αυτό θα οδηγήσει τη νέα λύση να ικανοποιήσει τον περιορισμό.

Η βασική ιδέα, ποιοτικά.

- 1 Δοθέντος $y \in [0, 1]^n$, βρίσκουμε μια λύση x του ευκολότερου συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.
- 2 Για τα στοιχεία i για τα οποία ο αντιστοίχος περιορισμός δεν ικανοποιείται, **αυξάνουμε** τη y_i τιμή με τη διαίσθηση ότι αυτό θα οδηγήσει τη νέα λύση να ικανοποιήσει τον περιορισμό.
- 3 Αυτή η **αύξηση** θα είναι συνάρτηση του πόσο 'εκτός' είναι ο περιορισμός.

Η βασική ιδέα, ποιοτικά.

- 1 Δοθέντος $y \in [0, 1]^n$, βρίσκουμε μια λύση x του ευκολότερου συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.
- 2 Για τα στοιχεία i για τα οποία ο αντιστοίχος περιορισμός δεν ικανοποιείται, **αυξάνουμε** τη y_i τιμή με τη διαίσθηση ότι αυτό θα οδηγήσει τη νέα λύση να ικανοποιήσει τον περιορισμό.
- 3 Αυτή η **αύξηση** θα είναι συνάρτηση του πόσο 'εκτός' είναι ο περιορισμός.
- 4 Για τα στοιχεία των οποίων ο περιορισμός ικανοποιείται, **μειώνουμε** την y τιμή τους, καθώς μοιάζουν 'ασφαλή'.

Η βασική ιδέα, ποιοτικά.

- 1 Δοθέντος $y \in [0, 1]^n$, βρίσκουμε μια λύση x του ευκολότερου συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.
- 2 Για τα στοιχεία i για τα οποία ο αντιστοίχος περιορισμός δεν ικανοποιείται, **αυξάνουμε** τη y_i τιμή με τη διαίσθηση ότι αυτό θα οδηγήσει τη νέα λύση να ικανοποιήσει τον περιορισμό.
- 3 Αυτή η **αύξηση** θα είναι συνάρτηση του πόσο 'εκτός' είναι ο περιορισμός.
- 4 Για τα στοιχεία των οποίων ο περιορισμός ικανοποιείται, **μειώνουμε** την y τιμή τους, καθώς μοιάζουν 'ασφαλή'.
- 5 Μετά από T γύρους έχουμε $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(T)}$, το καθένα να αντιστοιχεί σε ένα στιγμιότυπο με κόστος $\leq OPT$,

Η βασική ιδέα, ποιοτικά.

- 1 Δοθέντος $y \in [0, 1]^n$, βρίσκουμε μια λύση x του ευκολότερου συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.
- 2 Για τα στοιχεία i για τα οποία ο αντιστοίχος περιορισμός δεν ικανοποιείται, **αυξάνουμε** τη y_i τιμή με τη διαίσθηση ότι αυτό θα οδηγήσει τη νέα λύση να ικανοποιήσει τον περιορισμό.
- 3 Αυτή η **αύξηση** θα είναι συνάρτηση του πόσο 'εκτός' είναι ο περιορισμός.
- 4 Για τα στοιχεία των οποίων ο περιορισμός ικανοποιείται, **μειώνουμε** την y τιμή τους, καθώς μοιάζουν 'ασφαλή'.
- 5 Μετά από T γύρους έχουμε $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(T)}$, το καθένα να αντιστοιχεί σε ένα στιγμιότυπο με κόστος $\leq OPT$, αλλά ενδεχομένως κανένα να μην είναι έγκυρη λύση!

Η βασική ιδέα, ποιοτικά.

- 1 Δοθέντος $y \in [0, 1]^n$, βρίσκουμε μια λύση x του ευκολότερου συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.
- 2 Για τα στοιχεία i για τα οποία ο αντιστοίχος περιορισμός δεν ικανοποιείται, **αυξάνουμε** τη y_i τιμή με τη διαίσθηση ότι αυτό θα οδηγήσει τη νέα λύση να ικανοποιήσει τον περιορισμό.
- 3 Αυτή η **αύξηση** θα είναι συνάρτηση του πόσο 'εκτός' είναι ο περιορισμός.
- 4 Για τα στοιχεία των οποίων ο περιορισμός ικανοποιείται, **μειώνουμε** την y τιμή τους, καθώς μοιάζουν 'ασφαλή'.
- 5 Μετά από T γύρους έχουμε $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(T)}$, το καθένα να αντιστοιχεί σε ένα στιγμιότυπο με κόστος $\leq OPT$, αλλά ενδεχομένως κανένα να μην είναι έγκυρη λύση!
- 6 Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας συστηματικός τρόπος της '**αύξησης/μείωσης**' έτσι ώστε ο μέσος όρος των $x^{(t)}$ να είναι 'σχεδόν' έγκυρη λύση!

Η βασική ιδέα, ποιοτικά.

- 1 Δοθέντος $y \in [0, 1]^n$, βρίσκουμε μια λύση x του ευκολότερου συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.
- 2 Για τα στοιχεία i για τα οποία ο αντιστοίχος περιορισμός δεν ικανοποιείται, **αυξάνουμε** τη y_i τιμή με τη διαίσθηση ότι αυτό θα οδηγήσει τη νέα λύση να ικανοποιήσει τον περιορισμό.
- 3 Αυτή η **αύξηση** θα είναι συνάρτηση του πόσο 'εκτός' είναι ο περιορισμός.
- 4 Για τα στοιχεία των οποίων ο περιορισμός ικανοποιείται, **μειώνουμε** την y τιμή τους, καθώς μοιάζουν 'ασφαλή'.
- 5 Μετά από T γύρους έχουμε $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(T)}$, το καθένα να αντιστοιχεί σε ένα στιγμιότυπο με κόστος $\leq OPT$, αλλά ενδεχομένως κανένα να μην είναι έγκυρη λύση!
- 6 Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας συστηματικός τρόπος της '**αύξησης/μείωσης**' έτσι ώστε ο μέσος όρος των $x^{(t)}$ να είναι 'σχεδόν' έγκυρη λύση! Τα υπόλοιπα είναι ιστορία!

Λύνοντας το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \sum_{j=1}^m c(S_j)x_j \\ & \sum_{i \in U} y_i \cdot \left(\sum_{j: i \in S_j} x_j \right) \geq \sum_{i \in U} y_i \quad \sum_{j=1}^m w_j x_j \geq \beta \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Άπληστη λύση:

Λύνοντας το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \sum_{j=1}^m c(S_j)x_j \\ & \sum_{i \in U} y_i \cdot \left(\sum_{j: i \in S_j} x_j \right) \geq \sum_{i \in U} y_i \quad \sum_{j=1}^m w_j x_j \geq \beta \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Άπληστη λύση: Ο περιορισμός λειτουργεί σαν 'κλασματικό σακίδιο':

Λύνοντας το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j)x_j \\ & \sum_{i \in U} y_i \cdot \left(\sum_{j: i \in S_j} x_j \right) \geq \sum_{i \in U} y_i \quad \sum_{j=1}^m w_j x_j \geq \beta \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Άπληστη λύση: Ο περιορισμός λειτουργεί σαν 'κλασματικό σακίδιο':
μας συμφέρει πάντα να βάζουμε όσο το δυνατόν περισσότερο βάρος w
και να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος c

Λύνοντας το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \sum_{j=1}^m c(S_j)x_j \\ & \sum_{i \in U} y_i \cdot \left(\sum_{j: i \in S_j} x_j \right) \geq \sum_{i \in U} y_i \sum_{j=1}^m w_j x_j \geq \beta \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Άπληστη λύση: Ο περιορισμός λειτουργεί σαν 'κλασματικό σακίδιο':
μας συμφέρει πάντα να βάζουμε όσο το δυνατόν περισσότερο βάρος w
και να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος $c \Rightarrow$ ταξινομούμε ως
προς τον λόγο $\frac{w_i}{c_i}$ και βάζουμε αντικείμενα στο 'σακίδιο' μέχρι ο
περιορισμός να ικανοποιηθεί.

Υλοποιώντας τη βασική ιδέα.

(1) Στην αρχή του t -οστού γύρου έστω τις δυϊκές μεταβλητές $y^{(t)} \in [0, 1]^n$ για κάθε $i \in U$.

Υλοποιώντας τη βασική ιδέα.

- (1) Στην αρχή του t -οστού γύρου έστω τις δυϊκές μεταβλητές $y^{(t)} \in [0, 1]^n$ για κάθε $i \in U$.
- (2) Λύνουμε το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μεταβλητές $x^{(t)}$,

Υλοποιώντας τη βασική ιδέα.

- (1) Στην αρχή του t -οστού γύρου έστω τις δυϊκές μεταβλητές $y^{(t)} \in [0, 1]^n$ για κάθε $i \in U$.
- (2) Λύνουμε το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μεταβλητές $x^{(t)}$, και καθορίζουμε το $y^{(t+1)}$ από το $x^{(t)}$.

Υλοποιώντας τη βασική ιδέα.

- (1) Στην αρχή του t -οστού γύρου έστω τις δυϊκές μεταβλητές $y^{(t)} \in [0, 1]^n$ για κάθε $i \in U$.
- (2) Λύνουμε το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα για να πάρουμε μεταβλητές $x^{(t)}$, και καθορίζουμε το $y^{(t+1)}$ από το $x^{(t)}$.

Για να ποσοτικοποιήσουμε τη διαδικασία, ορίζουμε το διάνυσμα $\text{sat}^{(t)} \in [-1, +1]^n$ το οποίο υποδεικνύει πόσο 'ικανοποιημένος' είναι ο περιορισμός που αντιστοιχεί στο i :

$$\text{sat}^{(t)}(i) = \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{j:i \in S_j} x_j^{(t)} - 1 \right),$$

όπου d το μέγιστο πλήθος συνόλων στα οποία ένα στοιχείο μπορεί να ανήκει.

Ιδιότητες της ποσότητας $\text{sat}^{(t)}$.

$$\text{sat}^{(t)}(i) = \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{j:i \in S_j} x_j^{(t)} - 1 \right),$$

Παρατήρηση Ι. Σε κάθε γύρο t και για κάθε στοιχείο i έχουμε $\text{sat}^{(t)}(i) \in [-\frac{1}{d}, 1]$.

Ιδιότητες της ποσότητας $\text{sat}^{(t)}$.

$$\text{sat}^{(t)}(i) = \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{j:i \in S_j} x_j^{(t)} - 1 \right),$$

Παρατήρηση I. Σε κάθε γύρο t και για κάθε στοιχείο i έχουμε $\text{sat}^{(t)}(i) \in [-\frac{1}{d}, 1]$.

Παρατήρηση II. Σε κάθε γύρο t έχουμε $\sum_{i \in U} y_i^{(t)} \cdot \text{sat}_i^{(t)} \geq 0$.

Ιδιότητες της ποσότητας $\text{sat}^{(t)}$.

$$\text{sat}^{(t)}(i) = \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{j:i \in S_j} x_j^{(t)} - 1 \right),$$

Παρατήρηση Ι. Σε κάθε γύρο t και για κάθε στοιχείο i έχουμε $\text{sat}^{(t)}(i) \in [-\frac{1}{d}, 1]$.

Παρατήρηση ΙΙ. Σε κάθε γύρο t έχουμε $\sum_{i \in U} y_i^{(t)} \cdot \text{sat}_i^{(t)} \geq 0$.

Απόδειξη της ΙΙ. Εφόσον τα $x_j^{(t)}$ προκύπτουν ως λύσεις του συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος έχουμε

Ιδιότητες της ποσότητας $\text{sat}^{(t)}$.

$$\text{sat}^{(t)}(i) = \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{j:i \in S_j} x_j^{(t)} - 1 \right),$$

Παρατήρηση Ι. Σε κάθε γύρο t και για κάθε στοιχείο i έχουμε $\text{sat}^{(t)}(i) \in [-\frac{1}{d}, 1]$.

Παρατήρηση ΙΙ. Σε κάθε γύρο t έχουμε $\sum_{i \in U} y_i^{(t)} \cdot \text{sat}_i^{(t)} \geq 0$.

Απόδειξη της ΙΙ. Εφόσον τα $x_j^{(t)}$ προκύπτουν ως λύσεις του συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος έχουμε

$$\sum_{i \in U} y_i^{(t)} \cdot \text{sat}_i^{(t)} = \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{i \in U} y_i^{(t)} \cdot \sum_{j:i \in S_j} x_j^{(t)} - \sum_{i \in U} y_i^{(t)} \right)$$

Ιδιότητες της ποσότητας $\text{sat}^{(t)}$.

$$\text{sat}^{(t)}(i) = \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{j:i \in S_j} x_j^{(t)} - 1 \right),$$

Παρατήρηση I. Σε κάθε γύρο t και για κάθε στοιχείο i έχουμε $\text{sat}^{(t)}(i) \in [-\frac{1}{d}, 1]$.

Παρατήρηση II. Σε κάθε γύρο t έχουμε $\sum_{i \in U} y_i^{(t)} \cdot \text{sat}_i^{(t)} \geq 0$.

Απόδειξη της II. Εφόσον τα $x_j^{(t)}$ προκύπτουν ως λύσεις του συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος έχουμε

$$\sum_{i \in U} y_i^{(t)} \cdot \text{sat}_i^{(t)} = \frac{1}{d} \cdot \left(\sum_{i \in U} y_i^{(t)} \cdot \sum_{j:i \in S_j} x_j^{(t)} - \sum_{i \in U} y_i^{(t)} \right) \geq 0,$$

καθώς η παρένθεση είναι απλά ο περιορισμός του συγκεντρωτικού γραμμικού προγράμματος.

Μέθοδος Πολλαπλαστικών Βαρών

- 1: Αρχικοποιούμε $wt^{(1)} = 1$ για κάθε $i \in U$.
- 2: $\Phi^{(1)} := \sum_{i \in U} wt^{(1)}(i) = n, y_i^{(1)} = \frac{wt^{(1)}}{\Phi^{(1)}}$
- 3: Για t από 1 ως T
- 4: Λύσε το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα με παραμέτρους $y^{(t)}$ για να πάρεις $x^{(t)}$.
- 5: Υπολόγισε τα $\text{sat}^{(t)}(i)$ για κάθε i
- 6: Για κάθε $i \in U$ θέσε $wt^{(t+1)}(i) := wt^{(t)}(i)(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$
- 7: //Η παραμέτρος $\eta < 1$ θα οριστεί όταν δούμε την ανάλυση
- 8: $\Phi^{(t+1)} := \sum_{i \in U} wt^{(t+1)}(i)$
- 9: $y_i^{(t+1)} = \frac{wt^{(t+1)}(i)}{\Phi^{(t+1)}}$
- 10: Έστω $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t \in [T]} x^{(t)}$
- 11: Επέστρεψε $\tilde{x} := (1 + \epsilon)\bar{x}$

- 1 Το $y^{(t)}$ μπορούμε να το σκεφτούμε σαν κατανομή πιθανότητας,

Ερμηνεία αλγορίθμου.

- 1 Το $y^{(t)}$ μπορούμε να το σκεφτούμε σαν κατανομή πιθανότητας, και το $y_i^{(t)}$ λέει πόσο σημαντικός είναι ο περιορισμός του i σχετικά με τους υπόλοιπους.
- 2 Τα $wt^{(t)}$ δίνουν ένα βάρος σε κάθε περιορισμό.

Ερμηνεία αλγορίθμου.

- 1 Το $y^{(t)}$ μπορούμε να το σκεφτούμε σαν κατανομή πιθανότητας, και το $y_i^{(t)}$ λέει πόσο σημαντικός είναι ο περιορισμός του i σχετικά με τους υπόλοιπους.
- 2 Τα $wt^{(t)}$ δίνουν ένα βάρος σε κάθε περιορισμό.
- 3 Η σχέση $wt^{(t+1)}(i) := wt^i(i)(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$ μας λέει δύο πράγματα:
 - Αν ο περιορισμός του i **δεν** ικανοποιείται τότε

Ερμηνεία αλγορίθμου.

- 1 Το $y^{(t)}$ μπορούμε να το σκεφτούμε σαν κατανομή πιθανότητας, και το $y_i^{(t)}$ λέει πόσο σημαντικός είναι ο περιορισμός του i σχετικά με τους υπόλοιπους.
- 2 Τα $wt^{(t)}$ δίνουν ένα βάρος σε κάθε περιορισμό.
- 3 Η σχέση $wt^{(t+1)}(i) := wt^i(i)(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$ μας λέει δύο πράγματα:
 - Αν ο περιορισμός του i **δεν** ικανοποιείται τότε $\text{sat}^{(t)}(i) < 0 \Rightarrow$ το βάρος του $wt(i)$ θα αυξηθεί στον επόμενο γύρο.

Ερμηνεία αλγορίθμου.

- 1 Το $y^{(t)}$ μπορούμε να το σκεφτούμε σαν κατανομή πιθανότητας, και το $y_i^{(t)}$ λέει πόσο σημαντικός είναι ο περιορισμός του i σχετικά με τους υπόλοιπους.
- 2 Τα $wt^{(t)}$ δίνουν ένα βάρος σε κάθε περιορισμό.
- 3 Η σχέση $wt^{(t+1)}(i) := wt^i(i)(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$ μας λέει δύο πράγματα:
 - Αν ο περιορισμός του i **δεν** ικανοποιείται τότε $\text{sat}^{(t)}(i) < 0 \Rightarrow$ το βάρος του $wt(i)$ θα αυξηθεί στον επόμενο γύρο.
 - Αντίθετα, $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0 \Rightarrow$ το $wt(i)$ θα μειωθεί (ή θα μείνει ίδιο) στον επόμενο γύρο.
- 4 Κάθε $x^{(t)}$ ικανοποιεί $c^T x^{(t)} \leq OPT$ και άρα

- ❶ Το $y^{(t)}$ μπορούμε να το σκεφτούμε σαν κατανομή πιθανότητας, και το $y_i^{(t)}$ λέει πόσο σημαντικός είναι ο περιορισμός του i σχετικά με τους υπόλοιπους.
- ❷ Τα $wt^{(t)}$ δίνουν ένα βάρος σε κάθε περιορισμό.
- ❸ Η σχέση $wt^{(t+1)}(i) := wt^i(i)(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$ μας λέει δύο πράγματα:
 - Αν ο περιορισμός του i **δεν** ικανοποιείται τότε $\text{sat}^{(t)}(i) < 0 \Rightarrow$ το βάρος του $wt(i)$ θα αυξηθεί στον επόμενο γύρο.
 - Αντίθετα, $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0 \Rightarrow$ το $wt(i)$ θα μειωθεί (ή θα μείνει ίδιο) στον επόμενο γύρο.
- ❹ Κάθε $x^{(t)}$ ικανοποιεί $c^T x^{(t)} \leq OPT$ και άρα

$$c^T \bar{x} \leq OPT$$

- 1 Το $y^{(t)}$ μπορούμε να το σκεφτούμε σαν κατανομή πιθανότητας, και το $y_i^{(t)}$ λέει πόσο σημαντικός είναι ο περιορισμός του i σχετικά με τους υπόλοιπους.
- 2 Τα $wt^{(t)}$ δίνουν ένα βάρος σε κάθε περιορισμό.
- 3 Η σχέση $wt^{(t+1)}(i) := wt^i(i)(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$ μας λέει δύο πράγματα:
 - Αν ο περιορισμός του i **δεν** ικανοποιείται τότε $\text{sat}^{(t)}(i) < 0 \Rightarrow$ το βάρος του $wt(i)$ θα αυξηθεί στον επόμενο γύρο.
 - Αντίθετα, $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0 \Rightarrow$ το $wt(i)$ θα μειωθεί (ή θα μείνει ίδιο) στον επόμενο γύρο.
- 4 Κάθε $x^{(t)}$ ικανοποιεί $c^T x^{(t)} \leq OPT$ και άρα

$$c^T \bar{x} \leq OPT \Rightarrow c^T \tilde{x} \leq (1 + \epsilon)OPT.$$

Η ιδέα είναι ότι το $\tilde{x}$ είναι εφικτή λύση αν τα η και T οριστούν προσεκτικά.

Λήμμα

Έστω $\epsilon := \frac{\epsilon}{4}$ και $T := \frac{8d \ln n}{\epsilon^2}$. Τότε $\sum_{j:i \in S_j} \bar{x}_j \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Η ιδέα είναι ότι το $\tilde{x}$ είναι εφικτή λύση αν τα η και T οριστούν προσεκτικά.

Λήμμα

Έστω $\epsilon := \frac{\epsilon}{4}$ και $T := \frac{8d \ln n}{\epsilon^2}$. Τότε $\sum_{j:i \in S_j} \bar{x}_j \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Από τον ορισμό του $\bar{x}$ και του $\text{sat}^{(t)}(i)$ και

$$\left(\sum_{j:i \in S_j} \bar{x}_j - 1 \right) = \frac{d}{T} \sum_{t=1}^T \text{sat}^{(t)}(i),$$

Η ιδέα είναι ότι το $\tilde{x}$ είναι εφικτή λύση αν τα η και T οριστούν προσεκτικά.

Λήμμα

Έστω $\epsilon := \frac{\epsilon}{4}$ και $T := \frac{8d \ln n}{\epsilon^2}$. Τότε $\sum_{j:i \in S_j} \bar{x}_j \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Από τον ορισμό του $\bar{x}$ και του $\text{sat}^{(t)}(i)$ και

$$\left(\sum_{j:i \in S_j} \bar{x}_j - 1 \right) = \frac{d}{T} \sum_{t=1}^T \text{sat}^{(t)}(i),$$

επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{d}{T} \sum_{t=1}^T \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{\epsilon}{2}$.

Ισχυρισμός Ι. Για κάθε t ισχύει $\Phi^{(t+1)} \leq \Phi^{(t)}$. Άρα
 $\Phi^{(T)} \leq \Phi^{(1)} = n$.

Ισχυρισμός Ι. Για κάθε t ισχύει $\Phi^{(t+1)} \leq \Phi^{(t)}$. Άρα
 $\Phi^{(T)} \leq \Phi^{(1)} = n$. (Χωρίς απόδειξη)

Αυτό που μας λέει ο ισχυρισμός είναι ότι το $\Phi^{(t)} = \sum_{i \in U} wt^{(t)}(i)$ είναι μικρό.

Ισχυρισμός Ι. Για κάθε t ισχύει $\Phi^{(t+1)} \leq \Phi^{(t)}$. Άρα $\Phi^{(T)} \leq \Phi^{(1)} = n$. (Χωρίς απόδειξη)

Αυτό που μας λέει ο ισχυρισμός είναι ότι το $\Phi^{(t)} = \sum_{i \in U} wt^{(t)}(i)$ είναι μικρό. Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι κάθε $wt^{(t)}(i)$ είναι 'μικρό' και από αυτό θα εξάγουμε ότι 'τα περισσότερα' $x^{(t)}$ στιγμιότυπα δεν χαλάνε τον περιορισμό i ,

Ισχυρισμός Ι. Για κάθε t ισχύει $\Phi^{(t+1)} \leq \Phi^{(t)}$. Άρα
 $\Phi^{(T)} \leq \Phi^{(1)} = n$. (Χωρίς απόδειξη)

Αυτό που μας λέει ο ισχυρισμός είναι ότι το $\Phi^{(t)} = \sum_{i \in U} wt^{(t)}(i)$ είναι μικρό. Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι κάθε $wt^{(t)}(i)$ είναι 'μικρό' και από αυτό θα εξάγουμε ότι 'τα περισσότερα' $x^{(t)}$ στιγμιότυπα δεν χαλάνε τον περιορισμό i , και θα εξάγουμε ότι ο μέσος όρος $\bar{x}$ είναι επαρκής.

Ισχυρισμός Ι. Για κάθε t ισχύει $\Phi^{(t+1)} \leq \Phi^{(t)}$. Άρα
 $\Phi^{(T)} \leq \Phi^{(1)} = n$. (Χωρίς απόδειξη)

Αυτό που μας λέει ο ισχυρισμός είναι ότι το $\Phi^{(t)} = \sum_{i \in U} wt^{(t)}(i)$ είναι μικρό. Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι κάθε $wt^{(t)}(i)$ είναι 'μικρό' και από αυτό θα εξάγουμε ότι 'τα περισσότερα' $x^{(t)}$ στιγμιότυπα δεν χαλάνε τον περιορισμό i , και θα εξάγουμε ότι ο μέσος όρος $\bar{x}$ είναι επαρκής.

$$wt^{(T+1)}(i) = \prod_{t=1}^T \left(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i) \right)$$

Έστω $i \in U$ και $P \subseteq [T]$ οι δείκτες t για τους οποίους $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0$.

Έστω $i \in U$ και $P \subseteq [T]$ οι δείκτες t για τους οποίους $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0$.

$$n \geq \mathbf{wt}^{(T+1)}(i) = \prod_{t=1}^T \left(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i)\right)$$

Έστω $i \in U$ και $P \subseteq [T]$ οι δείκτες t για τους οποίους $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0$.

$$n \geq \mathbf{wt}^{(T+1)}(i) = \prod_{t=1}^T \left(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i)\right) \geq \prod_{t \in P} (1 - \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)} \cdot \prod_{t \notin P} (1 + \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)}$$

Έστω $i \in U$ και $P \subseteq [T]$ οι δείκτες t για τους οποίους $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0$.

$$n \geq \text{wt}^{(T+1)}(i) = \prod_{t=1}^T \left(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i)\right) \geq \prod_{t \in P} (1 - \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)} \cdot \prod_{t \notin P} (1 + \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)}$$

Άρα, λογαριθμίζοντας

$$\ln n \geq \sum_{t \in P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 - \eta) - \sum_{t \notin P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 + \eta)$$

Έστω $i \in U$ και $P \subseteq [T]$ οι δείκτες t για τους οποίους $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0$.

$$n \geq \text{wt}^{(T+1)}(i) = \prod_{t=1}^T \left(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i)\right) \geq \prod_{t \in P} (1 - \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)} \cdot \prod_{t \notin P} (1 + \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)}$$

Άρα, λογαριθμίζοντας

$$\ln n \geq \sum_{t \in P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 - \eta) - \sum_{t \notin P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 + \eta)$$

Για μικρό η έχουμε $\ln(1 - \eta) \approx -\eta$, $\ln(1 + \eta) \approx \eta$ άρα

Έστω $i \in U$ και $P \subseteq [T]$ οι δείκτες t για τους οποίους $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0$.

$$n \geq \mathbf{wt}^{(T+1)}(i) = \prod_{t=1}^T \left(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i)\right) \geq \prod_{t \in P} (1 - \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)} \cdot \prod_{t \notin P} (1 + \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)}$$

Άρα, λογαριθμίζοντας

$$\ln n \geq \sum_{t \in P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 - \eta) - \sum_{t \notin P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 + \eta)$$

Για μικρό η έχουμε $\ln(1 - \eta) \approx -\eta$, $\ln(1 + \eta) \approx \eta$ άρα

$$\ln n \geq -\eta \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i)$$

Έστω $i \in U$ και $P \subseteq [T]$ οι δείκτες t για τους οποίους $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0$.

$$n \geq \text{wt}^{(T+1)}(i) = \prod_{t=1}^T \left(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i)\right) \geq \prod_{t \in P} (1 - \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)} \cdot \prod_{t \notin P} (1 + \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)}$$

Άρα, λογαριθμίζοντας

$$\ln n \geq \sum_{t \in P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 - \eta) - \sum_{t \notin P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 + \eta)$$

Για μικρό η έχουμε $\ln(1 - \eta) \approx -\eta$, $\ln(1 + \eta) \approx \eta$ άρα

$$\ln n \geq -\eta \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \Rightarrow \frac{d}{T} \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{d \ln n}{T}$$

Έστω $i \in U$ και $P \subseteq [T]$ οι δείκτες t για τους οποίους $\text{sat}^{(t)}(i) \geq 0$.

$$n \geq \text{wt}^{(T+1)}(i) = \prod_{t=1}^T \left(1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i)\right) \geq \prod_{t \in P} (1 - \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)} \cdot \prod_{t \notin P} (1 + \eta)^{\text{sat}^{(t)}(i)}$$

Άρα, λογαριθμίζοντας

$$\ln n \geq \sum_{t \in P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 - \eta) - \sum_{t \notin P} \text{sat}^{(t)}(i) \cdot \ln(1 + \eta)$$

Για μικρό η έχουμε $\ln(1 - \eta) \approx -\eta$, $\ln(1 + \eta) \approx \eta$ άρα

$$\ln n \geq -\eta \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \Rightarrow \frac{d}{dT} \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{d \ln n}{dT} \checkmark$$

Τέλος ανάλυσης.

Η ανισότητα $\frac{d}{T} \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{d \ln n}{T}$ μας επιτρέπει να θέσουμε $T = \frac{2 \ln n \cdot d}{\epsilon}$ για να πάρουμε το αριστερά μέλος $\geq -\frac{\epsilon}{2}$, όπως θέλαμε για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Τέλος ανάλυσης.

Η ανισότητα $\frac{d}{T} \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{d \ln n}{T}$ μας επιτρέπει να θέσουμε $T = \frac{2 \ln n \cdot d}{\epsilon}$ για να πάρουμε το αριστερά μέλος $\geq -\frac{\epsilon}{2}$, όπως θέλαμε για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Λήμμα

Έστω $\epsilon := \frac{\epsilon}{4}$ και $T := \frac{8 d \ln n}{\epsilon^2}$. Τότε $\sum_{j: i \in S_j} \bar{x}_j \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Τέλος ανάλυσης.

Η ανισότητα $\frac{d}{T} \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{d \ln n}{T}$ μας επιτρέπει να θέσουμε $T = \frac{2 \ln n \cdot d}{\epsilon}$ για να πάρουμε το αριστερά μέλος $\geq -\frac{\epsilon}{2}$, όπως θέλαμε για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Λήμμα

Έστω $\epsilon := \frac{\epsilon}{4}$ και $T := \frac{8 d \ln n}{\epsilon^2}$. Τότε $\sum_{j: i \in S_j} \bar{x}_j \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Για να κάνουμε το παραπάνω πλήρες και τυπικό χρειαζόμαστε τις εξής ανισότητες:

- $\ln(1 - \eta) \geq -(\eta + \eta^2)$, $\ln(1 + \eta) \geq \eta - \eta^2$ για $0 < \eta < \frac{1}{2}$,

Τέλος ανάλυσης.

Η ανισότητα $\frac{d}{T} \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{d \ln n}{T}$ μας επιτρέπει να θέσουμε $T = \frac{2 \ln n \cdot d}{\epsilon}$ για να πάρουμε το αριστερά μέλος $\geq -\frac{\epsilon}{2}$, όπως θέλαμε για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Λήμμα

Έστω $\epsilon := \frac{\epsilon}{4}$ και $T := \frac{8 d \ln n}{\epsilon^2}$. Τότε $\sum_{j: i \in S_j} \bar{x}_j \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Για να κάνουμε το παραπάνω πλήρες και τυπικό χρειαζόμαστε τις εξής ανισότητες:

- $\ln(1 - \eta) \geq -(\eta + \eta^2)$, $\ln(1 + \eta) \geq \eta - \eta^2$ για $0 < \eta < \frac{1}{2}$,
- $(1 - \eta \cdot a) \geq (1 - \eta)^\alpha$ με $0 \leq a \leq 1$ για το κάτω φράγμα στο $\sum_{t \in [P]} (1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$

Τέλος ανάλυσης.

Η ανισότητα $\frac{d}{T} \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{d \ln n}{T}$ μας επιτρέπει να θέσουμε $T = \frac{2 \ln n \cdot d}{\epsilon}$ για να πάρουμε το αριστερά μέλος $\geq -\frac{\epsilon}{2}$, όπως θέλαμε για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Λήμμα

Έστω $\epsilon := \frac{\epsilon}{4}$ και $T := \frac{8 d \ln n}{\epsilon^2}$. Τότε $\sum_{j: i \in S_j} \bar{x}_j \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Για να κάνουμε το παραπάνω πλήρες και τυπικό χρειαζόμαστε τις εξής ανισότητες:

- $\ln(1 - \eta) \geq -(\eta + \eta^2)$, $\ln(1 + \eta) \geq \eta - \eta^2$ για $0 < \eta < \frac{1}{2}$,
- $(1 - \eta \cdot a) \geq (1 - \eta)^\alpha$ με $0 \leq a \leq 1$ για το κάτω φράγμα στο $\sum_{t \in [P]} (1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$
- $(1 - \eta \cdot a) \geq (1 + \eta)^{-\alpha}$ με $-1 \leq a \leq 0$ για το κάτω φράγμα στο $\sum_{t \notin [P]} (1 - \eta \text{sat}^{(t)}(i))$

Τέλος ανάλυσης.

Η ανισότητα $\frac{d}{T} \sum_{t \in [T]} \text{sat}^{(t)}(i) \geq -\frac{d \ln n}{T}$ μας επιτρέπει να θέσουμε $T = \frac{2 \ln n \cdot d}{\epsilon}$ για να πάρουμε το αριστερά μέλος $\geq -\frac{\epsilon}{2}$, όπως θέλαμε για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Λήμμα

Έστω $\epsilon := \frac{\epsilon}{4}$ και $T := \frac{8d \ln n}{\epsilon^2}$. Τότε $\sum_{j: i \in S_j} \bar{x}_j \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$.

Για να κάνουμε το παραπάνω πλήρες και τυπικό χρειαζόμαστε τις εξής ανισότητες:

- $\ln(1 - \eta) \geq -(\eta + \eta^2)$, $\ln(1 + \eta) \geq \eta - \eta^2$ για $0 < \eta < \frac{1}{2}$,
- $(1 - \eta \cdot a) \geq (1 - \eta)^\alpha$ με $0 \leq a \leq 1$ για το κάτω φράγμα στο $\sum_{t \in [P]} (1 - \eta \cdot \text{sat}^{(t)}(i))$
- $(1 - \eta \cdot a) \geq (1 + \eta)^{-\alpha}$ με $-1 \leq a \leq 0$ για το κάτω φράγμα στο $\sum_{t \notin [P]} (1 - \eta \text{sat}^{(t)}(i))$

Ανάλυση χρόνου εκτέλεσης.

I. Ο βασικός βρόγχος τρέχει για $T = O(\frac{d \ln n}{\epsilon^2}) = O(\frac{m \ln n}{\epsilon^2})$ βήματα και σε κάθε βήμα λύνει το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα, παίρνοντας μία λύση $x^{(t)}$ και ανανεώνοντας τα $wt^{(t+1)}, \Phi^{(t+1)}, y^{(t)}$.

Ανάλυση χρόνου εκτέλεσης.

I. Ο βασικός βρόγχος τρέχει για $T = O(\frac{d \ln n}{\epsilon^2}) = O(\frac{m \ln n}{\epsilon^2})$ βήματα και σε κάθε βήμα λύνει το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα, παίρνοντας μία λύση $x^{(t)}$ και ανανεώνοντας τα $wt^{(t+1)}, \Phi^{(t+1)}, y^{(t)}$.

II. Το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα λύνεται με τον άπληστο αλγόριθμο σε χρόνο $O(m \cdot \log m)$, ή ακόμα και σε $O(m)$ χρόνο.

Ανάλυση χρόνου εκτέλεσης.

I. Ο βασικός βρόγχος τρέχει για $T = O(\frac{d \ln n}{\epsilon^2}) = O(\frac{m \ln n}{\epsilon^2})$ βήματα και σε κάθε βήμα λύνει το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα, παίρνοντας μία λύση $x^{(t)}$ και ανανεώνοντας τα $wt^{(t+1)}, \Phi^{(t+1)}, y^{(t)}$.

II. Το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα λύνεται με τον άπληστο αλγόριθμο σε χρόνο $O(m \cdot \log m)$, ή ακόμα και σε $O(m)$ χρόνο.

III. Συνολικά, ο χρόνος είναι $O\left(\frac{m(m+n)}{\epsilon^2} \cdot \ln n\right)$, αλλά μπορεί να αναλυθεί και σε χρόνο $O\left(\frac{m+n}{\epsilon^2} \cdot \ln n\right)$.

Ανάλυση χρόνου εκτέλεσης.

I. Ο βασικός βρόγχος τρέχει για $T = O(\frac{d \ln n}{\epsilon^2}) = O(\frac{m \ln n}{\epsilon^2})$ βήματα και σε κάθε βήμα λύνει το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα, παίρνοντας μία λύση $x^{(t)}$ και ανανεώνοντας τα $wt^{(t+1)}, \Phi^{(t+1)}, y^{(t)}$.

II. Το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα λύνεται με τον άπληστο αλγόριθμο σε χρόνο $O(m \cdot \log m)$, ή ακόμα και σε $O(m)$ χρόνο.

III. Συνολικά, ο χρόνος είναι $O\left(\frac{m(m+n)}{\epsilon^2} \cdot \ln n\right)$, αλλά μπορεί να αναλυθεί και σε χρόνο $O\left(\frac{m+n}{\epsilon^2} \cdot \ln n\right)$. Ο παραπάνω χρόνος για σταθερό ϵ είναι σχεδόν γραμμικός!

Ανάλυση χρόνου εκτέλεσης.

I. Ο βασικός βρόγχος τρέχει για $T = O(\frac{d \ln n}{\epsilon^2}) = O(\frac{m \ln n}{\epsilon^2})$ βήματα και σε κάθε βήμα λύνει το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα, παίρνοντας μία λύση $x^{(t)}$ και ανανεώνοντας τα $wt^{(t+1)}, \Phi^{(t+1)}, y^{(t)}$.

II. Το συγκεντρωτικό γραμμικό πρόγραμμα λύνεται με τον άπληστο αλγόριθμο σε χρόνο $O(m \cdot \log m)$, ή ακόμα και σε $O(m)$ χρόνο.

III. Συνολικά, ο χρόνος είναι $O\left(\frac{m(m+n)}{\epsilon^2} \cdot \ln n\right)$, αλλά μπορεί να αναλυθεί και σε χρόνο $O\left(\frac{m+n}{\epsilon^2} \cdot \ln n\right)$. Ο παραπάνω χρόνος για σταθερό ϵ είναι σχεδόν γραμμικός!

Θεώρημα

Μπορούμε να βρούμε σε χρόνο $O(\epsilon^{-2}(m+n)\ln n)$ μία $(1 + \epsilon)$ -προσεγγιστική λύση του γραμμικού προγράμματος του Καλύμματος Συνόλου.