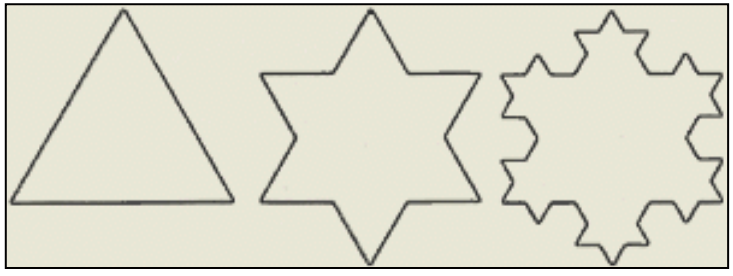
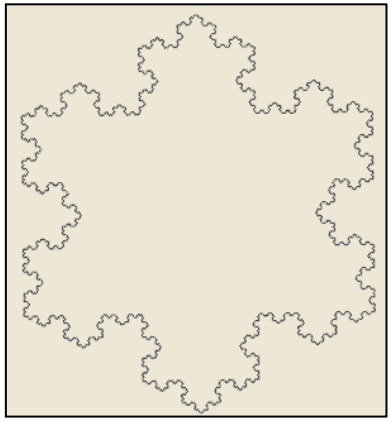
ΑΝΑΔΡΟΜΗ





Νιφάδες του Von Koch

ΑΝΑΔΡΟΜΗ

- Εργαλείο ορισμού ενός τύπου
- Αλγοριθμική μέθοδος
- Τεχνική προγραμματισμού
  - πιο αισθητική
  - πιο φυσική
  - πιο ισχυρή

Divide And Conquer

- **Διαίρεση** του προβλήματος σε μικρότερα προβλήματα
- **Επίλυση** των μικροτέρων προβλημάτων
- **Συνδυασμός** λύσεων για την εύρεση της αρχικής λύσης

Merge Sort

- **Divide**: πίνακας με n στοιχεία → 2 υποπίνακες με $\lfloor n/2 \rfloor$ και $\lceil n/2 \rceil$ στοιχεία
- **Conquer**: ταξινόμησε τους δυο υποπίνακες αναδρομικά με Merge Sort
- **Combine**: Merge τους δυο ταξινομημένους πίνακες

Merge Sort (*****)

- **MergeSort** (A,l,r)

  If l<r then q = $\lfloor (l+r)/2 \rfloor$

  MergeSort (A,l,q)

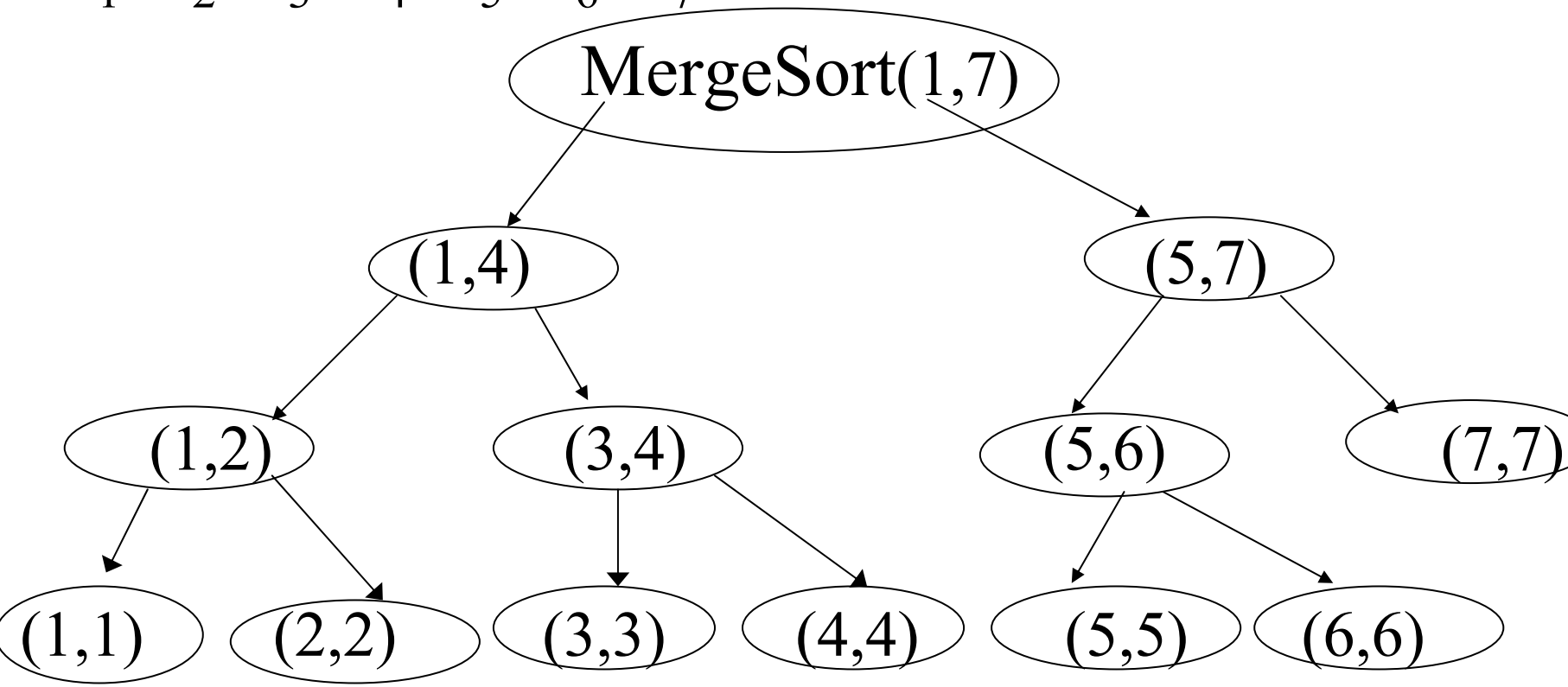
  MergeSort (A,q+1,r)

  Merge (A,l,q,r)

  end if

Παράδειγμα: A → 6 9 2 7 4 5 8

A: 6_1 9_2 2_3 7_4 4_5 5_6 8_7



- 2 6 7 9 || 4 5 8
- 2 6 7 9 || 8 5 4 → 2 4 5 6 7 8 9

Merge 2 ταξ/νες ακολουθίες

Merge (A,l,q,r)

όρισε πίνακες a[1..q-l+2] και b[1..r-q+1]
for i=1 to q-l+1 do a[i]=A[l+i-1]
for j=1 to r-q do b[j]=A[q+j]
a[q-l+2]=∞; b[r-q+1]= ∞
i=1; j=1;
for **k=l** to r do
    if a[i] <= b[j] then A[k]=a[i]; i=i+1
    else A[k]=b[j]; j=j+1

Παράδειγμα: A: 2 6 7 9 4 5 8 (είσοδος), a: 2 6 7 9 ∞
b: 4 5 8 ∞

A: 2 4 5 6 7 8 9 (έξοδος)

Πολυπλοκότητα: O(n)

Πολυπλοκότητα MergeSort

- $T(n)= \Theta(1)$ if $n=1$
- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ if $n>1$
- $\Theta(n \log n)$

$$T(n) = \begin{cases} 1 \text{ αν } n=1 \\ aT(n/b) + d(n) \end{cases}$$

(n=b^k , αν όχι τότε upper bound της T(n))

MergeSort: a = b= 2, d(n) = Θ(n)

Επίλυση της Γενικής περίπτωσης (Substitution method)

Γενική μορφή στο i βήμα: $T(n/b^i) = a\,T(n/b^{i+1}) + d(n/b^i)$

$$T(n) = aT(n/b) + d(n)$$

$$= a[aT(n/b^2) + d(n/b)] + d(n)$$

$$= a^2T(n/b^2) + ad(n/b) + d(n)$$

$$= a^2[aT(n/b^3) + d(n/b^2)] + ad(n/b) + d(n)$$

$$= a^3T(n/b^3) + a^2d(n/b^2) + ad(n/b) + d(n)$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= a^iT(n/b^i) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j d(n/b^j)$$

Επίλυση της Γενικής περίπτωσης (Substitution method

$$T(n) = a^i T(n/b^i) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j d(n/b^j)$$

Αν υποθέσουμε $n=b^k \Rightarrow T(n/b^k) = T(1) = 1$. Για $i=k$ έχουμε:

$$T(n) = a^k + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d(b^{k-j})$$

Επίσης $k=\log_b n$ και επομένως $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

(constant power)

Ειδική περίπτωση: Mergesor

$$T(n) = a^k + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d(b^{k-j}) = n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j d(b^{k-j})$$

$d(n) = (n-1)$, $a=b=2$:

$$T(n) = n + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j (2^{k-j}-1) = n + \sum_{j=0}^{k-1} 2^k - 2^j = n + 2^k\, k - (2^k-1)/(2-1)$$

$$= n + n\log n - n + 1$$

$$= n\log n + 1$$

Οι πύργοι του Hanoi

- 3 στύλοι: 1, 2, 3
- n δίσκοι στο στύλο 1, σχηματίζοντες κώνο

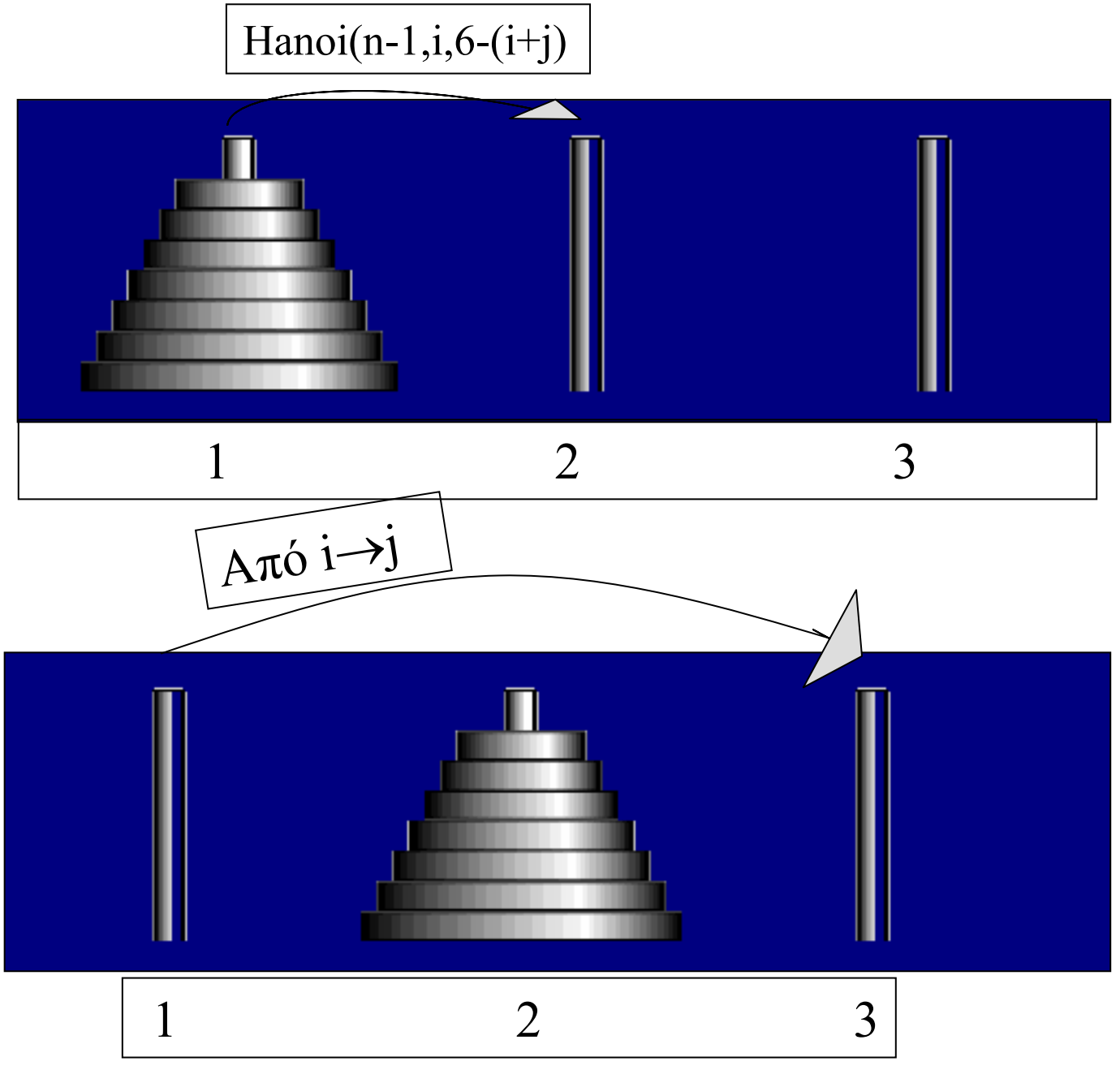
- Να μεταφερθούν όλοι από τον 1 στον 3
- μόνο ένα δίσκο κάθε φορά
- να μην είναι ποτέ ένας μικρός κάτω από ένα μεγαλύτερο

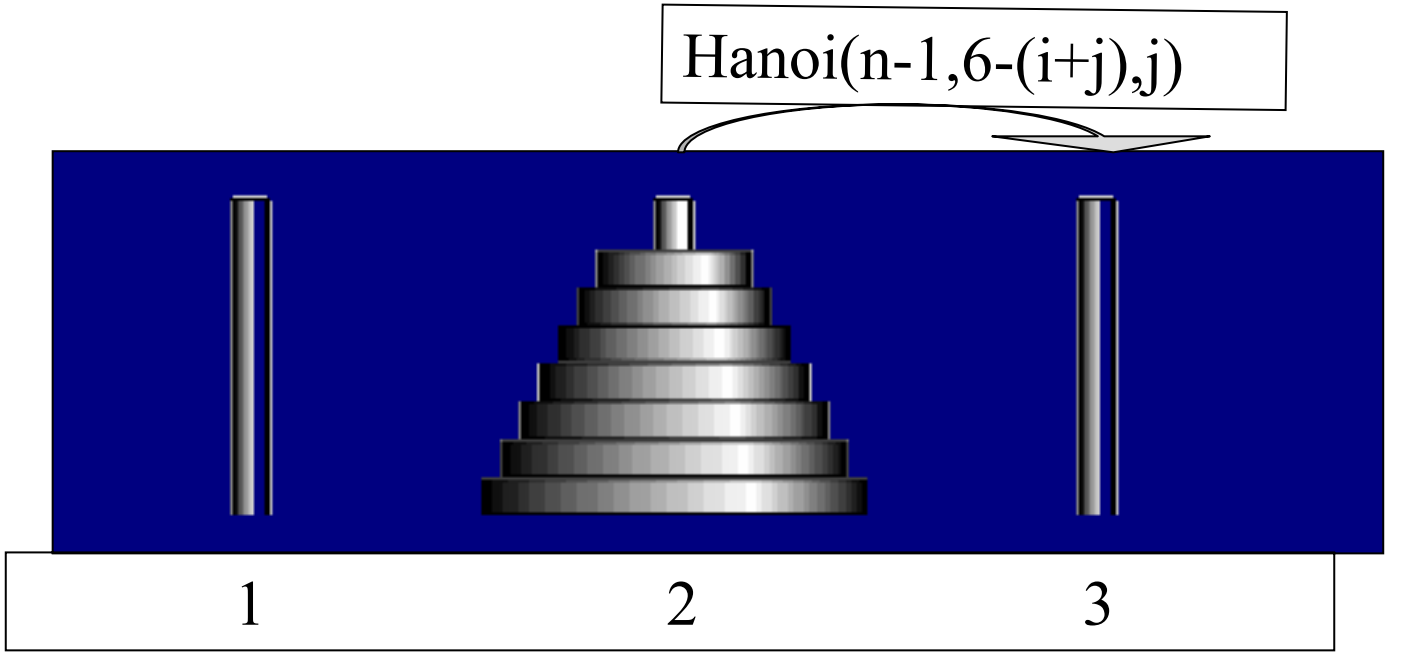
Οι πύργοι του Hanoi: Αλγόριθμος

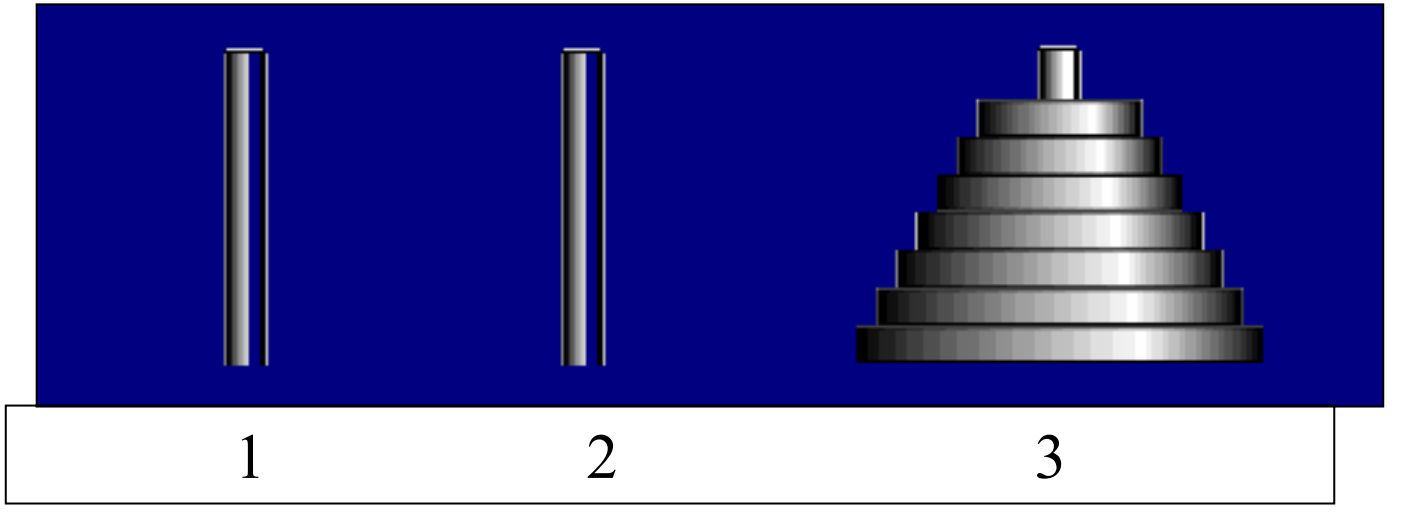
- Αν $n \leq 1 \rightarrow$ ok
- Εστω το πρόβλημα έχει λυθεί για n-1 δίσκους, από i στο j

Λύση για n δίσκους (από $i \rightarrow j$)

1. Μεταφέρουμε τους n-1 δίσκους από τον i στον $\kappa = 6-(i+j)$
2. Παίρνουμε το μεγάλο δίσκο από τον i και τον τοποθετούμε στον j
3. Μεταφέρουμε τους n-1 δίσκους από τον κ στον j


Hanoi(n-1,i,6-(i+j)
1
2
3
Από i→j
1
2
3


Hanoi(n-1,6-(i+j),j)
1
2
3


1
2
3

Οι πύργοι του Hanoi: Αλγόριθμος

```
Hanoi(n:integer; i, j:integer);


 if n >0 then
     Hanoi(n-1,i,6-(i+j))
     Μετέφερε 1 δίσκο απο τον i στον j
     Hanoi(n-1, 6-(i+j), j)
 endif
```

***

Πύργοι του Hanoi

Πολυπλοκότητα:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad (n \geq 1)$$
$$T_0 = 0$$

$T_n = 2T_{n-1} + 1 \quad (\times 2^0)$

$T_{n-1} = 2T_{n-2} + 1 \quad (\times 2^1)$

$T_{n-2} = 2T_{n-3} + 1 \quad (\times 2^2)$

….

$T_2 = 2T_1 + 1 \quad (\times 2^{n-2})$

$T_1 = 2T_0 + 1 \quad (\times 2^{n-1})$

$T_n = 2^n T_0 + (1 + \ldots + 2^{n-1})$ μέθοδος των αθροιζομένων

$T_n = 2^n \times 0 + (2^n - 1)/(2-1) \Rightarrow T_n = 2^n - 1,\ n \geq 0$ παραγόντων

$$a(n)T_n=b(n)\ T_{n-1}+c(n)$$

T_0 σταθερά και

a, b, c συναρτήσεις του n

Άσκηση:

$T(n)=T(n-1)+2, \quad T(1)=1$

$T(n)=2+T(n-1)$

$=2+2+T(n-2)$

……

……

$=2+\ldots+2+T(1)$

$n-1$ φορές

$T(n)=(n-1)2+1 \leq 2n$

$T(n) = \Theta(n)$