

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Διαλέξη 7: Μέγιστη Ροή-Ελάχιστη Τομή I

Βασίλειος Νάκος

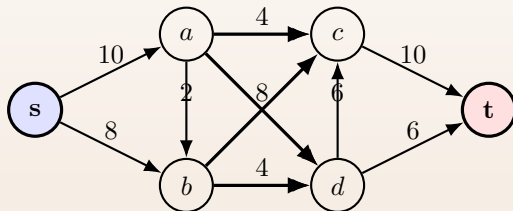
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μέγιστη Ροή σε Δίκτυο.

Δίνεται δίκτυο $G(V, E)$ με χωρητικότητα c_e για κάθε ακμή $e \in E$.
Όπως επίσης δύο διακεκριμένοι κόμβοι $s, t \in V$.

Μέγιστη Ροή σε Δίκτυο.

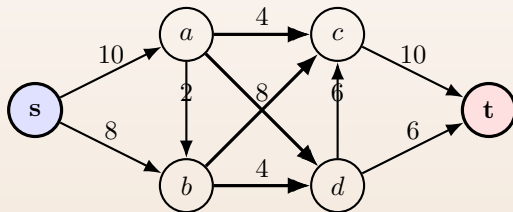
Δίνεται δίκτυο $G(V, E)$ με χωρητικότητα c_e για κάθε ακμή $e \in E$.
Όπως επίσης δύο διακεκριμένοι κόμβοι $s, t \in V$.



Μέγιστη Ροή σε Δίκτυο.

Πρόβλημα Μέγιστης Ροής.

Ζητείται να δρομολογηθεί η μέγιστη ροή από το s στο t , σεβόμενοι την αρχή διατήρησης της ροής σε κάθε $u \neq s, t$ και τον περιορισμό χωρητικότητας.



Μέγιστη Ροή σε Δίκτυο.

Αναλυτικά, μία έγκυρη ροή είναι ένα σύνολο αριθμών f_e για κάθε ακμή έτσι ώστε

Μέγιστη Ροή σε Δίκτυο.

Αναλυτικά, μία έγκυρη ροή είναι ένα σύνολο αριθμών f_e για κάθε ακμή έτσι ώστε

❶ $0 \leq f_e \leq c_e, \quad \forall e \in E$

❷ $\sum_{e=(\cdot, u)} f_e = \sum_{e=(u, \cdot)} f_e, \quad \forall u \in V \setminus \{s, t\}.$

Μέγιστη Ροή σε Δίκτυο.

Αναλυτικά, μία έγκυρη ροή είναι ένα σύνολο αριθμών f_e για κάθε ακμή έτσι ώστε

❶ $0 \leq f_e \leq c_e, \quad \forall e \in E$

❷ $\sum_{e=(-,u)} f_e = \sum_{e=(u,-)} f_e, \quad \forall u \in V \setminus \{s, t\}.$

Μια μέγιστη ροή είναι μια έγκυρη ροή η οποία μεγιστοποιεί το

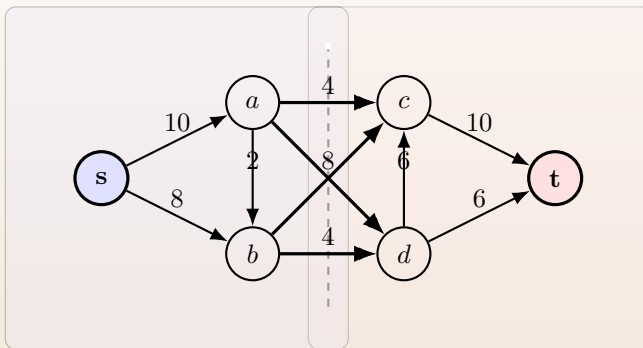
$$\sum_{e=(-,t)} f_e.$$

Τομή Δικτύου.

★ Μία $s - t$ τομή ενός δικτύου είναι ένα ζεύγος $(S, V \setminus S)$ ώστε $s \in S, t \in V \setminus S$.

S

T



Ελάχιστη Τομή Δικτύου.

★ Θέλουμε το κόστος της ελάχιστης τομής δικτύου να εκφράζει το ελαφρύτερο σύνολο ακμών που μπορούμε να βγάλουμε ώστε το t να μην είναι προσπελάσιμο από το s .

Ελάχιστη Τομή Δικτύου.

★ Θέλουμε το κόστος της ελάχιστης τομής δικτύου να εκφράζει το ελαφρύτερο σύνολο ακμών που μπορούμε να βγάλουμε ώστε το t να μην είναι προσπελάσιμο από το s .

Το κόστος της τομής $(S, V \setminus S)$ εξαρτάται μόνο από τις ακμές με το ένα άκρο στο S και το άλλο στο $V \setminus S$.

Ελάχιστη Τομή Δικτύου.

★ Θέλουμε το κόστος της ελάχιστης τομής δικτύου να εκφράζει το ελαφρύτερο σύνολο ακμών που μπορούμε να βγάλουμε ώστε το t να μην είναι προσπελάσιμο από το s .

Το κόστος της τομής $(S, V \setminus S)$ εξαρτάται μόνο από τις ακμές με το ένα άκρο στο S και το άλλο στο $V \setminus S$.

Οι ακμές e από το S στο $V \setminus S$ συνεισφέρουν c_e .

$$\sum_{e \in S \times (V \setminus S)} c_e$$

Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή.

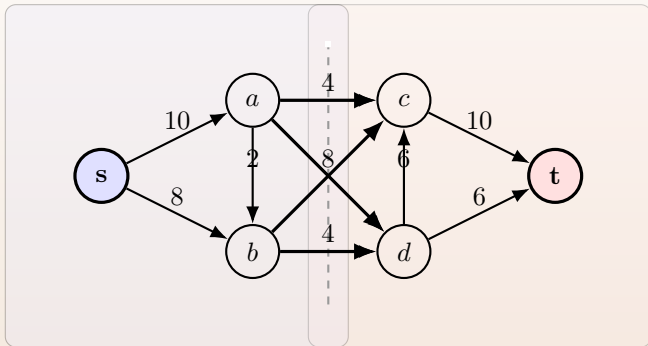
Κέρδος κάθε ροής $f \leq$ Κόστος κάθε τομής $(S, V \setminus S)$

Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή.

Κέρδος κάθε ροής $f \leq$ Κόστος κάθε τομής $(S, V \setminus S)$

S

T



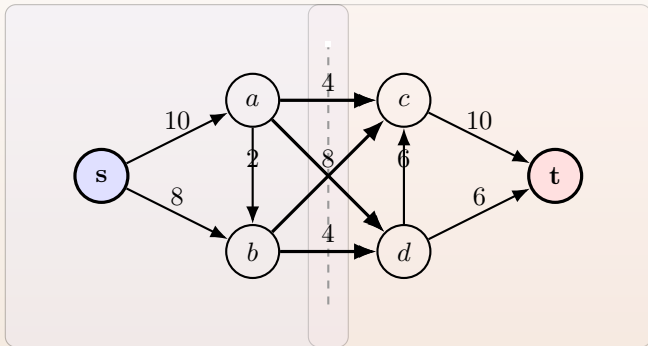
$(\text{Κέρδος Μέγιστης Ροής}) \leq \text{Κόστος Ελάχιστης Τομής}$

Μέγιστη Ροή και Ελάχιστη Τομή.

Κέρδος κάθε ροής $f \leq$ Κόστος κάθε τομής $(S, V \setminus S)$

S

T



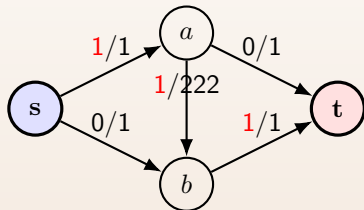
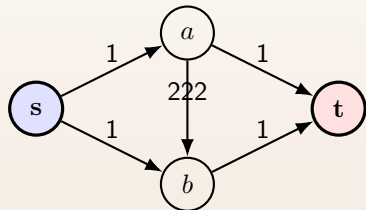
$(\text{Κέρδος Μέγιστης Ροής}) \leq \text{Κόστος Ελάχιστης Τομής}$

Μια αρχική προσπάθεια.

Βρίσκουμε ένα $s - t$ μονοπάτι κάθε φορά και στέλνουμε όσο περισσότερη ροή μπορούμε κατά μήκος του, όσο αυτό γίνεται.

Μια αρχική προσπάθεια.

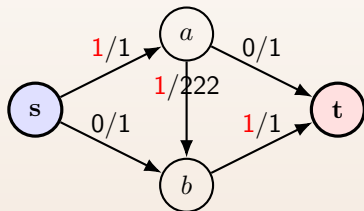
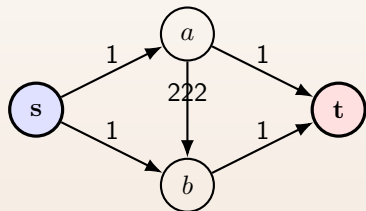
Βρίσκουμε ένα $s - t$ μονοπάτι κάθε φορά και στέλνουμε όσο περισσότερη ροή μπορούμε κατά μήκος του, όσο αυτό γίνεται.



Δύναται να πάρουμε ροή 1, ωστόσο η μέγιστη ροή είναι 2.

Μια αρχική προσπάθεια.

Βρίσκουμε ένα $s - t$ μονοπάτι κάθε φορά και στέλνουμε όσο περισσότερη ροή μπορούμε κατά μήκος του, όσο αυτό γίνεται.



Δύναται να πάρουμε ροή 1, ωστόσο η μέγιστη ροή είναι 2.
Άρα ο απλός αυτός αλγόριθμος δεν είναι βέλτιστος.

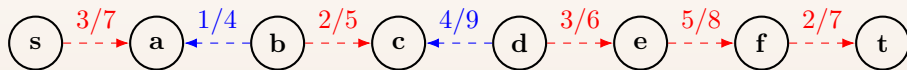
Το βασικό μοτίβο.

Έστω ότι ξεχνάμε τις κατευθύνσεις των ακμών στο G και βρίσκουμε ένα $s - t$ μονοπάτι.

Το βασικό μοτίβο.

Έστω ότι ξεχνάμε τις κατευθύνσεις των ακμών στο G και βρίσκουμε ένα $s - t$ μονοπάτι.

Μετά τις ξαναβάζουμε πίσω.

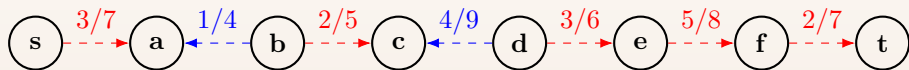


Πως μπορούσε να χρησιμοποιήσουμε ένα τέτοιο μονοπάτι για να σπρώξουμε λίγο περισσότερη ροή στο t ;

Το βασικό μοτίβο.

Έστω ότι ξεχνάμε τις κατευθύνσεις των ακμών στο G και βρίσκουμε ένα $s - t$ μονοπάτι.

Μετά τις ξαναβάζουμε πίσω.



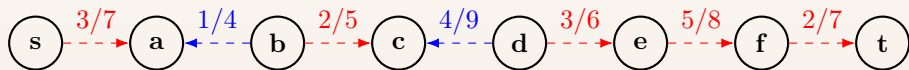
Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τέτοιο μονοπάτι για να σπρώξουμε λίγο περισσότερη ροή στο t ;

Σε κάθε **μπροστά** ακμή μπορούμε να ανεβάσουμε τη ροή κατά 1,

Το βασικό μοτίβο.

Έστω ότι ξεχνάμε τις κατευθύνσεις των ακμών στο G και βρίσκουμε ένα $s - t$ μονοπάτι.

Μετά τις ξαναβάζουμε πίσω.



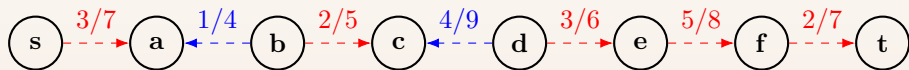
Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τέτοιο μονοπάτι για να σπρώξουμε λίγο περισσότερη ροή στο t ;

Σε κάθε **μπροστά** ακμή μπορούμε να ανεβάσουμε τη ροή κατά 1, και σε κάθε **πίσω** ακμή να την μειώσουμε κατά 1.

Το βασικό μοτίβο.

Έστω ότι ξεχνάμε τις κατευθύνσεις των ακμών στο G και βρίσκουμε ένα $s - t$ μονοπάτι.

Μετά τις ξαναβάζουμε πίσω.



Πως μπορούσε να χρησιμοποιήσουμε ένα τέτοιο μονοπάτι για να σπρώξουμε λίγο περισσότερη ροή στο t ;

Σε κάθε **μπροστά** ακμή μπορούμε να ανεβάσουμε τη ροή κατά 1, και σε κάθε **πίσω** ακμή να την μειώσουμε κατά 1.

✓ Η αρχή διατηρήσης της ροής εξακολουθεί να ισχύει.

Μας ενδιαφέρει να βρίσκουμε μονοπάτια στην μη κατευθυνόμενη εκδοχή του G , τα οποία όταν βάλουμε την κατεύθυνση των ακμών ικανοποιούν

- ① οι **μπροστά** ακμές δεν είναι κορεσμένες
- ② οι **πίσω** ακμές δεν είναι κενές ροής.

Μας ενδιαφέρει να βρίσκουμε μονοπάτια στην μη κατευθυνόμενη εκδοχή του G , τα οποία όταν βάλουμε την κατεύθυνση των ακμών ικανοποιούν

- ① οι **μπροστά** ακμές δεν είναι κορεσμένες
- ② οι **πίσω** ακμές δεν είναι κενές ροής.

Ένα τέτοιο μονοπάτι λέγεται *επαυξητικό*.

Μας ενδιαφέρει να βρίσκουμε μονοπάτια στην μη κατευθυνόμενη εκδοχή του G , τα οποία όταν βάλουμε την κατεύθυνση των ακμών ικανοποιούν

- ❶ οι **μπροστά** ακμές δεν είναι κορεσμένες
- ❷ οι **πίσω** ακμές δεν είναι κενές ροής.

Ένα τέτοιο μονοπάτι λέγεται *επαυξητικό*.

Όσο υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι στείλε όσο περισσότερο ροή μπορείς από το s στο t κατά μήκος του μονοπατιού.

Τρόπος εύρεσης επαυξητικού μονοπατιού.

Ξέρουμε να κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος (ή πλάτος). Πως μπορούμε να βρούμε ένα επαυξητικό μονοπάτι στο τρέχον δίκτυο;

Τρόπος εύρεσης επαυξητικού μονοπατιού.

Ξέρουμε να κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος (ή πλάτος). Πως μπορούμε να βρούμε ένα επαυξητικό μονοπάτι στο τρέχον δίκτυο;

Ορίζουμε το υπολειπόμενο γράφημα G_f το οποίο έχει δύο ακμές για κάθε $e \in E$:

① $\vec{e}$ με τιμή $c_e - f_e$

Τρόπος εύρεσης επαυξητικού μονοπατιού.

Ξέρουμε να κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος (ή πλάτος). Πως μπορούμε να βρούμε ένα επαυξητικό μονοπάτι στο τρέχον δίκτυο;

Ορίζουμε το υπολειπόμενο γράφημα G_f το οποίο έχει δύο ακμές για κάθε $e \in E$:

- 1 $\vec{e}$ με τιμή $c_e - f_e \Leftarrow$ εκφράζει πόσο μπορώ να αυξήσω την ροή στην e
- 2 $\overleftarrow{e}$ με τιμή f_e

Τρόπος εύρεσης επαυξητικού μονοπατιού.

Ξέρουμε να κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος (ή πλάτος). Πως μπορούμε να βρούμε ένα επαυξητικό μονοπάτι στο τρέχον δίκτυο;

Ορίζουμε το υπολειπόμενο γράφημα G_f το οποίο έχει δύο ακμές για κάθε $e \in E$:

- 1 $\vec{e}$ με τιμή $c_e - f_e \Leftarrow$ εκφράζει πόσο μπορώ να αυξήσω την ροή στην e
- 2 $\overleftarrow{e}$ με τιμή $f_e \Leftarrow$ εκφράζει πόσο μπορώ να μειώσω την ροή στην e .

Αν κάποια από τις δύο ακμές έχει μηδενική τιμή, δεν την κρατάμε στο G_f .

Τρόπος εύρεσης επαυξητικού μονοπατιού.

Ξέρουμε να κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος (ή πλάτος). Πως μπορούμε να βρούμε ένα επαυξητικό μονοπάτι στο τρέχον δίκτυο;

Ορίζουμε το υπολειπόμενο γράφημα G_f το οποίο έχει δύο ακμές για κάθε $e \in E$:

- 1 $\vec{e}$ με τιμή $c_e - f_e \Leftarrow$ εκφράζει πόσο μπορώ να αυξήσω την ροή στην e
- 2 $\overleftarrow{e}$ με τιμή $f_e \Leftarrow$ εκφράζει πόσο μπορώ να μειώσω την ροή στην e .

Αν κάποια από τις δύο ακμές έχει μηδενική τιμή, δεν την κρατάμε στο G_f .

👉 Κάθε μονοπάτι στο G_f αντιστοιχεί σε ένα υπολειπόμενο μονοπάτι στο G με την τρέχουσα ροή, και βρίσκεται σε χρόνο $O(m + n)$.

Τρόπος εύρεσης επαυξητικού μονοπατιού.

Ξέρουμε να κάνουμε αναζήτηση κατά βάθος (ή πλάτος). Πως μπορούμε να βρούμε ένα επαυξητικό μονοπάτι στο τρέχον δίκτυο;

Ορίζουμε το υπολειπόμενο γράφημα G_f το οποίο έχει δύο ακμές για κάθε $e \in E$:

- 1 $\vec{e}$ με τιμή $c_e - f_e \Leftarrow$ εκφράζει πόσο μπορώ να αυξήσω την ροή στην e
- 2 $\overleftarrow{e}$ με τιμή $f_e \Leftarrow$ εκφράζει πόσο μπορώ να μειώσω την ροή στην e .

Αν κάποια από τις δύο ακμές έχει μηδενική τιμή, δεν την κρατάμε στο G_f .

👉 Κάθε μονοπάτι στο G_f αντιστοιχεί σε ένα υπολειπόμενο μονοπάτι στο G με την τρέχουσα ροή, και βρίσκεται σε χρόνο $O(m + n)$.

Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- 1: $f \leftarrow \vec{0}$
- 2: Φτιάξε το G_f .
- 3: Όσο υπάρχει $s - t$ μονοπάτι p στο G_f
- 4: Δρομολόγησε μία μονάδα ροής κατά μήκους του p .
- 5: //χρόνος $O(n)$
- 6: Ανανέωσε τη ροή f .
- 7: Ανανέωσε το G_f . //χρόνος $O(n)$
- 8: Επίστρεψε την f

Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

- 1: $f \leftarrow \vec{0}$
- 2: Φτιάξε το G_f .
- 3: Όσο υπάρχει $s - t$ μονοπάτι p στο G_f
- 4: Δρομολόγησε μία μονάδα ροής κατά μήκους του p .
- 5: //χρόνος $O(n)$
- 6: Ανανέωσε τη ροή f .
- 7: Ανανέωσε το G_f . //χρόνος $O(n)$
- 8: Επέστρεψε την f

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson έχει χρόνο εκτέλεσης $O((m + n) \cdot f^*)$ και βρίσκει μία ροή μέγιστου κέρδους f^* .

Απόδειξη Ορθότητας.

★ Έστω $\bar{f}$ η ροή όταν ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson τερματίσει.

Απόδειξη Ορθότητας.

★ Έστω $\bar{f}$ η ροή όταν ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson τερματίσει.

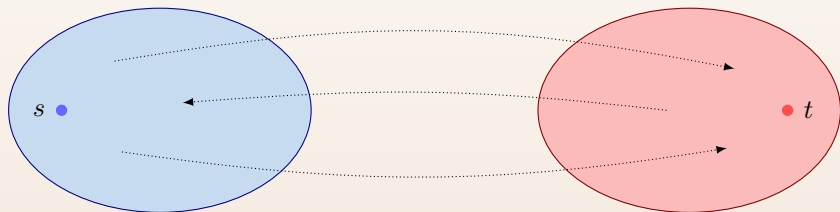
Στο $G_{\bar{f}}$, το t είναι μη προσπελάσιμο από s .

Απόδειξη Ορθότητας.

★ Έστω $\bar{f}$ η ροή όταν ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson τερματίσει.

Στο $G_{\bar{f}}$, το t είναι μη προσπελάσιμο από s .

Έστω S οι κορυφές προσβάσιμες από το s και T οι υπόλοιπες.

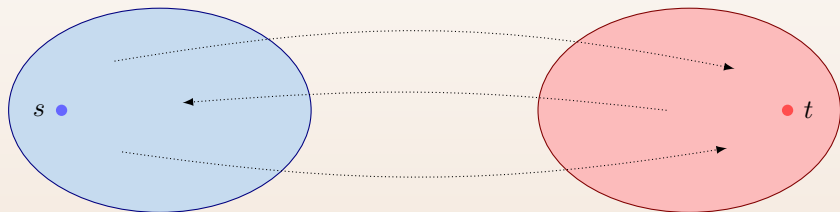


Απόδειξη Ορθότητας.

★ Έστω $\bar{f}$ η ροή όταν ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson τερματίσει.

Στο $G_{\bar{f}}$, το t είναι μη προσπελάσιμο από s .

Έστω S οι κορυφές προσβάσιμες από το s και T οι υπόλοιπες.



👉 Οι διακεκομμένες ακμές είναι ακμές του αρχικού γράφου.

Απόδειξη Ορθότητας.

Ας δούμε τις ακμές του αρχικού γράφου:

👁 Κάθε ακμή e από το S στο T είναι κορεσμένη, δηλαδή $\bar{f}_e = c_e$.

Απόδειξη Ορθότητας.

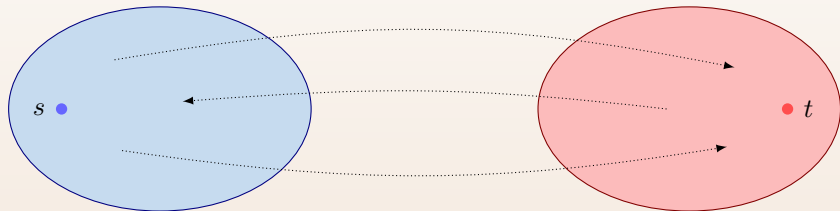
Ας δούμε τις ακμές του αρχικού γράφου:

- 👁 Κάθε ακμή e από το S στο T είναι κορεσμένη, δηλαδή $\bar{f}_e = c_e$.
- 👁 Κάθε ακμή e από το T στο S είναι άδεια, δηλαδή $\bar{f}_e = 0$.

Απόδειξη Ορθότητας.

Ας δούμε τις ακμές του αρχικού γράφου:

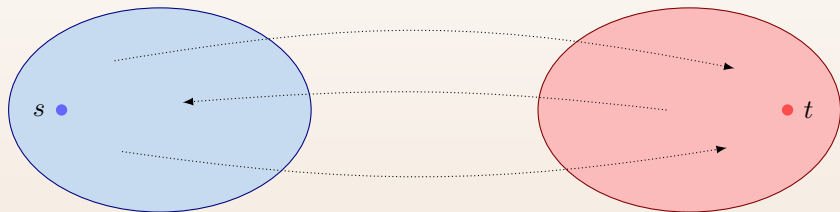
- 👁 Κάθε ακμή e από το S στο T είναι κορεσμένη, δηλαδή $\bar{f}_e = c_e$.
- 👁 Κάθε ακμή e από το T στο S είναι άδεια, δηλαδή $\bar{f}_e = 0$.



Απόδειξη Ορθότητας.

Ας δούμε τις ακμές του αρχικού γράφου:

- 👁 Κάθε ακμή e από το S στο T είναι κορεσμένη, δηλαδή $\bar{f}_e = c_e$.
- 👁 Κάθε ακμή e από το T στο S είναι άδεια, δηλαδή $\bar{f}_e = 0$.

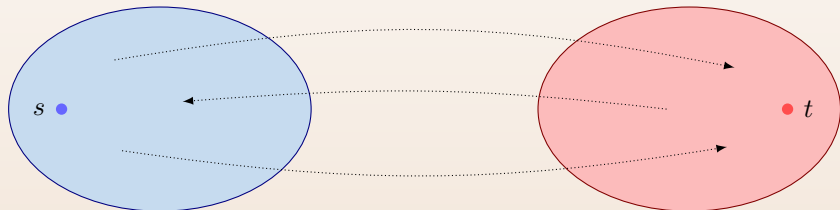


Τι συμβαίνει με την τομή (S, T) στο αρχικό γράφημα?

Απόδειξη ορθότητας.

👉 Κόστος τομής (S, T) ισούται με

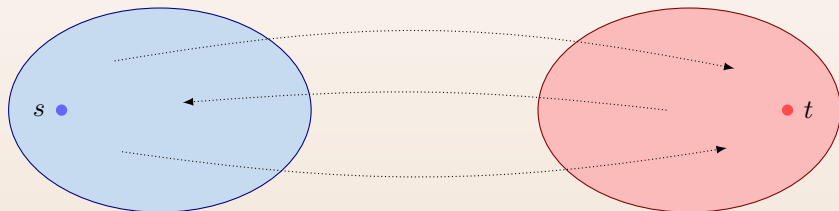
$$\begin{aligned} & (\text{χωρητικότητες ακμών από } S \text{ στο } T) \\ & \leq \\ & (\text{ροή } \bar{f} \text{ που βγαίνει από το } S) - (\text{ροή } \bar{f} \text{ που μπαίνει στο } S) = \bar{f} \end{aligned}$$



Απόδειξη ορθότητας.

👉 Κόστος τομής (S, T) ισούται με

$$\begin{aligned} & (\text{χωρητικότητες ακμών από } S \text{ στο } T) \\ & \leq \\ & (\text{ροή } \bar{f} \text{ που βγαίνει από το } S) - (\text{ροή } \bar{f} \text{ που μπαίνει στο } S) = \bar{f} \end{aligned}$$



Άρα συνάγουμε ότι $\bar{f} \geq \text{Κόστος τομής } (S, T)$.

Άρα συνάγουμε ότι $\bar{f} \geq \text{Κόστος τομής } (S, T)$.

Θυμόμαστε όμως ότι $(\text{κέρδος κάθε ροής}) \leq (\text{κόστος κάθε τομής})$.

Άρα συνάγουμε ότι $\bar{f} \geq \text{Κόστος τομής } (S, T)$.

Θυμόμαστε όμως ότι (κέρδος κάθε ροής) $\leq$ (κόστος κάθε τομής).

Άρα αναγκαστικά $\bar{f} = \text{Κόστος τομής } (S, T)$ και η $\bar{f}$ είναι μια μέγιστη ροή και η (S, T) μια ελάχιστη τομή!

Θεώρημα (Θεώρημα Μέγιστης Ροής-Ελάχιστης Τομής)

Σε οποιοδήποτε δίκτυο (με ακέραιες χωρητικότητες) (μέγιστο κόστος ροής) = (ελάχιστο κόστος τομής).

Πως βρίσκουμε μια ελάχιστη τομή;

- I. Έστω $G_{\bar{f}}$ το υπολειπόμενο δίκτυο στο τέλος του αλγόριθμου.
- II. Έστω S οι κορυφές προσβάσιμες από το s στο $G_{\bar{f}}$ και T οι υπόλοιπες.

Πως βρίσκουμε μια ελάχιστη τομή;

- I. Έστω $G_{\bar{f}}$ το υπολειπόμενο δίκτυο στο τέλος του αλγόριθμου.
- II. Έστω S οι κορυφές προσβάσιμες από το s στο $G_{\bar{f}}$ και T οι υπόλοιπες.
(Υπενθύμιση: Αν μία ακμή ικανοποιεί $\bar{f}_e = c_e$ τότε δεν υπάρχει στο υπολειπόμενο δίκτυο. Αν $f_e = 0$ τότε δεν υπάρχει η αντίστροφή της.)

Πως βρίσκουμε μια ελάχιστη τομή;

- I. Έστω $G_{\bar{f}}$ το υπολειπόμενο δίκτυο στο τέλος του αλγόριθμου.
 - II. Έστω S οι κορυφές προσβάσιμες από το s στο $G_{\bar{f}}$ και T οι υπόλοιπες.
(Υπενθύμιση: Αν μία ακμή ικανοποιεί $\bar{f}_e = c_e$ τότε δεν υπάρχει στο υπολειπόμενο δίκτυο. Αν $f_e = 0$ τότε δεν υπάρχει η αντίστροφή της.)
- 👉 Τότε η τομή (S, T) είναι μία ελάχιστη τομή στο G ✓.