Ουρές προτεραιότητας

- Πελάτες .... στο ταμείο μιας τράπεζας
- Κάθε πελάτης με ένα νούμερο/αριθμός προτεραιότητας !
- Όσο ο αριθμός είναι μεγάλος, τόσο οι πελάτες είναι πιο ενδιαφέροντες(!)
    - ένα μόνο ταμείο ανοικτό
    - επεξεργασία γρήγορη

➢ «ο υπάλληλος της τράπεζας πρέπει να ξέρει να κάνει γρήγορα τις 3 ακόλουθες διαδικασίες»:

- **Αναζήτηση** του μέγιστου στην ουρά προτεραιότητας
- **Διαγραφή** αυτού του στοιχείου από την ουρά
- **Εισαγωγή** ενός νέου στοιχείου στην ουρά

Λύσεις (1)

Ένας πίνακας και ταξινομηση κατά αύξουσα σειρά προτεραιοτήτων.

- Αναζήτηση του μέγιστου
- Διαγραφή

- Αλλά εισαγωγή ;

O(n), n το μήκος της ουράς (άσκηση)

Λύσεις (2)

- Διαχείριση μιας απλής ουράς, και αναζήτηση του μέγιστου κάθε φορά.

- Εισαγωγή: γρήγορη √
- Αναζήτηση μέγιστου: O(n)
- Διαγραφή; (άσκηση)

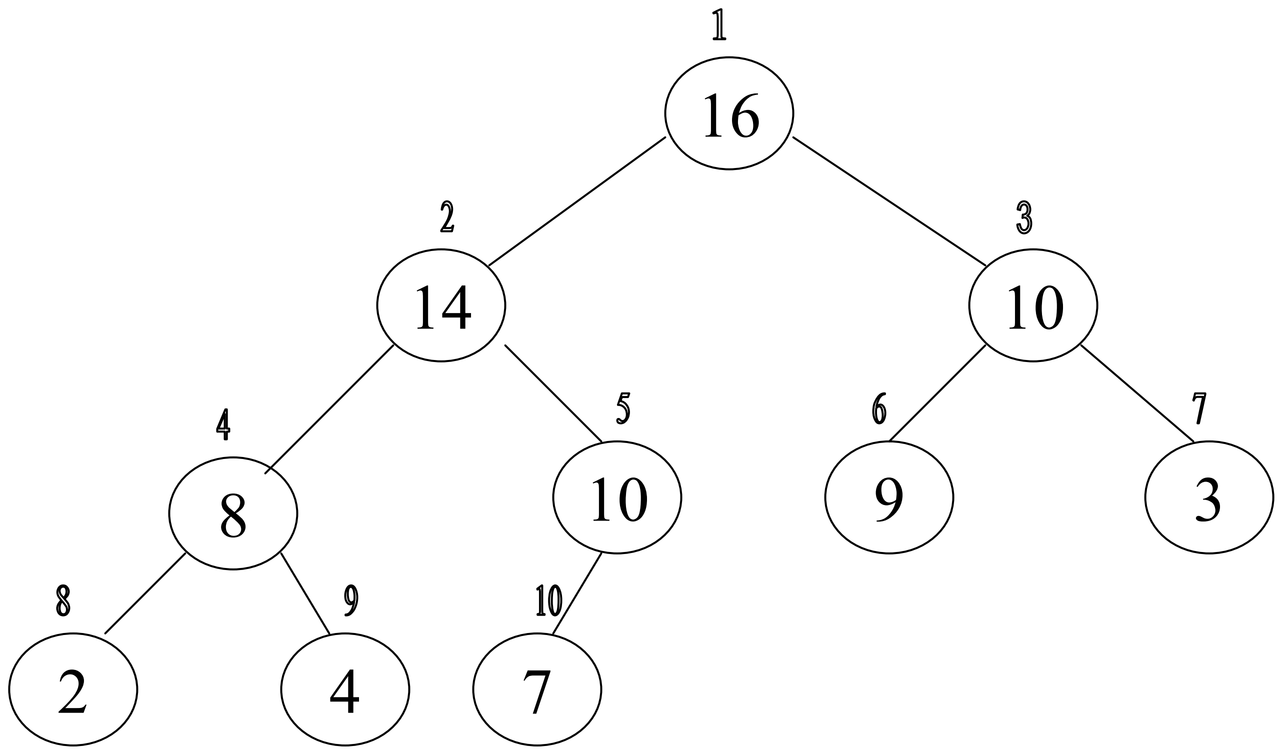
Λύση

- <u>Μια κομψή μέθοδος</u>

“Να διαχειρισθεί μια δομή μερικής διάταξης με τη βοήθεια ενός δένδρου (δομή σωρού (heap)).”

$$\Downarrow$$

Η ουρά n στοιχείων παριστάνεται από ένα δυαδικό δένδρο περιέχον σε κάθε κόμβο ένα στοιχείο



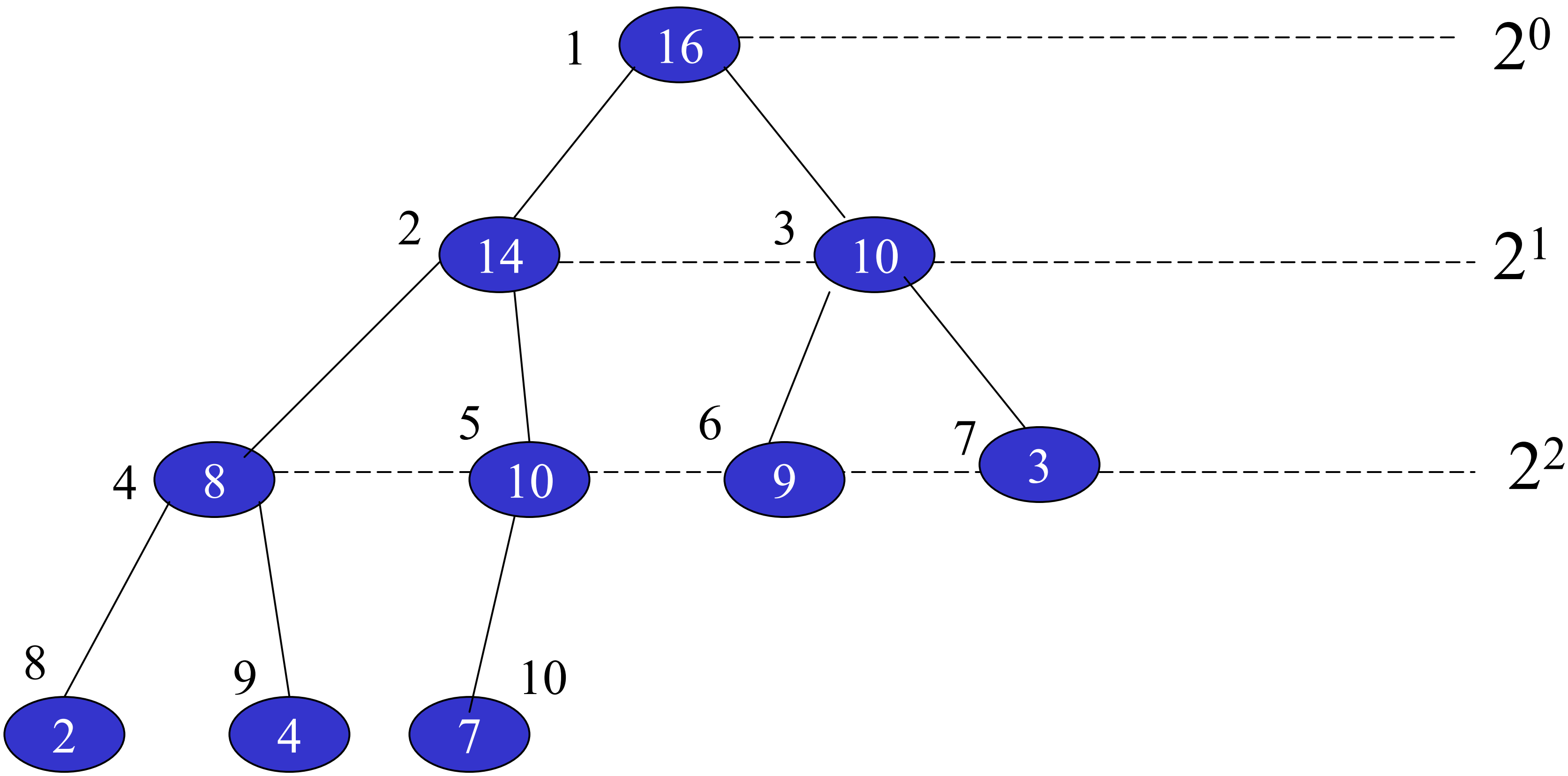
Το δένδρο πληρεί δύο βασικές ιδιότητες:

- - Τιμή κάθε κόμβου ≥ τιμής παιδιών
- - Το δέντρο είναι σχεδόν πλήρες

Δυαδικό Δέντρο Σχεδόν πλήρες

- Τα επίπεδα, εκτός ίσως από το τελευταίο, περιέχουν το μέγιστο αριθμό κόμβων (2^i)
- φύλλα τελευταίου επιπέδου όλα αριστερά
- φύλλα όλα στο τελευταίο - προτελευταίο επίπεδο
- <u>Εσωτερικοί</u> κόμβοι δυαδικοί (εκτός από το δεξιότερο του προτελευταίου επιπέδου)

Παράδειγμα:



Αρίθμηση → Κατά πλάτος

$\Downarrow$

- Κάθε κόμβος έχει τον πατέρα του στη θέση $\lfloor i/2 \rfloor$
- Το αριστερό παιδί του κόμβου i, είναι ο κόμβος 2i
- Το δεξιό παιδί του κόμβου i→2i+1

Υλοποίηση με πίνακα ενός σωρού

- Αρίθμηση κατά πλάτος

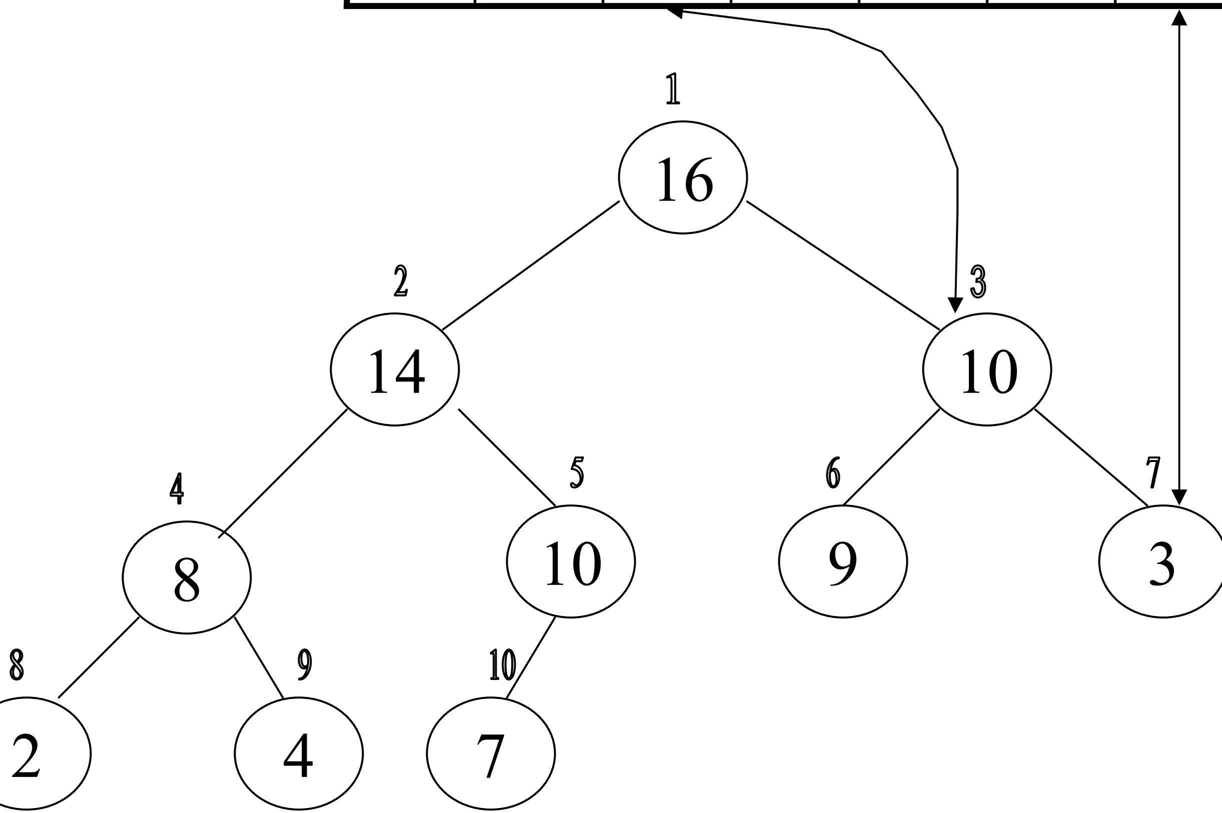
«το νούμερο κάθε κόμβου του δένδρου δίνει τον δείκτη του πίνακα που περιέχει την τιμή του κόμβου»

$$2 \le 2i \le n \Rightarrow a[2i] \le a[i]$$

$$3 \le 2i + 1 \le n \Rightarrow a[2i+1] \le a[i]$$

Παρ. :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a[i]	16	14	10	8	10	9	3	2	4	7



θέση 7:

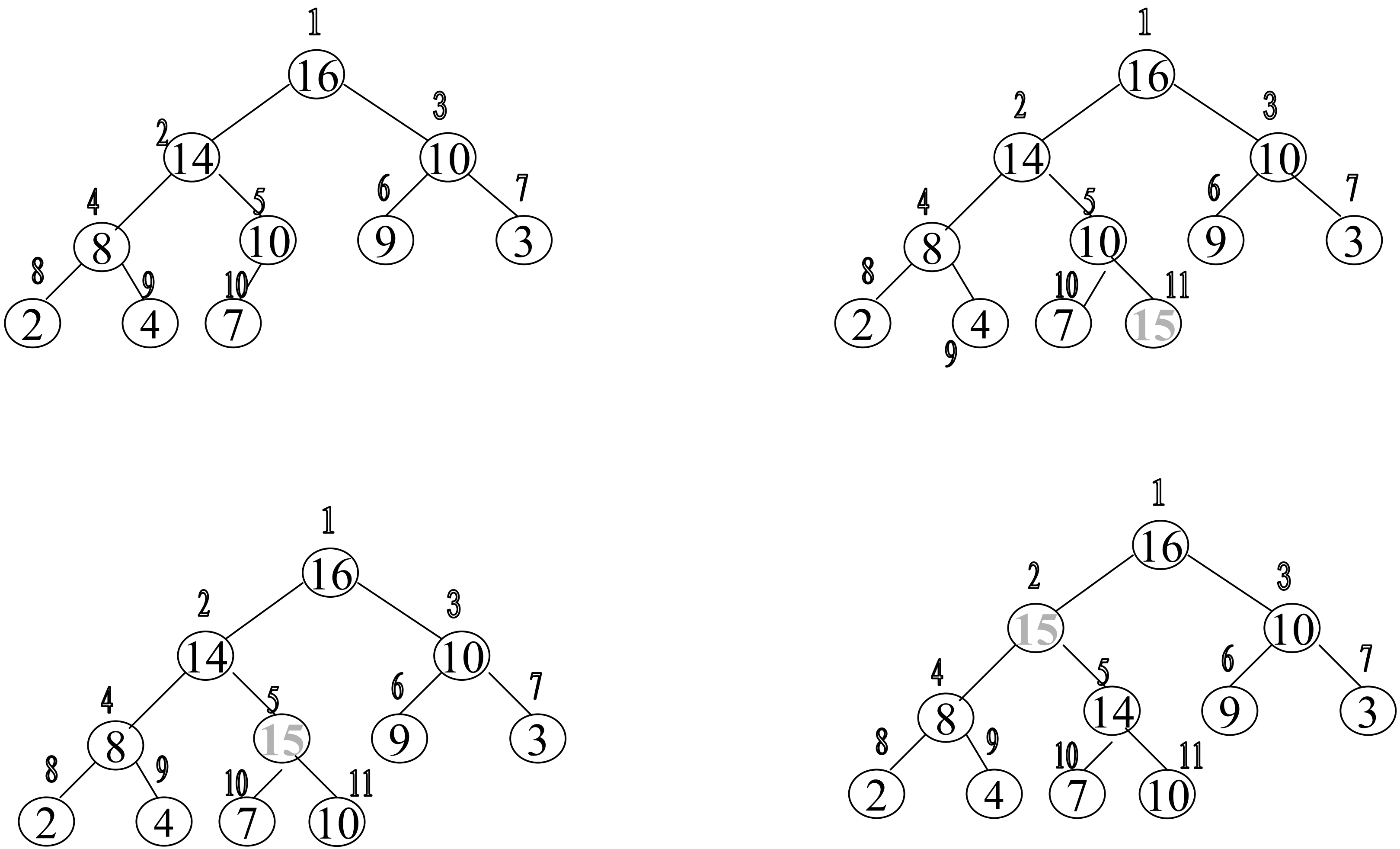
2*3+1

Εισαγωγή ενός νέου στοιχείου στο σωρό

Αλγόριθμος

- Αύξησε n
- Θέσε a[n]= u (u : νέο στοιχείο), i = n
- Αν η συνθήκη $a\left(\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right)$ ≥ u δεν ικανοποιείται ΤΟΤΕ
    - αντιμετάθεσε την τιμή του κόμβου i με αυτή του πατέρα του
    - πήγαινε στον πατέρα i= i div 2 και επανέλαβε μέχρι ότου η συνθήκη του σωρού ικανοποιείται

Παραδειγμα



Διαγραφή ενός στοιχείου

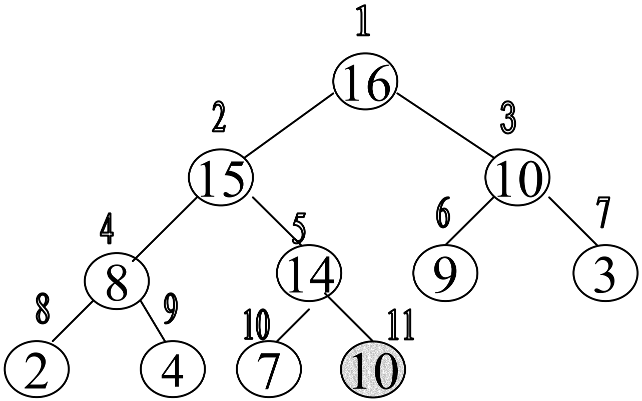
Η διαδικασία διαγραφής του 1ου στοιχείου της ουράς αφαιρεί τη ρίζα του δέντρου που παριστάνει την ουρά, δίδοντας δυο δένδρα.

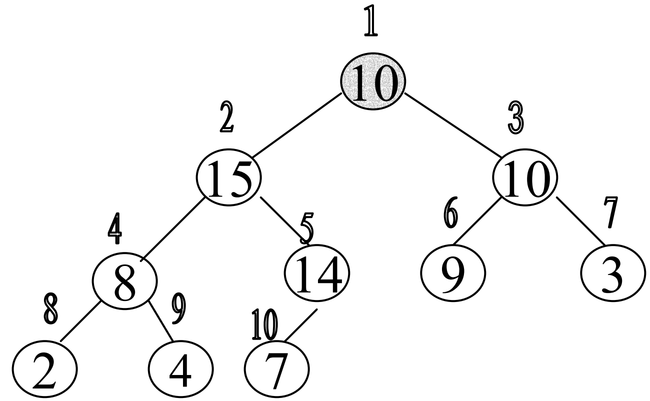
Διαγραφή ενός στοιχείου

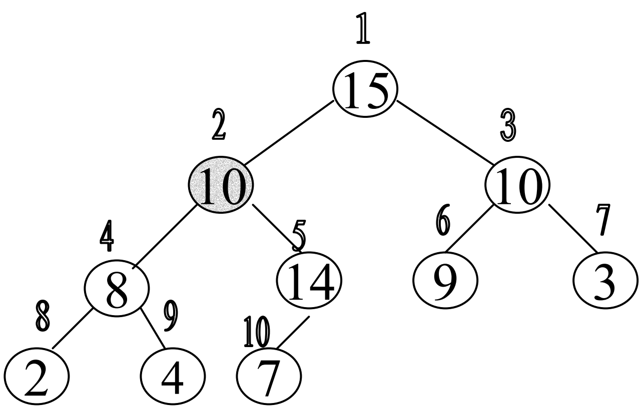
Αλγόριθμος

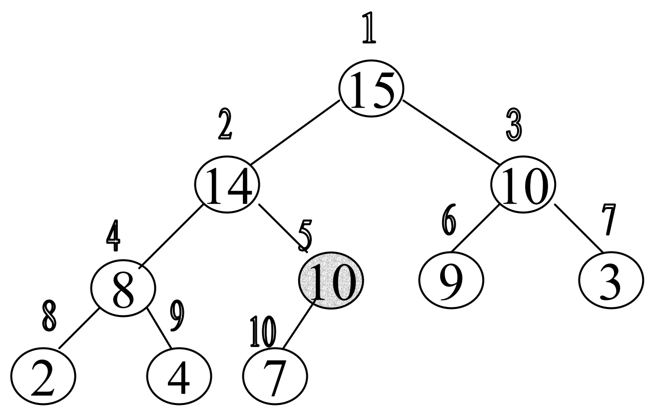
1. Θέσε το δεξιότερο στοιχείο της τελευταίας γραμμής στη θέση της ρίζας
2. σύγκρινε την τιμή του με αυτή των παιδιών της
3. αντιμετάθεσε αυτή την τιμή με την τιμή του νικητή (μέγιστη τιμή των παιδιών)
4. επανέλαβε τη διαδικασία μέχρι ότου να ικανοποιείται η συνθήκη του σωρού.

Παράδειγμα:****


1
16
2 3
15 10
4 5 6 7
8 14 9 3
8 9 10 11
2 4 7 10


1
10
2 3
15 10
4 5 6 7
8 14 9 3
8 9 10
2 4 7


1
15
2 3
10 10
4 5 6 7
8 14 9 3
8 9 10
2 4 7


1
15
2 3
14 10
4 5 6 7
8 10 9 3
8 9 10
2 4 7

Πολυπλοκότητα

Η αναπαράσταση των ουρών προτεραιότητας με σωρό επιτρέπει να κάνουμε τις 3 διαδικασίες:

- Αναζήτηση (μέγιστου στοιχείου)
- Εισαγωγή (ενός στοιχείου)
- Διαγραφή (ενός στοιχείου)

σε O(logn)

Π Ρ Ο Τ Α Σ Η

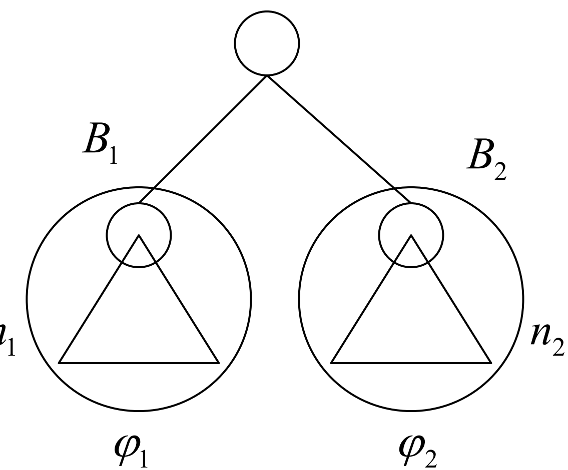
Δυαδικό δένδρο

- n κόμβοι
- φ φύλλα

$$\text{αριθμος φυλλων} = \varphi \leq \frac{n+1}{2}$$

Απόδειξη: για φ=1 αληθής

Έστω αληθής για φ < n



$$B = \langle 0, B_1, B_2 \rangle$$

$$n = n_1 + n_2 + 1$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &\leq \frac{n_1+1}{2} \\ \varphi_2 &\leq \frac{n_2+1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi \leq \frac{n+1}{2}$$

Δυαδικό δένδρο

- n κόμβοι
- φ φύλλα

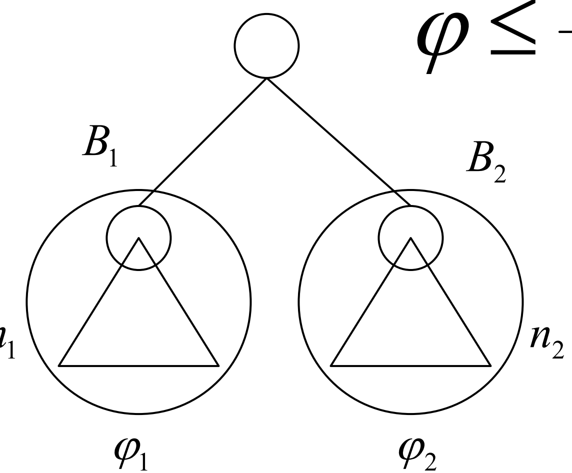
ΠΡΟΤΑΣΗ

ύψος $h \geq \lceil \log \varphi \rceil$

Απόδειξη:

$$B = \langle 0, B_1, B_2 \rangle$$

$$\varphi \leq \frac{n+1}{2}$$



$$\lg \varphi \leq \lg\left(\frac{n+1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$1 + \log \varphi \leq \log(n+1) \Rightarrow$$

$$\lceil 1 + \log \varphi \rceil \leq \lceil \log(n+1) \rceil \Rightarrow$$

$$1 + \lceil \log \varphi \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor + 1 \Rightarrow$$

$$\lceil \log \varphi \rceil \leq \lfloor \log n \rfloor \leq \text{ ύψος } h$$

$$\lceil \log(n+1) \rceil = 1 + \lfloor \log n \rfloor$$

$$2^k < n \leq 2^{k+1} - 1$$

$$2^k < n < 2^{k+1}$$

$$2^k < n + 1 \leq 2^{k+1}$$

$$k < \log(n+1) \leq k + 1$$

$$\lceil \log(n+1) \rceil = k + 1$$

$$\lceil \log(n+1) \rceil = 1 + \lfloor \log n \rfloor$$

a_n = πλήθος εσωτερικών κόμβων + πλήθος φύλλων

$$= a_{n-1} + 2^n, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$$

ύψος n-1

συνέχεια…

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} + 2^n, \quad n >= 1}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \cancel{a_{n-1}} + 2^n \\
\cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + 2^{n-1} \\
a\cancel{_{n-2}} &= a\cancel{_{n-3}} + 2^{n-2} \\
&\cancel{\ldots} \\
\cancel{a_2} &= \cancel{a_1} + 2^2 \\
\cancel{a_1} &= a_0 + 2^1
\end{aligned}$$

$$a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} 2^i, \quad n \geq 1$$

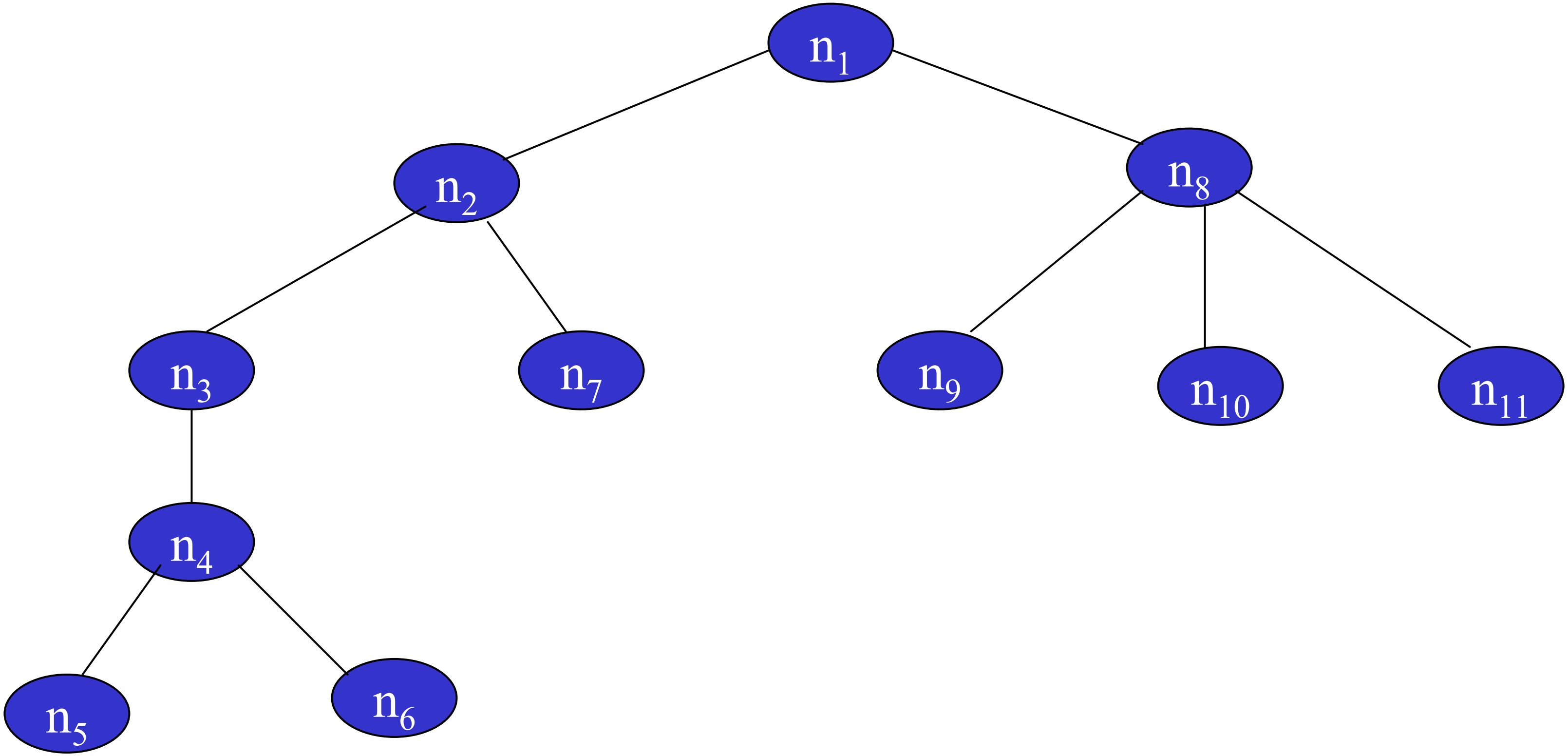
$$a_n = 1 + (2^{n+1} - 2)/(2-1)$$

$$\mathbf{a_n = 2^{n+1} - 1}$$

Δένδρα (υπενθύμιση)

Ένα δένδρο είναι είτε ένα ατομικό δένδρο (ένα φύλλο), είτε ένας κόμβος και μια ακολουθία από δένδρα.

$$\text{Κόμβοι} \begin{cases} \text{εσωτερικοί} \\ \text{φύλλα} \end{cases}$$



n_1: ρίζα

$n_5, n_6, n_7, n_9, n_{10}, n_{11}$: φύλλα

n_1, n_2, n_3, n_4, n_5: εσωτερικοί κόμβοι

Δυαδικά Δένδρα (υπενθύμιση)

Οι κόμβοι έχουν το πολύ δυο παιδιά

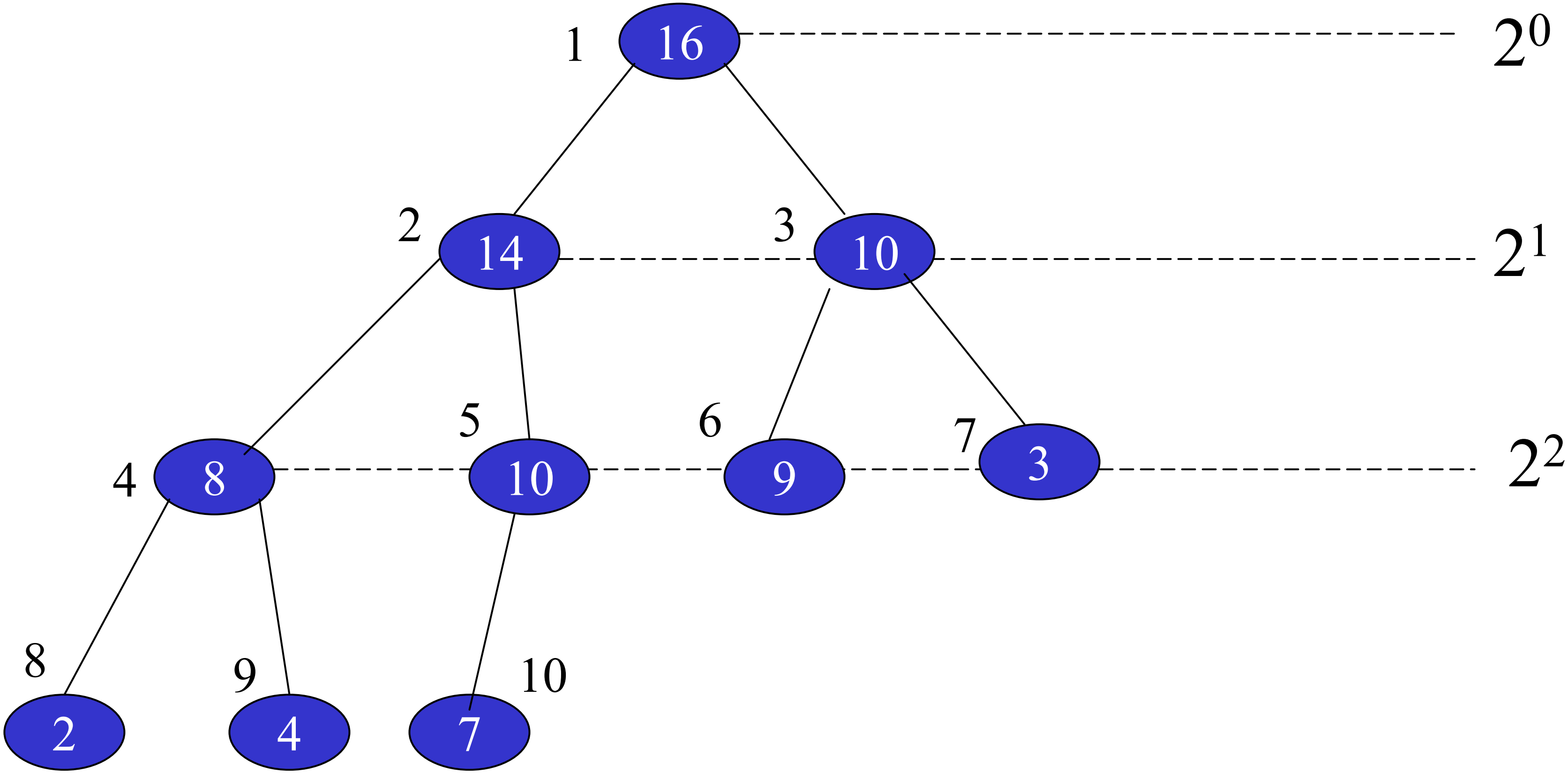
- Το βάθος, ενός κόμβου είναι το μήκος του μονοπατιού που τον ενώνει με τη ρίζα.

ρίζα → βάθος "0"

τα παιδιά της → βάθος "1"

οι άλλοι κόμβοι → βάθος ">1"

Παράδειγμα:



Υψος ενός κόμβου: αριθμός πλευρών του μακρύτερου μονοπατιού απο τον κόμβο σε ένα φύλλο.

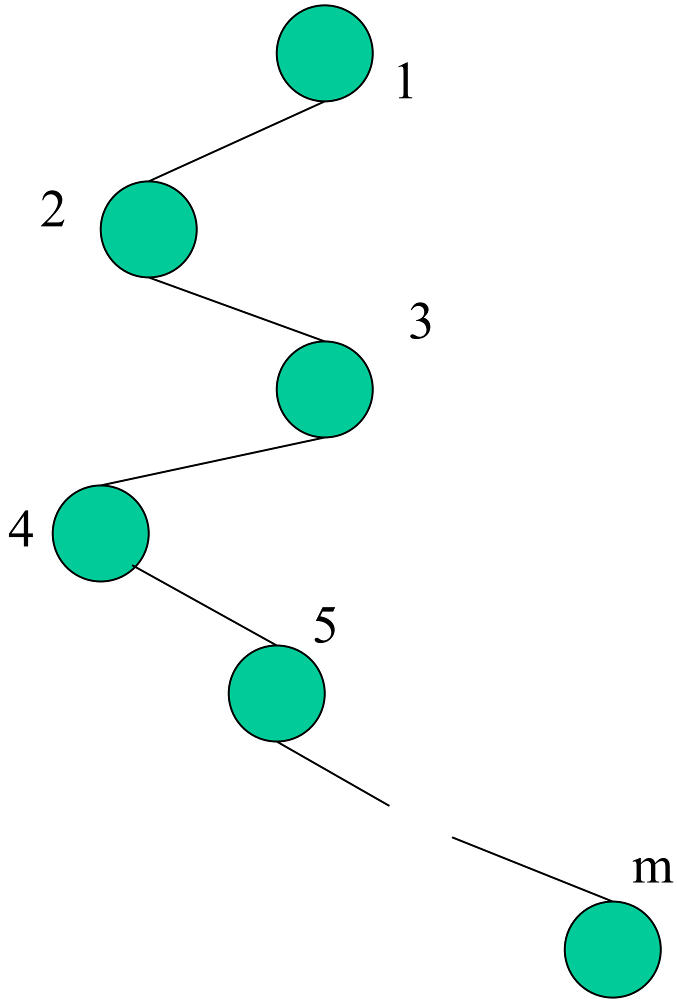
Υψος δέντρου: το ύψος της ρίζας

Δυαδικό δένδρο με

- m κόμβους και
- ύψος n

Ισχύει $\lfloor \log_2 m \rfloor \leq n \leq m-1$

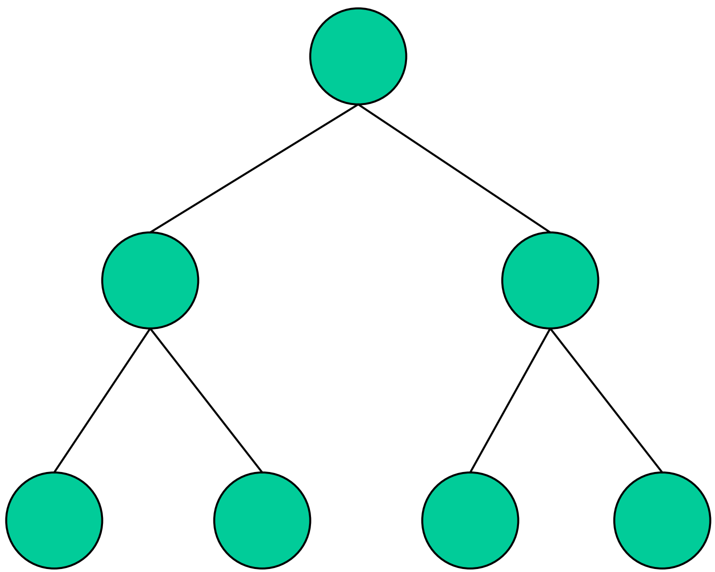
δένδρο εκφυλισμένο → μέγιστο ύψος



ύψος $n \leq m-1$

Δυαδικό Δένδρο πλήρες (υπενθύμιση)

δένδρο πλήρες → ελάχιστο ύψος



ύψος n-> $m = 2^{n+1} - 1$

Έχουμε $m < 2^{n+1} \Rightarrow \log_2 m < n+1$

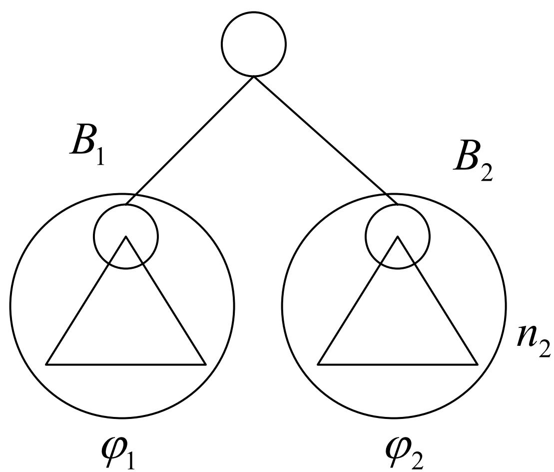
και τελικά $\log_2 m \le n \le m-1$

Πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους **n**

a_n: αριθμός κόμβων, τότε $a_n = 2a_{n-1} + 1$

$(n \geq 1,\ a_0 = 1)$

(= δύο υπό-δέντρα ύψους n-1 και μια ρίζα)



a_{n-1} a_{n-1}

Αριθμός κόμβων πλήρους δυαδικού δέντρου ύψους n

$$a_n = 2a_{n-1}+1, \quad n >= 1,\ a_0=1$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \cancel{2}a_{n-1} + 1 & (x\ 2^0)\\
\cancel{a}_{n-1} &= \cancel{2}a_{n-2} + 1 & (x\ 2^1)\\
a_{\cancel{n}-2} &= \cancel{2}a_{n-3} + 1 & (x\ 2^2)\\
&\ldots\\
\cancel{a}_2 &= \cancel{2}a_1 + 1 & (x\ 2^{n-2})\\
\cancel{a}_1 &= 2a_0 + 1 & (x\ 2^{n-1})
\end{aligned}$$

$$a_n = 2^n a_0+(1+2+\ldots+2^{n-1})$$

$$a_n = 2^n a_0+\sum_{i=0}^{n-1}2^i \Rightarrow a_n = 2^n +(2^n-1)/(2-1)= 2^{n+1} -1 ,n >= 0$$

(Μέθοδος των αθροιζόμενων παραγόντων)

Ασκηση: Αναζήτηση και εισαγωγή σε Δυαδικά δέντρα, Πολυπλοκότητα

- Successor(x)
- Minimum(T)
- Maximum(T)
- Inorder walk
- Preorder walk
- Postorder walk
- Delete(x)