Συντομότερα μονοπάτια - Δυναμικός προγραμματισμός

- Βάρη ενδεχομένως αρνητικά
- Ανίχνευση ενός κύκλου αρνητικού κόστους
- Κατανεμημένος αλγόριθμος

Συντομότερα μονοπάτια σε γράφους με κύκλους

γράφος $G=(X,U)$ $\quad |X|=n$

$$V_k(i)=\{\text{ΣΜ } \text{"}1 \longrightarrow i\text{"} \ | \text{το πολύ k τόξα}\}$$

$$V_k(i)=\min_{j\in\Gamma^{-1}(i)}\{V_{k-1}(j)+w_{ji},V_{k-1}(i)\}$$

$$V^*(i)=V_{n-1}(\mathrm{i}) \quad \text{(απλά μονοπάτια)}$$

$\Pi\rho o\beta\lambda\eta\mu\alpha\tau\alpha$

$V_0(i)=0,+\infty \quad i=1,2,3,\dots,n$

$V_1(i)=+\infty$ αν $i\notin\Gamma(1)$

$V_2(i)$

$V_3(i)$

$\vdots$

$V_{n-1}(\mathrm{i})$ (Βέλτιστη τιμή)

Λύση

$P^k(i)=j$ αν $\mathrm{V}_k(i)=V_{k-1}(j)+w_{ji}$

Δυναμικός προγραμματισμός -Αλγόριθμος Bellman

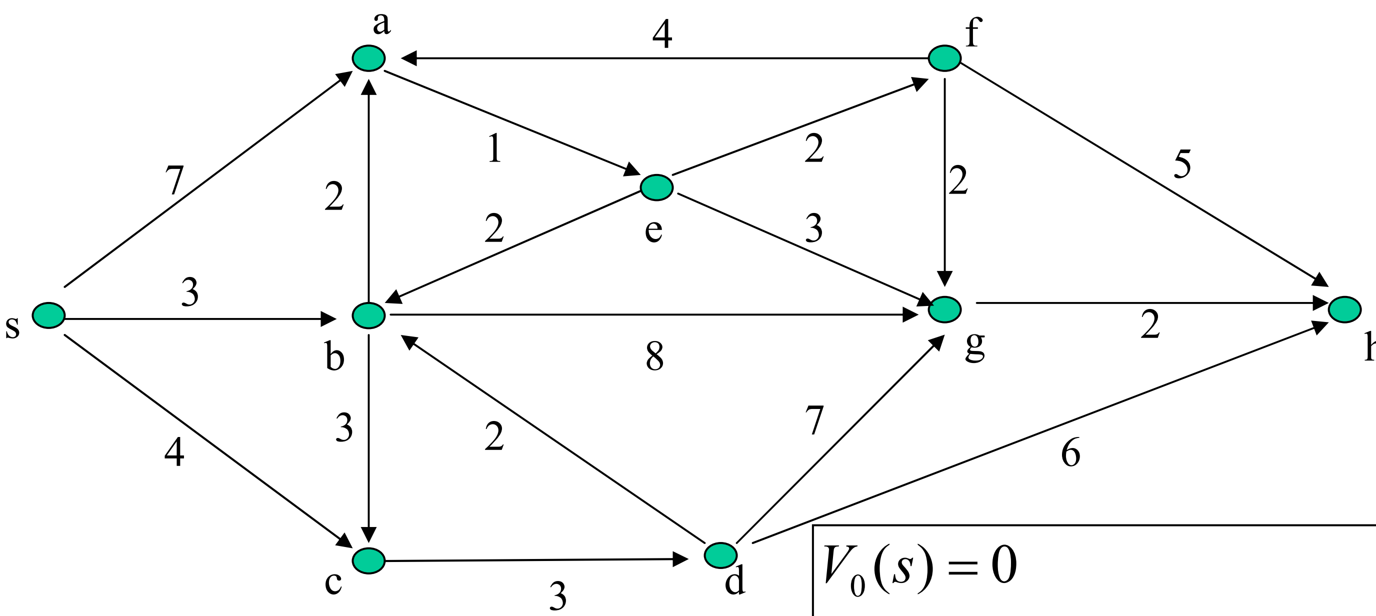
s: σημείο αφετηρίας, y: οποιοσδήποτε κόμβος,

W(x, y): βάρος τόξου (x, y), k: βήμα = το πολύ κ πλευρές

Αναδρομική σχέση:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_0(s) = 0 \\ V_0(y) = +\infty, y \neq s \\ \forall\ \kappa > 0: \\ V_k(y) = \min\{V_{k-1}(y), V_{k-1}(x) + W(x, y)\}\ \forall x\ \textit{προηγουμενο}\ \text{του y} \end{array}}$$

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



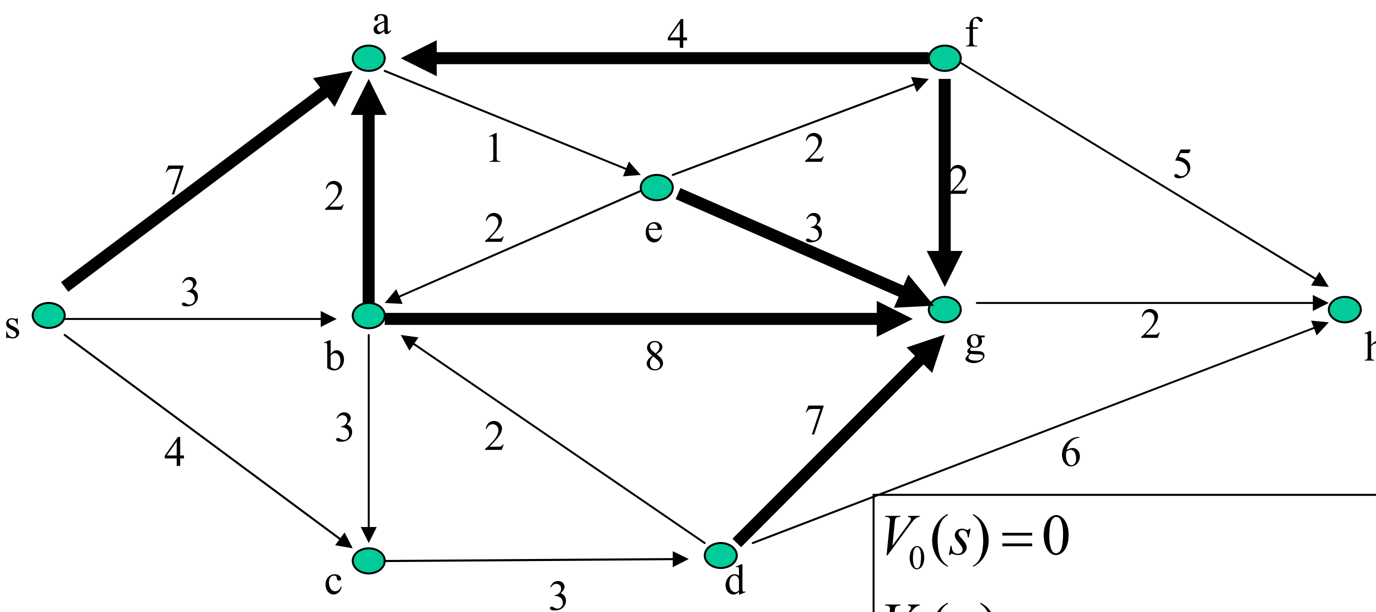
$$V_0(s) = 0$$

$$V_0(y) = +\infty, y \neq s$$

$$\forall\ \kappa > 0:$$

$$V_k(y) = \min_{\text{x pred}} \{V_{k-1}(y), V_{k-1}(x) + W(x, y)\}$$

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα



$$V_0(s) = 0$$

$$V_0(y) = +\infty, y \neq s$$

$$\forall \kappa > 0:$$

$$V_k(y) = \min_{\text{x pred}} \{V_{k-1}(y), V_{k-1}(x) + W(x, y)\}$$

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα

Επαναληψεις/Κομβοι	s	a	b	c	d	e	f	g	h
0	(s,0)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα

Επαναληψεις/Κομβοι	s	a	b	c	d	e	f	g	h
0	(s,0)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)
1	(s,0)	$(s,7)$	$(s,3)$	$(s,4)$	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)

Αλγόριθμος Bellman: Παράδειγμα

Επαναληψεις/Κομβοι	s	a	b	c	d	e	f	g	h
0	(s,0)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)
1	(s,0)	$(s,7)$	$(s,3)$	$(s,4)$	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)
2	(s,0)	$(b,5)$	$(s,3)$	$(s,4)$	$(c,7)$	$(a,8)$	(s,∞)	(s,∞)	(s,∞)

Αλγόριθμος Bellman

$A\rho\chi\iota\kappa o\pi o\iota\eta\sigma\eta$ V $\mu\varepsilon$ ∞, P $\mu\varepsilon$ 0

$\mathrm{V}[\mathrm{s}] := 0;\ \mathrm{P}[\mathrm{s}] := \mathrm{s};\ \mathrm{k} := 0;$

Repeat

$--$

$--$

$Until\ stable\ or\ (k = n)$

Αλγόριθμος Bellman

```
Repeat
   k := k+1
   V_new = V
   stable := True
   for y := 1 to n
      for all x predecessors of y
         if (V[x] ≠ ∞) and (V_new[y] > V[x] + W_xy) then
            V_new[y] := V[x] + W_xy
            P[y] := x; stable=False
         endif
    endfor
endfor
V = V_new
Until stable or (k = n)
```

Αλγόριθμος Bellman

$\rightarrow \text{stable} = \text{false}\ \textit{και}\ \text{k} = \text{n}\ (\textit{ύπαρξη κύκλου αρνητικού βάρους})$

$\rightarrow \text{V}[\text{x}] = \infty$ *στο τέλος του αλγόριθμου*: x *μη προσπελάσιμος ξεκινόντας απο το κόμβο* s.

$\rightarrow$ *τιμή του* k *στο τέλος του αλγορίθμου* = *μέγιστο μήκος σε αριθμό τόξων των μονοπατιών που ευρέθησαν*.

Αλγόριθμος Bellman

- Κριτήριο τερματισμού:

$$V_k(y) = V_{k-1}(y), \forall y$$

- Οριστικοποίηση ετικετών το πολύ σε (n-1) επαναλήψεις
- Ανίχνευση ενός κύκλου στους επόμενους του s:

  έχουμε $V_n(y) \neq V_{n-1}(y)$, για έναν το λιγότερο κόμβο

- Πολυπλοκότητα: $O(n \cdot m)$

- Κατανεμημένος αλγόριθμος

Αλγόριθμος Bellman (Αρνητικά βάρη

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4$ κόστος = 3

$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$ κόστος = 1